

## 激光陀螺本征模偏振态与磁敏感特性的理论研究\*

汪之国<sup>†</sup> 龙兴武 王飞 张斌

(国防科技大学光电科学与工程学院光电工程系, 长沙 410073)

(2012年7月11日收到; 2012年10月9日收到修改稿)

环境磁场的干扰是影响激光陀螺精度的重要因素之一. 为了减小二频机械抖动激光陀螺的磁敏感性, 推导了环形腔的琼斯矩阵, 其中考虑了非共面角、增益介质、腔损耗、腔镜反射各向异性和应力双折射, 采用矩阵本征问题求解的摄动理论分析了环形腔的偏振态和磁敏感特性. 研究表明, 为了减小激光陀螺的磁敏感性, 应减小非共面角和腔损耗, 增大腔镜的反射各向异性. 腔镜应力双折射究竟会增大还是减小磁敏感性与应力作用主轴、受应力腔镜的位置有关, 此外它还会引起顺时针和逆时针模式之间的偏振非互易性. 磁敏感性与腔失谐近似成线性关系, 导致激光陀螺工作于增益峰值时磁敏感性并非最小. 这些结果对减小二频机械抖动激光陀螺的磁敏感性具有较好的指导意义.

**关键词:** 激光陀螺, 磁敏感性, 椭圆度, 琼斯矩阵

**PACS:** 42.81.Pa, 42.55.Wd, 42.60.Da

**DOI:** 10.7498/aps.62.054205

## 1 引言

激光陀螺利用环形激光器内顺时针和逆时针一对反向行波的频差来测量角速度, 具有动态范围大、比例因子精确等优点, 可用于航空器、导弹、舰船、卫星等运动体的导航或姿态控制<sup>[1]</sup>. 通过增大激光陀螺的尺寸可使其灵敏度大大增加, 还可用于地震波、固体潮汐效应、相对论效应等的研究<sup>[2-4]</sup>. 在应用中, 环境磁场通过与激光陀螺中增益介质的相互作用而产生误差, 因此磁敏感性是激光陀螺研制和生产中需要解决的一大问题<sup>[5,6]</sup>. 使用导磁材料如坡莫合金做成磁屏蔽室可削弱环境磁场的影响<sup>[7]</sup>, 但单层屏蔽只能达到100倍左右的屏蔽系数. 若要继续增大屏蔽效果, 就要采用多层屏蔽或使用更好的导磁材料, 不可避免地增加了成本、体积和重量. 因此, 最好还是从根本上增强激光陀螺对磁场干扰的免疫力.

激光陀螺有二频机械抖动激光陀螺、四频差动激光陀螺、塞曼激光陀螺等类型, 它们的磁敏感特性各不相同, 本文仅针对应用最为广泛的镀膜反

射镜型二频机械抖动激光陀螺进行分析, 而全反射棱镜激光陀螺<sup>[8]</sup>的磁敏感性还应考虑棱镜玻璃的磁光效应和内应力效应. 对方形腔激光陀螺, Smith分析了非共面导致的磁敏感性随反射镜的相位各向异性的变化规律<sup>[9]</sup>, Martin还进一步考虑了反射镜应力双折射的影响<sup>[10,11]</sup>. 对无源环形谐振腔, Moore分析了非共面度和应力双折射对输出光椭圆度的影响, 提出了消除非共面度的调腔方法<sup>[12]</sup>; Yuan经过分析认为, Moore的方法因未考虑应力双折射对腔内本征模偏振态的影响而应该进行修正<sup>[13]</sup>. 然而, 上述研究存在如下不足: 1) 除Smith给出了近似解析表达式外, 其他研究主要采用数值计算进行分析, 难以清晰展现普遍规律, 尤其是所考虑变量较多的时候; 2) 只是把增益介质唯象地等效为一个法拉第旋光器, 从中体现不出激光陀螺磁敏感性与腔损耗、腔调谐的关系, 而且也未考虑增益介质对有源腔中本征模式椭圆度的影响; 3) 没有综合考虑腔非共面、反射镜各向异性和应力双折射、受到磁场影响的增益介质共同作用时本征模式的椭圆度, 也未给出磁敏感性与椭圆度之间的关系. 本文采用矩阵特征矢量求解的摄动理论, 综合分析

\* 国家自然科学基金(批准号: 61078017)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: maxborn@nudt.edu.cn

了环形谐振腔本征模的偏振特性, 直观地给出了激光陀螺磁敏感性随无源腔和增益介质参量的变化规律, 对降低激光陀螺的磁敏感性具有较好的参考价值.

## 2 理论模型

### 2.1 环形腔的琼斯矩阵模型

我们以图 1 所示的方形腔为例进行分析, 整个腔包括 4 面反射镜  $M_1$ — $M_4$  和增益管, 调腔或安装误差会导致光路存在轻微的非共面, 记面  $M_1M_2M_3$  和面  $M_1M_3M_4$  之间的二面角为  $\beta$ , 记相邻反射镜入射面的二面角为  $\alpha$ . 在现有工艺水平下, 一般  $\alpha < 10^{-4}$ .

激光陀螺谐振腔本征模偏振态和磁敏感性可用  $2 \times 2$  琼斯矩阵来分析<sup>[9-11]</sup>. 设整个环形腔的琼斯矩阵为  $T$ , 其本征值为  $\lambda$ , 本征矢量为  $u$ , 则有

$$Tu = \lambda u, \quad (1)$$

$u$  即为描述光场偏振的琼斯矢量. 激光振荡的自再

现条件要求

$$|\lambda| = 1. \quad (2)$$

当输入角速度为 0 时, 激光陀螺顺时针 (clockwise, CW) 和逆时针 (anti-clockwise, AW) 本征模的谐振频率差为

$$\Delta\nu = \frac{\arg(\lambda_{CW}) - \arg(\lambda_{AW})}{2\pi} \frac{c}{L}, \quad (3)$$

式中,  $c$  为光速,  $L$  为环形腔边长,  $\arg$  表示取幅角, 单位为 rad. 磁场导致的谐振频率差即为磁敏感性的根源.

