

Duffing 振子微弱信号检测方法研究*

刘海波[†] 吴德伟 金伟 王永庆

(空军工程大学信息与导航学院, 西安 710077)

(2012年8月28日收到; 2012年10月16日收到修改稿)

在前期实验工作的基础上, 从理论分析的角度, 提出了利用 Duffing 振子从大周期态向混沌态的相变作为判据的微弱周期信号检测方法, 给出了检测原理, 并论证了其可行性; 从过渡带影响和检测概率两方面将该方法与传统的检测方法进行了比较分析, 并对两者的检测性能进行了仿真对比. 分析和仿真结果都显示, 相同条件下, Duffing 振子从大周期态向混沌态的相变受过渡带影响更小, 所提方法具有更好的检测性能. 实验数据还表明, Duffing 振子检测微弱信号只能基于单向相变, 利用阵发混沌进行频差检测只适用于待测信号信噪比较高的情况.

关键词: Duffing, 混沌, 检测, 过渡带

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.62.050501

1 引言

自 1992 年 Birx 将混沌振子用于微弱信号检测, 如何利用混沌振子检测微弱信号成为国内外许多科学工作者极为关注的一项重要课题^[1-4].

Duffing 振子微弱信号检测方法是一种时域信号处理技术, 具有比以往基于统计学理论所提出的频谱方法、高阶统计量等更强的检测能力^[5], 但仍存在很多难题亟待解决. 其中一个突出的问题是: 系统在临界状态下, 受过渡带的影响, 如果检测时间不够长, 容易出现误判^[6,7]. 且随着检测精度的提高, 过渡带的影响更加明显, 而检测时间长短, 往往只能通过实验数据进行估计, 给工程应用带来困难. 因此, 研究如何减小过渡带影响, 提高 Duffing 振子混沌检测系统的实时性具有重要意义.

为叙述方便, 我们定义 Duffing 振子相轨迹从混沌运动状态向大周期运动状态的相变为正向相变, 以正向相变为判据的检测方法称为正向相变检测方法; 定义 Duffing 振子相轨迹从大周期运动状态向混沌运动状态的相变为逆向相变, 以逆向相变为判据的检测方法称为逆向相变检测方法. 从掌握的资料来看, 现有文献没有将这两种相变过程区分

考虑, 所用方法都是以正向相变作为判据^[8,9], 因此可将其归类为正向相变检测方法.

前期工作中我们从仿真实验数据发现, Duffing 振子逆向相变同样具有对周期信号敏感、对噪声具有一定免疫能力的特性, 且受过渡带的影响更小, 因此提出可以利用 Duffing 振子逆向相变进行微弱信号检测. 本文从理论分析的角度, 将逆向相变检测方法与传统正向相变检测方法进行比较, 系统地给出了基于 Duffing 振子逆向相变检测方法的原理、可行性论证, 以及逆向相变受过渡带影响小、相变时间更具规律性的内在机理. 此外, 根据实验得到的 Duffing 振子两种相变的阈值数据还得出了一些有益结论.

2 Duffing 振子逆向相变检测原理

以改进的 Holmes 型 Duffing 振子为例, 其状态方程为^[10]

$$\begin{aligned} x' &= \omega_1 \cdot y, \\ y' &= \omega_1(x^3 - x^5 - ky \\ &\quad + \gamma \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \varepsilon r(t)), \end{aligned} \quad (1)$$

式中, k 为阻尼比, $x^3 - x^5$ 为非线性恢复力,

* 国家自然科学基金(批准号: 61174194)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: 13992864936@126.com

$\gamma \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + \varepsilon r(t)$ 为系统策动力, $\gamma \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ 为参考信号, $r(t)$ 为待检测信号, ε 为待测信号的加权因子.

Duffing 阵子相轨迹具有如下特性: 固定 k 值, γ 从 0 逐渐增加到临界值 γ_1 时, 相轨迹由周期内轨运动转变为混沌运动, 并在较大范围内保持混沌状态. 当 γ 继续增加到大于临界值 γ_2 时, 系统相轨迹由混沌运动转变为大周期运动. 如图 1 所示, 分别为 Duffing 振子的混沌运动和大周期运动状态的相轨迹分布.

