

F- 函数扩展法求解超介质中的亮孤子和暗孤子*

庄彬先 郭琚 项元江 戴小玉 文双春†

(湖南大学信息科学与工程学院, 微纳光电器件及应用教育部重点实验室, 长沙 410082)

(2012年7月9日收到; 2012年10月16日收到修改稿)

利用 F- 函数扩展法求解超介质中的超短脉冲传输方程, 探讨了超介质中的反常自陡效应和特有的二阶非线性色散效应所导致的新的孤子现象和规律. 结果表明, 正折射区的二阶非线性色散效应可以代替线性色散效应形成亮孤子; 正、负折射区的反常自陡效应由于其符号可改变, 从而可在特定条件下分别在反常色散和正常色散区形成有别于常规介质的亮、暗孤子; 反常自陡效应的符号或者反常自陡效应和三阶线性色散效应的相互比较关系能够控制亮、暗孤子中心的漂移方向.

关键词: 孤子, 超介质, F- 函数扩展法

PACS: 42.25.Bs, 42.65.Tg

DOI: 10.7498/aps.62.054207

1 引言

光孤子是指能在具有色散和衍射效应的非线性介质中稳定传播的局域化电磁波 (localized electromagnetic waves), 它的形成是非线性光学中一种非常优美的物理过程. 光孤子存在于大量非线性光学系统中, 从低维到高维、从连续到非连续、从局域到非局域、从相干到非相干等^[1]. 最近几年, 一种全新的人工合成电磁材料——超介质 (metamaterial) 因具有许多天然物质所不具有的特性, 如负折射、亚波长分辨率成像、电磁隐身等而引起了全世界众多领域的研究者的兴趣. 已有的研究表明, 超介质具有独特而丰富的线性和非线性电磁特性, 就孤子形成和传播的物理环境和条件而言, 预示着它蕴含着大量的孤子现象和物理; 同时, 超介质的电磁特性可以人为设计, 这又为主动操控孤子提供了条件和手段. 因此, 超介质激发了众多孤子物理研究者的兴趣, 自 2003 年以来, 已有很多关于超介质中的光学孤子的研究报道, 发现了许多新的孤子现象和规律^[2-10]. 例如, Kivshar 小组^[2,3] 证明将超介质单元嵌入常规非线性介质构成的复合材料具有非线性电磁响应, 他们预言在非线性超介质

中存在 TE 和 TM 极化的空间孤子. Zharova 等^[4] 发现通过调节入射电磁波的强度可改变超介质的传输特性并可观察到时空电磁孤子的产生. Scalora 等^[5,6] 发现在非线性 Kerr 型和二阶非线性负折射率超介质中均有可能存在带隙孤子, 他们并推导出了超短脉冲在具有非线性极化的负折射介质中的非线性传输方程, 指出在负折射介质中能够实现新型孤波解^[7]. Lazarides 等人发现由非线性开口环谐振腔的离散阵列构成的一维超介质中存在离散呼吸子^[8]. Zhang 小组发现在由金属和非线性介质薄片构成的纳米尺度周期性结构非线性超介质中存在可见光和近红外亚波长离散孤子^[9]. Tassin 等人指出负折射介质导致的负衍射系数对谐振腔中的耗散孤子 (dissipative solitons) 的传输有重要影响^[10]. 文双春等人在超介质中的孤子产生和传输方面也做出一些工作^[11-17], 包括建立了超介质中超短电磁脉冲非线性传输的理论模型, 证明通过调控超介质的构成单元可调控光波的反常自陡效应, 从而达到操控光波的调制不稳定性 and 孤子传播的目的. Yang 等研究了超介质中的灰孤子解^[18]和亮、暗孤子同时在超介质中传输时的组合孤子解^[19]; 最近他们还讨论了超介质中亮、暗孤子间的相互作用, 发现通过调节三阶色散和自陡

* 国家自然科学基金 (批准号: 10974049) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: scwen@hnu.edu.com

峭系数可以在一定程度上抑制负折射介质中亮、暗孤波间的相互作用^[20].