为了便于分析, 将本征矢量写成  $u = \begin{bmatrix} a + ib \\ c + id \end{bmatrix}$ ,

这里  $a, b, c, d$  为实数. 根据光学原理<sup>[14]</sup>, 记偏振光的椭圆角为  $\chi_P$  ( $-\pi/4 \leq \chi_P \leq \pi/4$ ), 则可推出

$$\sin(2\chi_P) = \frac{2 \times (ad - bc)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \quad (4)$$

当椭圆度  $\varepsilon$  很小时,  $\chi_P \ll 1$ , 近似有  $\chi_P = \tan \chi_P = \sin(2\chi_P)/2$ , 因此椭圆度为

$$\varepsilon = \tan \chi_P = \frac{(ad - bc)}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}, \quad (5)$$

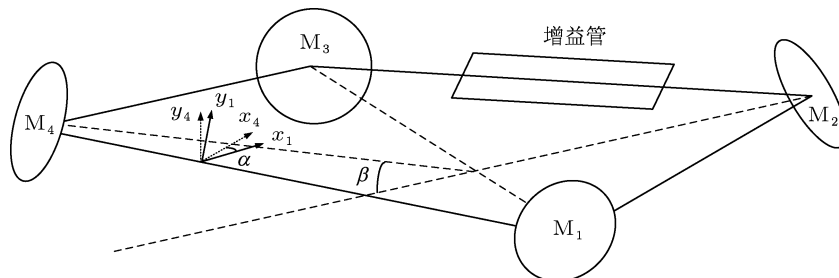


图 1 轻微非共面环形激光谐振腔

### 2.2 磁场作用下增益介质的琼斯矩阵表述

根据激光理论, 介质在电场作用下产生极化, 相对电容率为<sup>[15]</sup>

$$\varepsilon_r = 1 + \chi = 1 + \chi_r + i\chi_i, \quad (6)$$

式中,  $\chi$  为极化率, 下标  $r$  和  $i$  分别表示实部和虚部. 复折射率为

$$\tilde{n} = \sqrt{\varepsilon_r} = \sqrt{1 + \chi_r + i\chi_i} \approx 1 + \frac{1}{2}\chi_r + i\frac{1}{2}\chi_i, \quad (7)$$

记  $n = \chi_r/2$ ,  $\eta = \chi_i/2$ . 光场经过长  $l$  的介质后要乘以如下系数:

$$e^{-iknl} = e^{-iknl} e^{k\eta l}, \quad (8)$$

式中,  $k$  为波数,  $e^{-iknl}$  表示光场相位的变化,  $e^{k\eta l}$  表示光场幅度的变化,  $\eta > 0$  时表示介质提供增益.

激光陀螺的增益介质为 He, Ne 混合气体, 增益曲线为非均匀加宽, 在增益曲线峰值附近, 增益系数为<sup>[16]</sup>

$$k\eta l = G(\nu) = G_0 e^{-\left(\frac{\nu - \nu_0}{0.6\Delta\nu_D}\right)^2} \approx G_0 \left[ 1 - \left(\frac{\nu - \nu_0}{0.6\Delta\nu_D}\right)^2 \right], \quad (9)$$

增益介质引入的相移为

$$knl = -0.282G_0 \sin\left(\frac{\nu - \nu_0}{0.6\Delta\nu_D}\right)$$

$$\approx -0.47G_0 \left( \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \right), \quad (10)$$

式中,  $G_0$  为峰值增益,  $\nu$  为激光频率,  $\nu_0$  为原子发光谱线中心频率,  $\Delta\nu_D$  为多普勒加宽.

增益介质受到纵向磁场作用时, 增益曲线将会发生塞曼分裂, 峰值频率  $\nu_0$  分别向高频和低频移位  $\nu_Z/2$ , 如图 2 所示.

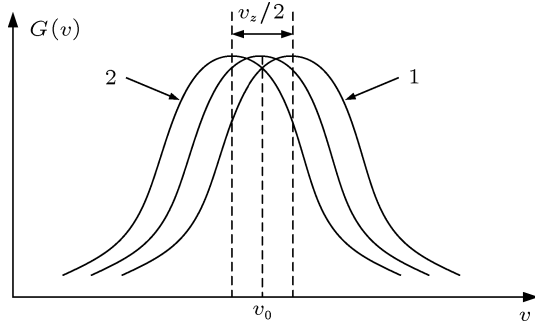


图 2 增益曲线及塞曼分裂

不妨以 CW 方向传播的光束为参考, 若左旋光增益曲线向低频移动, 那么右旋光增益曲线就会向高频方向移动; 而 AW 方向传播的左旋光将向高频移动, 右旋光将向低频移动.