传统的 Duffing 振子正向相变检测方法是将参考信号幅度设置为临界值 γ_2 , 然后加入待测信号. 当待测信号中包含同频的微弱周期小信号且与参考信号相位一致时, 叠加后的策动力幅值将超过临界值, 系统发生正向相变, 进而判断待测信号中微弱周期信号的存在 [5,11].

本文所提的 Duffing 振子逆向相变检测方法是基于其相反过程, 系统的初始相态为稳定的大周期运动状态. 首先将参考信号幅度调整到逆向相变临界值 γ'_2 , 然后加入待测信号; 当待测信号中包含的同频微弱周期信号与参考信号相位相反时, 叠加后的策动力幅值将低于 γ'_2 , 导致系统发生逆向相变, 进而实现检测.

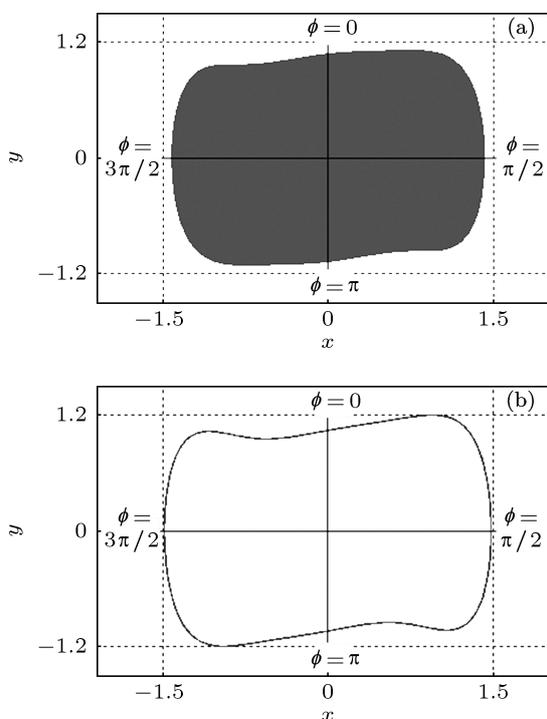


图 1 Duffing 振子混沌态和大周期态相轨迹分布 (a) 混沌态分布域 (E_1); (b) 大周期态分布域 (E_2)

3 Duffing 振子逆向相变检测方法可行性分析

从 Duffing 振子逆向相变检测原理可知, 其实现需要具备以下三个条件:

- 1) 系统具有强参考信号, 即参考信号幅值要远大于待测信号;
- 2) 不考虑噪声影响, 系统在稳定大周期运动状态下具有周期解, 且解唯一;
- 3) 系统初始相态为稳定的大周期态.

对于条件 1), 它与传统的正向相变检测方法中的强参考信号条件设置相同, 无需讨论; 对于条件 2), 文献 [12, 13] 给出了理论推导, 证明系统在大周期运动状态下, 具有以 $2\pi/\omega_1$ 为周期的周期解, 且解唯一.

下面对条件 3) 进行讨论, 分析其可实现性.

设 Duffing 振子系统相空间为 E , t_i 时刻对应的相点为 $e_i = (x_i, y_i)$, 其中 $e_i \in E$, $x(t_i) = x_i$, $y(t_i) = y_i$. 从 (1) 式的数值计算方法可知, 对于任意 m 个非负整数 n_1, n_2, \dots, n_m ($0 \leq n_1 < \dots < \dots < n_m$) 和任意自然数 k , 系统的 k 步转移概率满足

$$\begin{aligned}
 P\{e_{n_m+k} = (x_{n_m+k}, y_{n_m+k}) | e_{n_1} = (x_{n_1}, y_{n_1}), e_{n_2} = (x_{n_2}, y_{n_2}), \dots, e_{n_m} = (x_{n_m}, y_{n_m})\} \\
 = P\{e_{n_m+k} = (x_{n_m+k}, y_{n_m+k}) | e_{n_m} = (x_{n_m}, y_{n_m})\}.
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