本文利用 F-函数扩展法求解超介质中的孤子脉冲传输方程, 试图建立超介质中各种复杂的线性和非线性特性参数之间的关联与亮孤子和暗孤子产生和传输特性之间的定量关系. 通过在不同条件下得到的亮孤子和暗孤子解, 系统地探讨了超介质中的反常自陡效应和特有的二阶非线性色散效应所导致的新的孤子现象和规律.

2 超介质中孤子脉冲的传输方程及 F-函数扩展法

超介质中孤子脉冲传输满足如下方程^[7,11-13,21,22]:

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{ia}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + b \frac{\partial^3 u}{\partial t^3} + i \left[|u|^2 u - p|u|^4 u + is_1 \frac{\partial}{\partial t} (|u|^2 u) - s_2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} (|u|^2 u) \right], \quad (1)$$

其中 $u(z, t)$, t , z 分别表示归一化脉冲振幅、时间和传输距离, $a = \pm 1$ 分别表示正常和反常群速度色散, b, p, s_1, s_2 分别表示三阶线性色散系数, 赝五阶非线性系数, 自陡系数和二阶非线性色散系数.

当用 Drude 模型描述超介质的介电常数和磁导率时^[7,11-13,22,23], 在正折射区域内, 只有反常群速度色散, 而三阶线性色散、赝五阶非线性和二阶非线性色散系数恒为正, 自陡系数可正可负; 在负折射区域内, 正常和反常群速度色散都有可能, 而三阶线性色散系数恒为正, 赝五阶非线性系数应恒为负, 自陡系数和二阶非线性色散系数则可正可负.

调制不稳定性是亮孤子或暗孤子存在的先兆^[23]. 戴小玉等^[21] 研究了三阶线性色散效应不存在时方程 (1) 的调制不稳定性, 由于三阶线性色散效应不影响调制不稳定性^[24], 即调制不稳定性产生的条件为

$$(a + 2s_2 I_0)(a + 6s_2 I_0) \Omega^2 + 4(a + 2s_2 I_0)(I_0 - 2pI_0^2) + 4s_1^2 I_0^2 < 0. \quad (2)$$

因此据此有下述推断: 1) 在反常色散情形时, 负的自陡系数和正的二阶非线性色散系数预示正折射区存在亮孤子, 负的自陡系数和负的二阶非线性色散系数预示负折射区存在亮孤子; 2) 在正常色散情形时, 正的自陡系数和正的二阶非线性色散系数预示负折射区存在暗孤子; 3) 在零色散情形时,

正的二阶非线性色散系数预示正折射区存在亮孤子, 负、正的二阶非线性色散系数预示负折射区分别存在亮孤子和暗孤子. 这里用 F-函数扩展法^[25] 寻找方程 (1) 的这些亮、暗孤子解.

令方程 (1) 的行波解形式

$$u(z, t) = Q(\xi) e^{i(kz - wt)}, \quad (3)$$

其中 $\xi = t - \lambda z$, $Q(\xi)$ 是实函数, k, w, λ 是常数. 将 (3) 式代入方程 (1), 由方程实部和虚部得到方程组

$$\begin{aligned} (\lambda - aw - 3bw^2)Q_\xi + bQ_\xi \xi \xi \\ + (-3s_1 - 6ws_2)Q^2 Q_\xi = 0, \quad (4) \\ C_1 Q + (a/2 + 3bw)Q_\xi \xi + C_2 Q^3 + pQ^5 \\ + 6s_2 Q Q_\xi^2 + 3s_2 Q^2 Q_\xi \xi = 0, \quad (5) \end{aligned}$$

其中 $C_1 = k - aw^2/2 - bw^3$, $C_2 = -1 - s_1 w - s_2 w^2$.

令方程组 (4), (5) 的解的形式为

$$Q(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^n A_i F^i(\xi), \quad (6)$$

$$F_\xi^2 = b_0 + b_2 F^2(\xi) + b_4 F^4(\xi), \quad (7)$$

其中 A_i ($i = 0, 1, \dots, n$) 和 b_0, b_2, b_4 都是常数, 且方程 (7) 有如下解:

$$\begin{aligned} F(\xi) = \sqrt{-b_2/b_4} \operatorname{sech}(\sqrt{b_2} \xi), \\ b_0 = 0, b_2 > 0, b_4 < 0, \quad (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(\xi) = \sqrt{-b_2/(2b_4)} \tanh(\sqrt{-b_2/2} \xi), \\ b_0 = b_2^2/(4b_4), b_2 < 0, b_4 > 0. \quad (9) \end{aligned}$$