以圆偏振光的琼斯矢量为基矢, 对 CW 和 AW 光来说增益介质的琼斯矩阵分别为

$$\mathbf{G}_{\text{CW}} = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{G}_{\text{AW}} = \begin{bmatrix} K_2 & 0 \\ 0 & K_1 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

式中,  $K_{1,2}$  分别为右旋光和左旋光经过增益介质后乘的系数. 由于在激光陀螺中一圈的增益系数小于 0.03, 由 (8) 式近似得

$$\begin{aligned} K_{1,2} &\approx 1 + k\eta l - iknl \\ &= 1 + G_0 \left[ 1 - \left( \frac{\nu - \nu_0 \mp \nu_Z/2}{0.6\Delta\nu_D} \right)^2 \right] \\ &\quad + i0.47G_0 \left( \frac{\nu - \nu_0 \mp \nu_Z/2}{\Delta\nu_D} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

在直角坐标下, 采用坐标变换公式可将增益介质的琼斯矩阵 (11) 和 (12) 式转换为

$$\mathbf{G}_{\text{CW,AW}} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & \mp i(K_1 - K_2) \\ \pm i(K_1 - K_2) & K_1 + K_2 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

将 (13) 式代入 (14) 式求得

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{\text{CW,AW}} &= A \begin{bmatrix} 1 & \pm S \\ \mp S & 1 \end{bmatrix} \\ &= A\mathbf{I} + AS \begin{bmatrix} 0 & \pm 1 \\ \mp 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (15)$$

式中

$$\begin{aligned} A &= 1 + G_0 \left[ 1 - \frac{\nu_d^2 + (\nu_Z/2)^2}{(0.6\Delta\nu_D)^2} \right] - i0.47G_0 \frac{\nu_d}{\Delta\nu_D}, \\ S &= 0.235G_0 \frac{\nu_Z}{\Delta\nu_D} \left( 1 + i11.8 \frac{\nu_d}{\Delta\nu_D} \right), \end{aligned}$$

$\mathbf{I}$  为  $2 \times 2$  单位矩阵,  $S = D(1 + iB)$ ,  $\nu_d = \nu - \nu_0$  表示腔失谐. 对典型激光陀螺, 磁场强度小于 2 mT 时,  $S$  在  $10^{-5}$  的数量级.

### 2.3 非平面度的影响

在波矢  $\vec{k}$  方向、垂直入射面的  $s$  方向 (垂直入射面) 和入射面中的  $p$  方向 (入射面内) 组成的右手坐标系下, 反射镜的琼斯矩阵为<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \begin{bmatrix} r_s & 0 \\ 0 & -r_p e^{-i\Delta} \end{bmatrix} \\ &= r_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{r_p}{r_s} e^{-i\Delta} \end{bmatrix} = r_s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (16)$$

式中,  $r$  为幅度反射系数, 下标  $s$  和  $p$  分别表示  $s$  和  $p$  方向,  $\Delta$  为反射镜的相位双折射.

在图 1 中, 由于各反射镜的法线不共面, 光线从  $M_4$  传播到  $M_1$  时入射面要以传播方向为轴顺时针转动  $\alpha$ , 即在连续两次镜面反射之间要乘以一个旋转矩阵. 旋转矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{T}(\alpha) &= \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} 1 & -\alpha \\ \alpha & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I} + \alpha \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17)$$

### 2.4 反射镜应力双折射的影响

当反射镜受到应力作用时, 由于弹光效应, 沿应力方向和垂直应力方向的折射率将会不同, 即导致线双折射, 如图 3 所示<sup>[10]</sup>.

应力作用下反射镜的琼斯矩阵可表示为<sup>[10]</sup>

$$\begin{aligned}
 T_S(\rho) &= T(\rho) \begin{bmatrix} e^{i\phi/2} & 0 \\ 0 & e^{-i\phi/2} \end{bmatrix} T(-\rho) = e^{i\phi/2} \begin{bmatrix} \cos \rho & \sin \rho \\ -\sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 - i\phi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \rho & -\sin \rho \\ \sin \rho & \cos \rho \end{bmatrix} \\
 &= e^{i\phi/2} \left\{ I + (-i\phi) \begin{bmatrix} \sin^2 \rho & \sin \rho \cos \rho \\ \sin \rho \cos \rho & \cos^2 \rho \end{bmatrix} \right\}, \quad (18)
 \end{aligned}$$

式中  $\rho$  为应力主轴方向与入射面坐标系之间的夹角,  $e^{i\phi/2}$  和  $e^{-i\phi/2}$  分别为  $x_s$  和  $x_p$  方向应力引入的相位延迟.

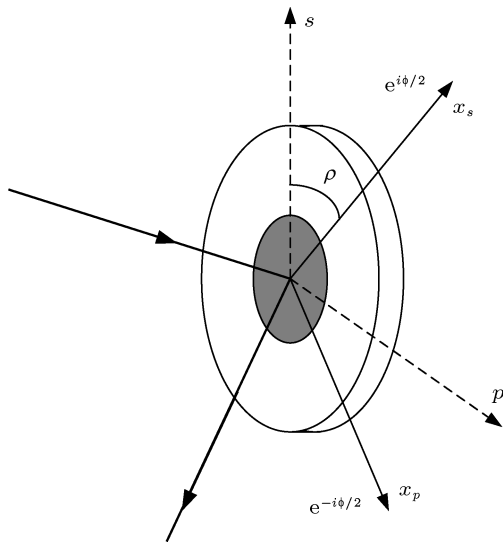


图3 应力双折射

## 2.5 考虑各元件后环形腔自再现的偏振本征模

为简化分析,不妨设所有反射镜的反射矩阵相同,但只有反射镜  $M_4$  的应力双折射为主.选取  $M_1$  和  $M_4$  的中点为参考点,以面  $M_1M_2M_3$  和面  $M_1M_3M_4$  二面角的平分线为  $x$  轴.根据上述分析可写出整个谐振腔顺时针方向的琼斯矩阵为

$$\begin{aligned}
 T_{CW} &= T\left(\frac{\alpha}{2}\right) R_1 T(-\alpha) R_2 T\left(\frac{\alpha}{2}\right) G_{CW} T \\
 &\quad \times \left(\frac{\alpha}{2}\right) R_3 T(-\alpha) R_4 T_S(\rho) T\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (19)
 \end{aligned}$$