因此, 系统相点的运动是一个 Markov 过程, 系统 t_{i+1} 时刻的相点位置只与 t_i 时刻相点位置有关, 而与 t_i 之前的相点位置无关. 由条件 2), 在稳定大周期运动状态时, 系统有唯一的 $2\pi/\omega_1$ 周期解, 即策动力周期与相轨迹运动周期相同, 且一一对应. 通过数值计算得到策动力相位与相轨迹相位存在如下对应关系: 系统策动力相位 $\phi = 2n\pi$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) 对应图 1 中相空间相位 $\phi = 0$; $\phi = (2n+1)\pi$ 对应 $\phi = \pi$. 因此, 在系统参数 ω_1, k, γ 确定的情况下, 设定系统初相点 $e_0 = (x_0, y_0)$ 于稳定的大周期运动相轨迹分布域 E_2 上, 调整系统策动力初相, 使其与 e_0 在 E_2 上所处的相空间相位满足上述对应关系, 即可认为系统初始相态为稳定的大周期相态.

由于待测信号相位未知, 其与参考信号矢量叠加而成的系统策动力相位因此也是未知的. 但参考信号幅度远大于待测信号中微弱周期信号的幅度, 两者相位完全由参考信号相位主导, 可通过设置参

考相位初相实现系统策动力初相的调整,使其满足上述对应关系,从而将系统初始相态设定为大周期相态.因此,条件3)是容易实现的.例如,当待测信号中含有正弦小信号时,设待测信号为

$$r(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi_0) + n(t), \quad (3)$$

其中, A 为小正弦信号幅值, $n(t)$ 为零均值噪声.当参考信号的频率和相位与待测信号接近时,设 $\omega_0 = \omega_1 + \Delta\omega$, $\varphi_0 = \varphi_1 + \Delta\varphi$, 得到 Duffing 检测系统总策动力为

$$F(\Delta\omega, \Delta\varphi, t) = \rho(t) \cos(\omega_1 t + \varphi_1 + \theta(t)). \quad (4)$$

系统策动力幅值

$$\rho(t) = \sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2 A^2 + 2\gamma\varepsilon A \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)}. \quad (5)$$

系统策动力相位

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega_1 t + \varphi_1 + \theta(t) \\ &= \omega_1 t + \varphi_1 + \arctan \frac{\varepsilon A \sin(\Delta\omega t + \Delta\varphi)}{\gamma + \varepsilon A \cos(\Delta\omega t + \Delta\varphi)}. \end{aligned} \quad (6)$$

系统策动力与参考信号的相位差的最大值 $|\theta(t)|_{\max} = \arctan(\varepsilon A / \gamma)$, 由于 $\gamma \gg \varepsilon A$, $\theta(t)$ 取值非常小.随着 $(\Delta\omega, \Delta\varphi)$ 趋向 $(0, 0)$, 其变化范围将进一步缩小.因此, $\theta(t)$ 对总策动力相位的影响可以忽略,可以用参考信号相位近似代替系统策动力相位的设置.

综上所述, Duffing 振子逆向相变检测方法具有较好的可行性.

4 两种检测方法性能比较

影响 Duffing 振子微弱信号检测性能的因素中,除引言部分提到的过渡带问题外,另一个问题就是 Duffing 振子检测系统存在检测盲区^[14].因此,在比较所提逆向相变检测方法和传统的正向相变检测方法时,主要从过渡带和微弱信号一次被检测概率两个方面进行.