将方程 (6), (7) 代入方程 (4), (5), 平衡 Q^5, QQ_ξ^2 和 $Q^2 Q_\xi \xi$, 得 $n = 1$, 且有

$$\begin{aligned} (fA_1 + \lambda A_1 + hA_0^2 A_1 + bA_1 b_2) \\ + 2hA_0 A_1^2 F + (hA_1^3 + 6bA_1 b_4)F^2 = 0, \quad (10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pA_0^5 + A_0 C_1 + A_0^3 C_3 + 2A_0 A_1^2 b_0 C_4 + (5pA_0^4 A_1 + A_1 C_1 \\ + A_1 b_2 C_2 + 3A_0^2 A_1 C_3 + 2A_1^3 b_0 C_4 + A_0^2 A_1 b_2 C_4)F \\ + (10pA_0^3 A_1^2 + 3A_0 A_1^2 C_3 + 4A_0 A_1^2 b_2 C_4)F^2 \\ + (10pA_0^2 A_1^3 + 2A_1 b_4 C_2 + A_1^3 C_3 + 3A_1^3 b_2 C_4 \\ + 2A_0^2 A_1 b_4 C_4)F^3 + (5pA_0 A_1^4 + 6A_0 A_1^2 b_4 C_4)F^4 \\ + (pA_1^5 + 4A_1^3 b_4 C_4)F^5 = 0. \quad (11) \end{aligned}$$

令方程 (10), (11) 式中的常数项与 F 的各项幂系数为零, 得到下列方程组:

$$\begin{aligned} -awA_1 - 3bw^2 A_1 + \lambda A_1 + (-3s_1 - 6ws_2)A_0^2 A_1 \\ + bA_1 b_2 = 0, \quad (12) \end{aligned}$$

$$2(-3s_1 - 6ws_2)A_0A_1^2 = 0, \quad (13)$$

$$(-3s_1 - 6ws_2)A_1^3 + 6bA_1b_4 = 0, \quad (14)$$

$$pA_0^5 + A_0(k - aw^2/2 - bw^3) + A_0^3(-1 - s_1w - s_2w^2) + 6A_0A_1^2b_0s_2 = 0, \quad (15)$$

$$5pA_0^4A_1 + A_1(k - aw^2/2 - bw^3) + A_1b_2(a/2 + 3bw) + 3A_0^2A_1(-1 - s_1w - s_2w^2) + 6A_1^3b_0s_2 + 3A_0^2A_1b_2s_2 = 0, \quad (16)$$

$$10pA_0^3A_1^2 + 3A_0A_1^2(-1 - s_1w - s_2w^2) + 12A_0A_1^2b_2s_2 = 0, \quad (17)$$

$$10pA_0^2A_1^3 + 2A_1b_4(a/2 + 3bw) + A_1^3(-1 - s_1w - s_2w^2) + 9A_1^3b_2s_2 + 6A_0^2A_1b_4s_2 = 0, \quad (18)$$

$$5pA_0A_1^4 + 18A_0A_1^2b_4s_2 = 0, \quad (19)$$

$$pA_1^5 + 12A_1^3b_4s_2 = 0. \quad (20)$$

3 亮孤子和暗孤子解

求解上述方程组 (12)—(20), 可得到方程 (1) 在不同情况下的孤子解.

3.1 正折射区的孤子

3.1.1 反常色散区

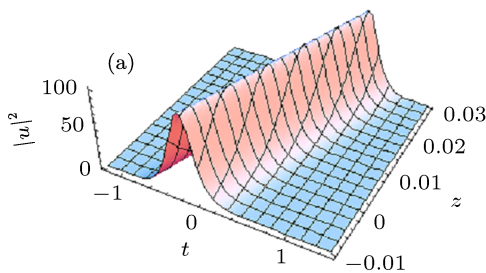
1) 当 $b = 0, p = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, 2k + w^2 \geq 0$ 时, 有

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \sqrt{-b_4},$$

$$Q = \sqrt{2k + w^2} \operatorname{sech}[\sqrt{w^2 + 2k}(t + wz)],$$

则有亮孤子解

$$u(z, t) = \sqrt{2k + w^2} \operatorname{sech}[\sqrt{w^2 + 2k}(t + wz)]$$



$$\times e^{i(kz - wt)}. \quad (21)$$

这种情况下方程 (1) 退化为标准非线性薛定谔方程, 解 (21) 就是标准非线性薛定谔方程的经典亮孤子解.