逆时针方向的琼斯矩阵为

$$\begin{aligned}
 T_{AW} &= T\left(\frac{\alpha}{2}\right) T_S(-\rho) R_4 T(-\alpha) R_3 T\left(\frac{\alpha}{2}\right) \\
 &\quad \times G_{AW} T\left(\frac{\alpha}{2}\right) R_2 T(-\alpha) R_1 T\left(\frac{\alpha}{2}\right), \quad (20)
 \end{aligned}$$

利用 (19) 和 (20) 式,采用数值计算很容易求出本征值和本征矢量,进而得到环形腔本征模的偏振态以及顺时针和逆时针之间的频率差.但这种方法不够直观,难以体现一般规律.由于非平面度、增益介质、应力双折射的扰动都是小量,可以将这些小量的影响当成微扰采用摄动方法求解.

容易得到理想环形腔的琼斯矩阵为

$$T_0 = Ar_s^4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & P^4 \end{bmatrix}, \quad (21)$$

$Ar_s^4$  与传播方向无关,自再现条件要求它的模为 1,可在下面的分析中将其略去.

根据前述分析可求出 1 阶近似下非共面导致的微扰矩阵为

$$\Delta T_1 = \alpha \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(1-P)^2(1+P^2) \\ -\frac{1}{2}(1-P)^2(1+P^2) & 0 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

增益介质的微扰矩阵为

$$\Delta T_{2CW,AW} = \pm SP^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (23)$$

当应力作用于  $M_4$  时双折射的微扰矩阵为

$$\begin{aligned}
 \Delta T_{3CW} \\
 &= (-i\phi) \begin{bmatrix} \sin^2 \rho & \sin \rho \cos \rho \\ P^4 \sin \rho \cos \rho & P^4 \cos^2 \rho \end{bmatrix}, \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta T_{3AW} \\
 &= (-i\phi) \begin{bmatrix} \sin^2 \rho & -P^4 \sin \rho \cos \rho \\ -\sin \rho \cos \rho & P^4 \cos^2 \rho \end{bmatrix}, \quad (25)
 \end{aligned}$$

总的微扰矩阵  $T_1$  为上述 3 种因素导致的微扰矩阵之和.

需要说明的是,矩阵连乘积一般与各矩阵顺序有关,由 (19) 和 (20) 式可知应力作用于不同反射镜时微扰矩阵一般不同,但可用类似的方法分析不同反射镜所受应力为主的情况.

### 3 理论分析与数值模拟

#### 3.1 矩阵摄动理论

矩阵本征问题的摄动理论已经非常成熟, 下面仅列出简单推导<sup>[17]</sup>. 对  $[\mathbf{T}][\mathbf{u}] = \lambda[\mathbf{u}]$  形式的矩阵本征值问题, 设原始矩阵满足  $[\mathbf{T}_0][\mathbf{u}_i^{(0)}] = \lambda_i^{(0)}[\mathbf{u}_i^{(0)}]$  ( $i = 1, 2, \dots$ ), 且本征矢量是正交归一的. 在非常小的微扰作用下, 新矩阵  $[\mathbf{T}]$  可看做  $[\mathbf{T}_0]$  受到微扰后的矩阵, 即

$$[\mathbf{T}] = [\mathbf{T}_0] + \sigma[\mathbf{T}_1], \quad (26)$$

式中  $\sigma$  为一小量. 根据矩阵摄动理论, 将  $[\mathbf{T}]$  的本征值和本征矢量按  $\sigma$  的幂次展开:

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_i] &= [\mathbf{u}_i^{(0)}] + \sigma[\mathbf{u}_i^{(1)}] + \sigma^2[\mathbf{u}_i^{(2)}] + \dots, \\ \lambda_i &= \lambda_i^{(0)} + \sigma\lambda_i^{(1)} + \sigma^2\lambda_i^{(2)} + \dots, \end{aligned} \quad (27)$$

将 (27) 代入 (26) 式, 并令  $\sigma$  的同幂项相等, 然后利用本征矢量的正交性得到本征矢量的 1 阶摄动解

$$\mathbf{u}_i^{(1)} = \sum_{k \neq i} \frac{1}{\lambda_i^{(0)} - \lambda_k^{(0)}} [\mathbf{u}_k^{(0)}]^T \mathbf{T}_1 [\mathbf{u}_i^{(0)}] [\mathbf{u}_k^{(0)}], \quad (28)$$

本征值的 1 阶摄动解为

$$\lambda_i^{(1)} = [\mathbf{u}_i^{(0)}]^T \mathbf{T}_1 [\mathbf{u}_i^{(0)}], \quad (29)$$

本征值的 2 阶摄动解为

$$\lambda_i^{(2)} = [\mathbf{u}_i^{(0)}]^T (\mathbf{T}_1 - \lambda_i^{(1)} \mathbf{I}) [\mathbf{u}_i^{(1)}]. \quad (30)$$

#### 3.2 琼斯矩阵的摄动求解

由 (21) 式可知, 0 阶本征值分别为 1 和  $P^4$ , 对应的本征矢量分别为

$$\mathbf{u}_1^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_2^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (31)$$

对激光谐振腔, 绝对值大的本征值对应的模式优先起振, 因此我们认为下标为 1 的本征态能够起振, 相应本征矢量的 1 阶解为

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1^{(1)} &= \frac{1}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}} [\mathbf{u}_2^{(0)}]^T \mathbf{T}_1 [\mathbf{u}_1^{(0)}] [\mathbf{u}_2^{(0)}] \\ &= \frac{1}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}} \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{T}_1(2, 1) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (32)$$