4.1 过渡带影响

所谓过渡带,是指系统由一种相态向另一种相态转变的中间过程.系统发生正向相变需要同时完成两个变化:一是相轨迹从混沌态相轨迹域运动到大周期相轨迹域;二是相点的相空间相位与系统策动力相位之间开始保持稳定的对应关系.从图1可以看出,系统在大周期状态时,相轨迹运动是规则

的,且分布域狭窄;而系统在混沌状态时,相轨迹对初值极度敏感,初值的微小差异,都会导致完全不同的轨迹^[13],从而导致相变时间差异很大.在噪声影响下,系统发生正向相变的时间会有更大的随机性.这对检测时间的设定和状态判断是十分不利的.

因此,从过渡带的影响方面来看,逆向相变检测方法比正向相变检测方法更具优势.

4.2 检测概率

从正向检测和逆向检测的检测原理可以看出,待测信号中包含的弱信号和参考信号的相位需要满足一定关系才能被检测到,即单一振子一次检测到弱信号是一个概率事件.因此存在一个检测窗口,检测窗口越大,对弱信号检测越有利.

仍考虑待测信号中包含微弱正弦信号的情况,由 $\rho(t) > \gamma_2$, 得到 Duffing 振子正向相变检测方法的检测窗口 B_1 为

$$-\pi + \arccos\left(\frac{\varepsilon A}{2\gamma_2}\right) < B_1 < \pi - \arccos\left(\frac{\varepsilon A}{2\gamma_2}\right). \quad (7)$$

同样,由 $\rho(t) < \gamma_2'$ 可以得到 Duffing 振子逆向相变的检测窗口 B_2 为

$$\pi - \arccos\left(\frac{\varepsilon A}{2\gamma_2'}\right) < B_2 < \pi + \arccos\left(\frac{\varepsilon A}{2\gamma_2'}\right). \quad (8)$$

显然, $B_1 > B_2$. 但由于 $\gamma_2' \gg \varepsilon A$, $B_1 \approx B_2$, 即两种相变检测方法的弱信号一次被检测概率几乎相等.

5 仿真实验

根据 Duffing 振子弱信号检测原理,待测信号中的周期小信号与参考信号矢量叠加,使合成的系统策动力幅值超过临界值,从而引起相变.因此,可将输入信号设为纯噪声,并调整参考信号幅度,通过对比相同参考信号分辨率下系统相变所需时间,或者是相同检测时间内系统相变对参考信号幅度的分辨率,实现 Duffing 振子的两种相变检测性能的比较.

仿真时,利用定步长四阶龙格-库塔方法进行计算.设定 $k = 0.5$, $\omega_1 = 2\pi \times 10^4$ rad/s, 正向相变检测的系统初值为 $(0, 0)$ ^[15], 逆向相变的系统初值为 $(0, 1.04)$, 参考信号初相 $\varphi_1 = 0$; 积分步长 $h = 1.1 \times 10^{-6}$ s; 设 $r(t)$ 为 0 dBW 高斯白噪声, 仿真时长 10 s.

令 $\varepsilon = 0$, 调整参考信号幅值和有效位数, 得到系统阈值分辨率不同情况下的两种相变时间 (过渡带) 统计如图 1 所示. 仿真中, 系统相变判别采用基于圆域相图分割的判别方法 [16]. 可以看出, 输入噪声为零时, 在相同的检测灵敏度情况下, Duffing 振子发生逆向相变时间明显小于正向相变时间, 且随着阈值分辨率的增加, 逆向相变所需时间更具规律性, 近似呈等比数列. 这与 4.1 中的分析是一致的.

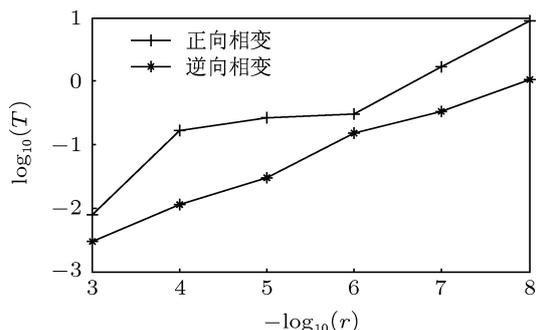


图 2 未加入噪声情况下两种相变时间比较 (r 为阈值分辨率, T 为系统相变时间)