2) 当 $b > 0, p = 0, s_1 < 0, s_2 = 0, \frac{64kb^3s_1^3 - b(2b + s_1)^2(2b - s_1)}{(6b + s_1)b} \leq 0$ 时, 有

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \sqrt{2bb_4/s_1},$$

$$Q = \sqrt{2b(2k + w^2 - 2bw^3)/[(6bw - 1)s_1]} \times \operatorname{sech}(\sqrt{(2k + w^2 - 2bw^3)/(1 - 6bw)}\xi),$$

则有亮孤子解

$$u(z, t) = \sqrt{\frac{2b}{s_1} \frac{2k + w^2 - 2bw^3}{-1 + 6bw}} \times \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{2k + w^2 - 2bw^3}{-1 + 6bw}}\xi\right) \times e^{i(kz - wt)}, \quad (22)$$

其中 $w = (2b + s_1)/(4bs_1), \lambda = 2b(2b + s_1 + 2ks_1^3)/[(6b + s_1)s_1^2]$. 正的三阶线性色散系数以及负的自陡系数使超介质在反常色散时具有亮孤子解. 亮孤子的中心漂移由参数 λ 的符号决定. 当自陡系数趋于零时, 三阶线性色散系数使得 λ 大于零, 亮孤子的中心向脉冲后沿方向漂移. 对固定的 k , 若自陡系数满足 $\max\{|s_1 + 2ks_1^3|/2, |s_1|/6\} < b$ 或 $\min\{|s_1 + 2ks_1^3|/2, |s_1|/6\} > b$, 亮孤子的中心向脉冲后沿方向漂移 ($\lambda > 0$) (见图 1(a)); 若自陡系数满足 $|s_1|/6 < b < |s_1 + 2ks_1^3|/2$ 或 $|s_1 + 2ks_1^3|/2 < b < |s_1|/6$, 亮孤子的中心向脉冲前沿方向漂移 ($\lambda < 0$) (见图 1(b)).

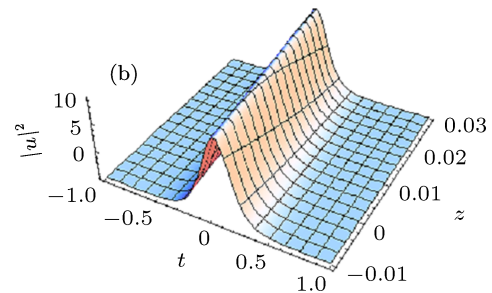


图 1 正折射区反常色散情形亮孤子的强度分布 (其中, $k = 1$) (a) $b = 0.1, S_1 = -0.05$; (b) $b = 0.1, S_1 = -0.5$

3) 当 $b=0, p>0, s_2>0, -p+12s_2-12s_2^2w^2 \geq 0$ 时, 有

$$A_0=0, \quad A_1 = \sqrt{-\frac{12b_4s_2}{p}},$$

$$Q = \sqrt{\frac{-p+12s_2-12s_2^2w^2}{9ps_2}}$$

$$\times \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{-p+12s_2-12s_2^2w^2}{108s_2^2}}\xi\right],$$

则有亮孤子解

$$u(z,t) = \sqrt{\frac{-p+12s_2-12s_2^2w^2}{9ps_2}}$$

$$\times \operatorname{sech}\left[\sqrt{\frac{-p+12s_2-12s_2^2w^2}{108s_2^2}}\xi\right]$$

$$\times e^{i(kz-wt)}, \quad (23)$$

其中

$$\lambda = s_1/(2s_2), \quad w = -s_1/(2s_2),$$

$$k = (-120w^2s_2^2 - p + 12s_2)/(216s_2^2).$$

正的贗五阶非线性系数以及正的二阶非线性色散系数使超介质在反常色散时具有亮孤子解. 亮孤子的中心漂移决定于参数 λ 的符号, 即由自陡系数 s_1 符号决定, 正的自陡系数使脉冲向后沿方向漂移 (见图 2(a)); 负的自陡系数使脉冲向前沿方向漂移 (见图 2(b)).