本征值的 1 阶解为

$$\lambda_1^{(1)} = [\mathbf{u}_1^{(0)}]^T \mathbf{T}_1 [\mathbf{u}_1^{(0)}] = \mathbf{T}_1(1, 1),$$

本征值的 2 阶解为

$$\begin{aligned} \lambda_1^{(2)} &= [\mathbf{u}_1^{(0)}]^T (\mathbf{T}_1 - \lambda_1^{(1)} \mathbf{I}) [\mathbf{u}_1^{(1)}] \\ &= \frac{1}{\lambda_1^{(0)} - \lambda_2^{(0)}} \mathbf{T}_1(2, 1) \mathbf{T}_1(1, 2). \end{aligned} \quad (33)$$

#### 3.3 非平面度对偏振态的影响

利用上节的分析以及 (22) 和 (32) 式, 可得仅考虑非平面度微扰时的本征矢量为

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1-P}{1+P} \end{bmatrix}, \quad (34)$$

这时顺时针和逆时针方向本征模的椭圆度相同.

通常情况下激光陀螺所用反射镜的幅度和相位各向异性较小. 令  $r_s = r_p + \gamma$ , 将  $P = -\frac{r_p}{r_s} e^{-i\Delta}$  代入 (34) 式并利用  $\sin \Delta \approx \Delta$  求得椭圆度为

$$\varepsilon \approx \alpha \frac{\Delta}{\gamma^2 + \Delta^2}, \quad (35)$$

该式表明: 1) 在  $\gamma$  一定时, 椭圆度随  $\Delta$  的增大先增大, 当  $\Delta \approx \gamma$  时出现拐点, 然后逐渐减小, 因此增大  $\gamma$  或在拐点后增大  $\Delta$  都有利于减小椭圆度. 2)  $\gamma$  和  $\Delta$  不变时, 椭圆度与非平面角  $\alpha$  成正比. 设  $r_p = 0.999$ , 根据 (19) 式利用数值计算得到的精确的椭圆度随反射镜和非共面角的变化规律如图 4 所示, 可见与 (35) 式的结论一致.

#### 3.4 应力双折射对偏振态的影响

采用与上节类似的分析, 可得到仅考虑  $M_4$  存在应力双折射时顺时针方向的本征矢量为

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -i\phi \cdot \frac{P^4 \sin \rho \cos \rho}{1 - P^4} \end{bmatrix}. \quad (36)$$

将  $r_s = r_p + \gamma$ ,  $P = -\frac{r_p}{r_s} e^{-i\Delta}$  代入 (36) 式并略去高阶小量得椭圆度为

$$\varepsilon \approx \Lambda \frac{2 \sin^2(2\Delta) - 4\gamma \cos(4\Delta)}{\Lambda^2 + 4 \sin^2(2\Delta)}, \quad (37)$$

式中  $\Lambda = \phi \frac{\sin 2\rho}{2}$ . 容易看到: 1) 当  $\rho$  为 0 或  $\pi/2$  时, 椭圆度为 0, 表明在 1 阶近似下应力不会影响椭圆度. 2) 当  $\Delta, \gamma \rightarrow 0$  时, 环形腔近似为各向同性腔,  $\varepsilon$  的分母趋于 0, 因而应力对腔内椭圆度有较大影响. 3) 当  $\Delta$  较大时,  $\varepsilon \approx \frac{\Lambda}{2}$ , 即椭圆度与应力双折射成正比. 4) 反射镜的幅度和相位双折射存在特定关

系时, 即  $-2\sin^2(2\Delta) + 4\eta \cos(4\Delta) = 0$  也可以使椭圆度为 0.

用摄动法可求出 1 阶本征值为  $-i\phi \sin^2 \rho$ , 它导致腔损耗增大  $(\phi \sin^2 \rho)^2$ . 实际上应力引入的

额外损耗不应超过增益, 即要求  $(\phi \sin^2 \rho)^2 < G_0$ , 从中估计出  $\phi < 0.1, \Delta < 0.05$ . 为了验证 (37) 式, 设  $\rho = \pi/4$ , 采用数值仿真得到的结果如图 5 所示, 可见与 (37) 式的结论基本一致.

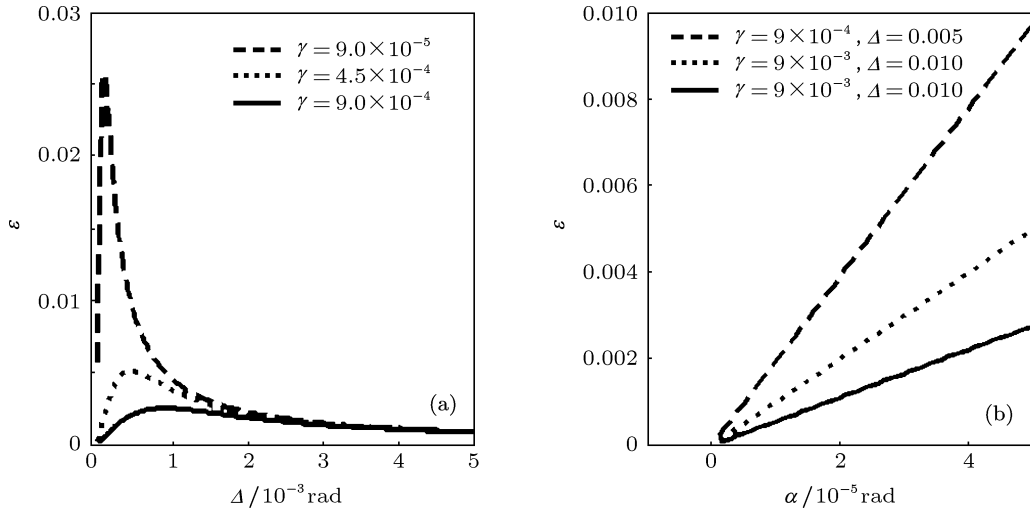


图 4 (a)  $\alpha = 4.8 \times 10^{-6}$  时椭圆度随反射镜参量的变化规律; (b) 不同反射镜参量下椭圆度随非平面度的变化规律