令 ε 分别等于 3.1623×10^{-3} , 1.0×10^{-3} 和

3.1623×10^{-4} , 则进入系统的噪声对应为 -50 dBW, -60 dBW 和 -70 dBW. 如表 1 所示, 为不同噪声强度下 10 次独立仿真实验结果统计. 其中

$$\text{相变概率} = \frac{\text{相变的次数}}{\text{仿真总次数}} \times 100\%. \quad (9)$$

从表 1 可以看出, 由于噪声的影响, 参考信号幅度在临界值附近时, 系统发生相变具有随机性; 随着噪声强度的增加, 两种相变对参考信号幅度的分辨能力都有所降低, 正向相变阈值有所降低, 而逆向相变阈值有所升高; 噪声强度相同情况下, 系统逆向相变对参考信号幅度具有更高的分辨率, 在噪声为 -70 dBW 时, 分辨率提高了一个数量级. 因此, Duffing 振子逆向相变具有更好的检测性能. 此外, 值得注意的是, 虽然逆向相变和正向相变互为相反过程, 但两者的阈值并不相同, $\gamma_2 > \gamma'_2$, 且差距较大. 这说明, 基于 Duffing 振子的弱信号检测只能基于其单向相变, 即正向相变, 或逆向相变, 而文献 [17] 中所提的利用 Duffing 振子在两种相态之间往返的阵发混沌现象检测频差只适用于待测信号信噪比较高的情况.

表 1 不同噪声水平情况下系统两种相变结果统计

输入噪声/dBW	正向相变		逆向相变	
	参考信号幅值	相变概率/%	参考信号幅值	相变概率/%
-50	0.73175	0	0.71488	0
	0.73180	30	0.71486	10
	0.73195	50	0.71483	50
	0.73205	90	0.71480	90
	0.73210	100	0.71478	100
-60	0.732885	0	0.714700	0
	0.732890	10	0.714698	30
	0.732930	50	0.714695	50
	0.732975	80	0.714690	90
	0.732990	100	0.714685	100
-70	0.733200	0	0.7146670	0
	0.733205	20	0.7146669	20
	0.733230	50	0.7146660	50
	0.733240	90	0.7146650	90
	0.733250	100	0.7146648	100

6 结论

本文研究 Duffing 振子微弱信号检测技术, 根据理论分析和实验数据, 得出结论如下:

1. 基于 Duffing 振子相变的弱信号检测技术只

能基于单向相变, 而利用阵发混沌现象检测频差只适合于待测信号信噪比较高的情况.

2. Duffing 振子逆向相变受过渡带影响更小, 基于 Duffing 振子逆向相变的检测方法具有较好的可行性. 在相同条件下, 逆向相变检测方法具有更

高的检测性能. 但也有其局限性, 它只适合在强参考信号模式下进行微弱信号检测.

3. Duffing 振子相变阈值受噪声影响明显. 随

着噪声功率的增加, 两种相变对周期信号幅度的分辨率都有所降低. 正向相变阈值有所降低, 而逆向相变阈值有所升高.