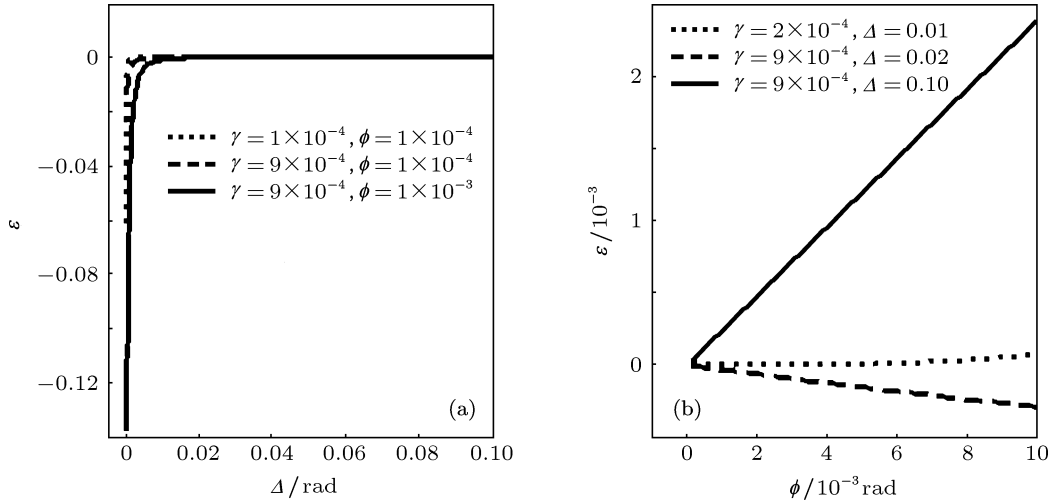


图 5 (a) 不同  $\gamma$  和  $\phi$  时椭圆度随  $\Delta$  的变化; (b) 不同反射镜参量下椭圆度随应力相移的变化对逆时针方向的本征矢量可做类似分析

### 3.5 增益介质对偏振态的影响

仅考虑增益介质微扰时顺时针方向矩阵的本征矢量为

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{D(1+iB)P^2}{1-P^4} \end{bmatrix}, \quad (38)$$

1 阶本征值为 0.

将  $r_s = r_p + \gamma, P = -\frac{r_p}{r_s} e^{-i\Delta}$  代入 (38) 式求得椭圆度为

$$\epsilon \approx D \frac{\sin(2\Delta) - 2\gamma B \cos(2\Delta)}{2\sin^2(2\Delta) + 8\gamma^2}. \quad (39)$$

(39) 式表明: 1) 增益介质的塞曼效益会影响椭圆度, 反射镜的幅度和相位双折射越大, 增益介质对椭圆度的影响越小. 当  $\Delta, \gamma \rightarrow 0$  时, 椭圆度变化

比较剧烈,这是因为增益介质和反射镜各向异性数量级相同时,椭圆度对它们的变化非常敏感. 2)  $\Delta$  和  $\gamma$  越大,椭圆度越小,这时腔内模式的椭圆度主要由无源腔决定. 3) 当  $\Delta$  和  $\gamma$  确定后,椭圆度与峰值增益成正比. 4)  $\Delta$  较大时,且激光模式频率位于增益曲线中心时  $B = 0$ ,  $\varepsilon \rightarrow \frac{D}{4\Delta}$ . 数值仿真结果如图 6 所

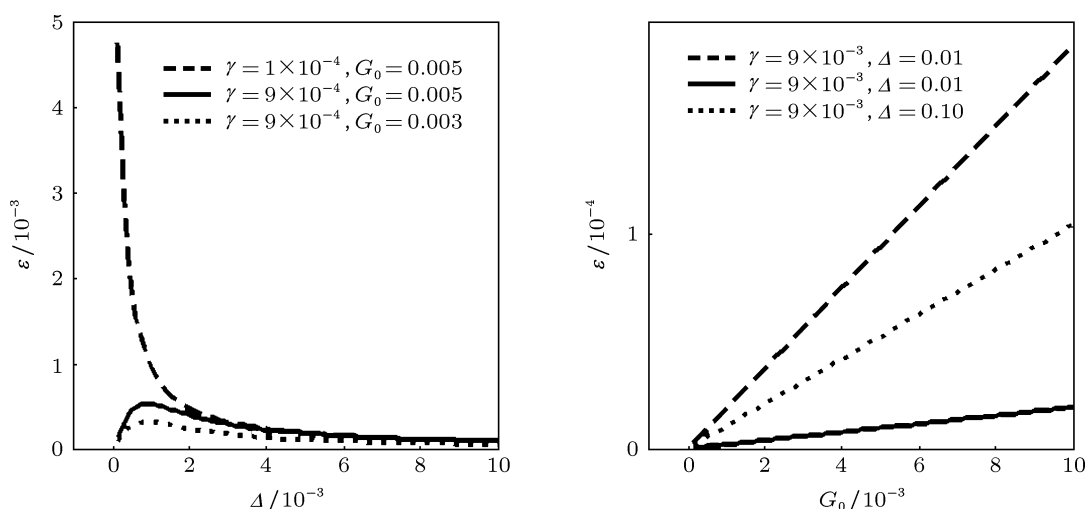


图 6 磁场为 0.1 mT 时椭圆度随增益和反射镜参量的变化规律

$$\mathbf{u}_1 = \left[ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{-D(1+iB)P^2}{1-P^4} - i\phi \cdot \frac{P^4 \sin \rho \cos \rho}{1-P^4} - \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1-P}{1+P} \end{array} \right]. \quad (40)$$

由 (40) 式易知总的椭圆度是 3 项微扰引起的椭圆度之和,由于这 3 项可以同号也可以反号,总椭圆度有可能比单项微扰引起的椭圆度小. 对实际反射镜,  $\Delta$  在 0.01 的量级,  $\gamma$  在 0.001 量级,将 (40) 式代入 (5) 式并略去高阶小量,求得顺时针方向模式椭圆度近似为

$$\varepsilon_{\text{CW}} \approx \frac{D}{4\Delta} + \frac{\alpha}{\Delta} + \frac{\Lambda}{2}, \quad (41)$$

类似可得逆时针方向模式的椭圆度为

$$\varepsilon_{\text{AW}} \approx \frac{D}{4\Delta} + \frac{\alpha}{\Delta} - \frac{\Lambda}{8}, \quad (42)$$

可见应力双折射导致 CW 和 CCW 光的椭圆度不同.

将微扰矩阵代入 (29) 和 (30) 式,可求出 1 阶和 2 阶本征值. 发现 0 阶和 1 阶本征值不含磁场强度,因此对磁敏感性没有影响. 顺时针模式的 2 阶本

示,可见与 (38) 式的结论基本一致.

### 3.6 总的琼斯矩阵分析及激光陀螺的磁敏感性

在一阶近似下,同时考虑 3 种微扰时顺时针方向模式总的本征矢量为

征值为

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{\text{CW}} &= [\mathbf{u}_1^{(0)}]^\text{T} [\mathbf{T}_{1\text{CW}} - \lambda_1^{(1)} \mathbf{I}] [\mathbf{u}_1^{(1)}] \\ &= \frac{1}{1-P^4} \mathbf{T}_{1\text{CW}}(1,2) \mathbf{T}_{1\text{CW}} \\ &= \frac{-1}{1-P^4} \left[ SP^2 + \frac{\alpha}{2} (1-P)^2 (1+P^2) - i\Lambda \right] \\ &\quad \times \left[ SP^2 + \frac{\alpha}{2} (1-P)^2 (1+P^2) + iP^4 \Lambda \right], \quad (43) \end{aligned}$$

类似可得逆时针模式的 2 阶本征值

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_{\text{AW}} &= \frac{-1}{1-P^4} \left[ SP^2 - \frac{\alpha}{2} (1-P)^2 (1+P^2) - iP^4 \Lambda \right] \\ &\quad \times \left[ SP^2 - \frac{\alpha}{2} (1-P)^2 (1+P^2) + i\Lambda \right]. \quad (44) \end{aligned}$$

磁敏感性与本征值中含  $S$  的项有关. 当  $|\Delta\lambda_{\text{CW,AW}}| \ll 1$  时,容易证明 CW 和 AW 方向光在环形腔中传播一圈所经历的相移差与  $\Delta\lambda_{\text{CW,AW}}$  的虚部近似成正比. 因此磁场导致的频率差近似为

$$\Delta\nu = \frac{c}{L} \frac{1}{2\pi} \text{Im}(\Delta\lambda_{\text{CW}} - \Delta\lambda_{\text{AW}}). \quad (45)$$

将 (43) 和 (44) 式代入 (45) 式得

$$\Delta v = \frac{c}{L} \frac{1}{2\pi} \operatorname{Im} \left[ 2SP^2 \left( i\Lambda - \alpha \frac{1-P}{1+P} \right) \right]. \quad (46)$$

当  $\Delta$  较大时, (46) 式近似为

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{c}{\pi L} D \left[ \left( \frac{\Lambda}{2} + \frac{\alpha}{\Delta} \right) + 4\Delta B \left( \frac{\Lambda}{2} + \frac{5\alpha}{4\Delta} \right) \right] \\ &\approx \frac{c}{\pi L} D (1 + 4\Delta B) \left( \frac{\Lambda}{2} + \frac{\alpha}{\Delta} \right). \end{aligned} \quad (47)$$

比较 (41), (42) 和 (47) 可知:

1) 当激光陀螺工作于峰值增益且反射镜不存在应力时, 磁敏感性与无源腔本征模的椭圆度成正比, 且磁敏感性正比于非平面角, 反比于反射镜相位双折射. 当反射镜  $M_4$  存在应力双折射时, 磁敏感性与 CW 方向的椭圆度成正比.

2) (47) 式中的  $B$  与腔失谐有关, 即腔失谐对磁敏感性有一定的影响, 因而增益峰值并非磁敏感最小的位置.

3)  $\Lambda$  的正负号与应力主轴有关, 因此应力双折射有时会抵消非平面度的影响, 因此应力究竟是增大还是减小磁敏感度与应力作用方向有关.

4) 通过增大反射镜的相位双折射  $\Delta$  可以减小非平面度导致的磁敏感性.

## 4 结论

利用矩阵本征问题求解的摄动方法讨论了方

形腔激光陀螺本征模的椭圆度以及磁敏感性随腔非平面度、反射镜各向异性和应力双折射、增益等参量的变化规律, 得到的近似表达式与数值仿真结果基本一致. 发现:

1. 非共面度导致的椭圆度和磁敏感度成正比, 在调腔时顺、逆时针本征模椭圆度相同即可认为非平面度为 0, 这也是专利<sup>[12]</sup>的理论依据. 反射镜各向异性越大, 腔非共面度导致的椭圆度和磁敏感度都越小.