- [1] Li Y, Lu P, Yang B J, Zhao X P 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 1672 (in Chinese) [李月, 路鹏, 杨宝俊, 赵雪平 2006 物理学报 **55** 1672]
- [2] Birx D I 1992 *IEEE Int. Joint Conf. Neural Networks* **22** 881
- [3] Wu Y F, Zhang S P, Sun J W, Peter R 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020511 (in Chinese) [吴勇峰, 张世平, 孙金玮, Peter R 2011 物理学报 **60** 020511]
- [4] Qing W Y, Su H, Yang Y F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2704 (in Chinese) [秦卫阳, 苏浩, 杨永峰 2008 物理学报 **57** 2704]
- [5] Wang Y S, Jiang W Z, Zhao J J, Fan H D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2053 (in Chinese) [王永生, 姜文志, 赵建军, 范洪达 2008 物理学报 **57** 2053]
- [6] Nie C Y 2006 *Ph. D. Dissertation* (Jilin: Jilin University) p60–61 (in Chinese) [聂春燕 2006 博士学位论文 (吉林: 吉林大学) 第 60—61 页]
- [7] Nie C Y 2009 *Chaotic system and weak signal detection* (Beijing: Tsinghua University Press) p12, 51–52 (in Chinese) [聂春燕 2009 混沌系统与弱信号检测 (北京: 清华大学出版社) 第 12, 51—52 页]
- [8] Lai Z H, Leng Y G, Sun J Q, Fan S B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 050503 (in Chinese) [赖志慧, 冷永刚, 孙建桥, 范胜波 2012 物理学报 **61** 050503]
- [9] Li Y, Yang B J 2007 *Chaotic Oscillator Systems(L-Y) and Detection* (Beijing: Science Press) p16 (in Chinese) [李月, 杨宝俊 2007 混沌振荡子系统 (L-Y) 与检测 (北京: 科学出版社) 第 16 页]
- [10] Li Y, Yang B J 2004 *Chaotic Oscillator Detection Introduction* (Beijing: Publishing house of electronics industry) p51–55 (in Chinese) [李月, 杨宝俊 2004 混沌振荡子检测引论 (北京: 电子工业出版社) 第 51—55 页]
- [11] Jiang W L, Wu S Q, Zhang J C 2002 *Journal of Yanshan University* **26** 114 (in Chinese) [姜万禄, 吴胜强, 张建成 2002 燕山大学学报 **26** 114]
- [12] Li Y, Yang B J, Lin H B, Liu X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1994 (in Chinese) [李月, 杨宝俊, 林红波, 刘晓华 2005 物理学报 **54** 1994]
- [13] Wang K, Guan X P, Ding X F, Qiao J M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6859 (in Chinese) [王坤, 关新平, 丁喜峰, 乔杰敏 2010 物理学报 **59** 6859]
- [14] Jin T, Zhang H 2011 *Sci. Chin. Info. Sci.* **41** 1184 (in Chinese) [金天, 张骅 2011 中国科学: 信息科学 **41** 1184]
- [15] Li Y, Yang B J, Shi Y W 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 526 (in Chinese) [李月, 杨宝俊, 石要武 2003 物理学报 **52** 526]
- [16] Fu Y Q, Wu D M, Zhang L, Li X Y 2011 *Sci. Chin. Inf. Sci.* **54** 1274
- [17] Zhai D Q, Liu C X, Liu Y, Xu Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 816 (in Chinese) [翟笃庆, 刘崇新, 刘尧, 许喆 2010 物理学报 **59** 816]

Study on weak signal detection method with Duffing oscillators*

Liu Hai-Bo[†] Wu De-Wei Jin Wei Wang Yong-Qing

(Information and Navigation Institute, Air Force Engineering University, Xi'an 710077, China)

(Received 28 August 2012; revised manuscript received 16 October 2012)

Abstract

By numerical simulations we find that the Duffing state transition from big-cycle motion to chaotic motion is more suited to weak signal detection. Based on this, in this paper, we propose a new weak periodic signal detection method from the angle of theoretical analysis. The principle of the proposed method is introduced and its feasibility is analyzed. Then, the proposed method and the traditional method are compared and analyzed both in transition zone effect and detection probability, and then a contrast simulation is carried out. The analysis and simulation results both indicate, the Duffing oscillator state transition from big-cycle motion to chaotic motion is affected less by transition zone under the same condition, based on which the proposed detection method possesses better detection capability. The simulation data also show that weak signal detection with Duffing oscillator must be based on unilateral state transition. The frequency difference detection based on intermittent chaos is suited only for the case where the signal-to-noise ratio of the detected signal is relatively high.

Keywords: Duffing, chaos, detection, transition zone

PACS: 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

DOI: 10.7498/aps.62.050501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61174194).

[†] Corresponding author. E-mail: 13992864936@126.com