2. 反射镜应力双折射与应力主轴有关, 应力主轴与入射面平行或垂直时可忽略应力双折射对椭圆度和磁敏感性的影响. 而且应力作用于不同反射镜时, 对腔内同一参考点的影响一般不同. 更重要的是, 应力双折射导致顺、逆时针方向本征模椭圆度一般不同, 即使调腔时顺、逆方向椭圆度相同也不能保证腔完全共面, 因此应尽量避免反射镜受到应力.

3. 其他条件相同时, 腔损耗越小, 磁敏感性也越小, 因此减小腔损耗有利于减小磁敏感性. 激光陀螺腔调谐时磁敏感性有一定的变化.

采用矩阵摄动理论可得到近似解析式, 与其他文献采用的数值法相比, 能够体现出更直观的规律, 例如磁敏感性与无源腔偏振度的关系. 此外, 本文还分析了增益参量和腔失谐对磁敏感性的影响. 这些结果对减小二频机械抖动激光陀螺的磁敏感性具有较好的指导意义.

- 
- [1] Xu G Z 1995 *Handbook of Inertial Technology* (Beijing: China Astronautic Publishing House) (in Chinese) [许国祯 1995 惯性技术手册 (北京: 宇航出版社)]
- [2] Stedman G E 1997 *Rep. Prog. Phys.* **60** 615
- [3] Schreiber K U, Klügel T, Wells J P R, Burst R B, Gebauer A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 173904
- [4] Schreiber K U, Gebauer A, Wells J P R 2012 *Opt. Lett.* **37** 1925
- [5] Chen L F, Han Z H, Chen Y, Wang J L, Ji C P 2006 *Acta Photonica Sinica* **35** 974 (in Chinese) [陈林峰, 韩宗虎, 陈勇, 王金林, 吉翠萍 2006 光子学报 **35** 974]
- [6] Zhao Z X 2006 *Master Dissertation* (Changsha: National University of Defense Technology) (in Chinese) [赵政鑫 2006 硕士学位论文 (长沙: 国防科技大学)]
- [7] Zhang Y L 2006 *Master Dissertation* (Xi'an: Northwestern Polytechnical University) (in Chinese) [张雅丽 2006 硕士学位论文 (西安: 西北工业大学)]
- [8] Yao C K, Zeng X D, Cao C Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 094216 (In Chinese) [姚呈康, 曾晓东, 曹长庆 2012 物理学报 **61** 094216]
- [9] Smith D A 1983 *Proc. of SPIE* **412** 229
- [10] Martin G J 1984 *Proc. of SPIE* **478** 110
- [11] Martin G J 1984 *Proc. of SPIE* **487** 94
- [12] Moore R H, Durance D U. S. Patent 4 850 708 [1989-07-25]
- [13] Yuan J, Long X W, Zhang P F, Wang Y, Chen M X, Yang H D, Kang Z L 2011 *Proc. of SPIE* **8171** 81710A
- [14] Born M, Wolf E 2003 *Principles of Optics* (7th Ed.) (London: Cambridge University Press) p28
- [15] Zhou B K, Gao Y Z, Chen T R, Chen J H 2000 *Laser Principle* (Fourth Edition) (Beijing: National Defence Industry Press) p130 (in Chinese) [周炳琨, 高以智, 陈倜嵘, 陈家骅 2000 激光原理 (第四版) (北京: 国防工业出版社) 第 130 页]
- [16] Bennett W R, Jr. 1962 *Appl. Opt.* **1** 24
- [17] Cui T J, Liang C H 1995 *Journal of China Institute of Communications* **16** 103 (in Chinese) [崔铁军, 梁昌洪 1995 通信学报 **16** 103]



# Theoretical analysis of polarization eigenstate and magnetic sensitivity in a ring laser gyro\*

Wang Zhi-Guo<sup>†</sup> Long Xing-Wu Wang Fei Zhang Bin

(Department of Opto-Electronic Engineering, College of Opto-Electronic Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 11 July 2012; revised manuscript received 9 October 2012)

## Abstract

Disturbance by ambient magnetic field is an important factor, which leads to measurement error of the laser gyro. In order to reduce the magnetic sensitivity, the polarization eigenstate in ring cavity is analyzed with matrix perturbation method, considering factors of small nonplanarity, mirror anisotropy and stress birefringence, gain and so on. The main factors affecting the magnetic sensitivity of the laser gyro are discussed. Ellipticities of eigen modes in clockwise and anti-clockwise direction caused by nonplanarity are identical and both are proportional to magnetic sensitivity. The influence of stress birefringence on ellipticity is related to mirror position, propagating direction of eigenmodes and main axis of stress. Nonplanarity is zero when ellipticities of eigen modes in clockwise and anti-clockwise direction are equal without stress birefringence in the passive cavity. A lower cavity loss is better to reduce the magnetic sensitivity of the laser gyro. The minimum magnetic sensitivity is not identical with peak gain for the laser gyro. Large phase and amplitude anisotropies of mirrors are useful to reduce magnetic sensitivity and ellipticity. These findings are significant for the reduction of magnetic sensitivity in ring laser gyros.

**Keywords:** ring laser gyro, magnetic sensitivity, ellipticity, Jones matrix

**PACS:** 42.81.Pa, 42.55.Wd, 42.60.Da

**DOI:** 10.7498/aps.62.054205

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61078017).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: maxborn@nudt.edu.cn