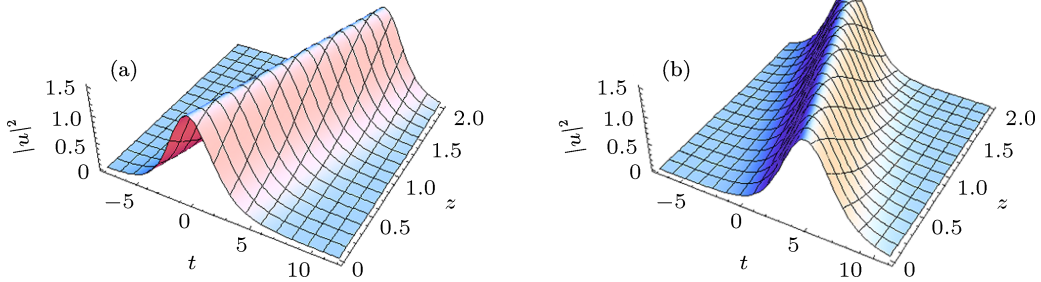


图 2 正折射区反常色散情形亮孤子的强度分布 (其中, $p=0.1, s_2=0.08$) (a) $s_1=0.5$; (b) $s_1=-0.5$

4) 当 $b>0, p>0, s_2>0, -p+12s_2-24s_1s_2w-60s_2^2w^2 \geq 0$ 时, 有

$$A_0=0, \quad A_1 = \sqrt{-12b_4s_2/p},$$

$$Q = \sqrt{\frac{-p+12s_2-24s_2s_1w-60s_2^2w^2}{9ps_2}}$$

$$\times \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{-p+12s_2-24s_2s_1w-60s_2^2w^2}{108s_2^2}}\xi\right),$$

则有亮孤子解

$$u(z,t) = \sqrt{\frac{-p+12s_2-24s_1s_2w-60s_2^2w^2}{9ps_2}}$$

$$\times \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{-p+12s_2-24s_1s_2w-60s_2^2w^2}{108s_2^2}}\xi\right)$$

$$\times e^{i(kz-wt)}, \quad (24)$$

其中

$$\lambda = -w + 3bw^2 - b(-p + 12s_2 - 24s_1s_2w$$

$$- 60s_2^2w^2)/(108s_2^2),$$

$$w = \frac{-6s_1s_2 - bp}{12s_2^2},$$

$$k = -\frac{(ap + 12s_2 - 24s_2s_1w - 60s_2^2w^2)(a/2 + 3bw)}{108s_2^2}$$

$$+ aw^2/2 + bw^3.$$

正的三阶线性色散系数、正的贗五阶非线性系数以及正的二阶非线性色散系数使超介质在反常色散时具有亮孤子解.

3.1.2 零色散区

1) 当 $b=0, p>0, s_1=0, s_2>0$ 时, 有

$$A_0=0, \quad A_1 = \sqrt{-12b_4s_2/p},$$

$$Q = \sqrt{4/(3p)}\operatorname{sech}[\sqrt{1/(9s_2)}t],$$

则有亮孤子解

$$u(z,t) = \sqrt{4/(3p)}\operatorname{sech}[\sqrt{1/(9s_2)}t], \quad (25)$$

超介质的二阶非线性色散效应充当了线性色散的作用。

2) 当 $p > 0, s_2 > 0, 1 - 2s_1w - 5s_2w^2 > 0$ 时, 有

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \sqrt{-\frac{12b_4s_2}{p}},$$

$$Q = \sqrt{\frac{4 - 8s_1w - 20s_2w^2}{3p}}$$

$$\times \operatorname{sech}\left(\sqrt{\frac{1 - 2s_1w - 5s_2w^2}{9s_2}}\xi\right),$$

则有亮孤子解

$$u(z, t) = \sqrt{(4 - 8s_1w - 20s_2w^2)/(3p)}$$

$$\times \operatorname{sech}\left(\sqrt{(1 - 2s_1w - 5s_2w^2)/(9s_2)}\xi\right)$$

$$\times e^{i(kz - wt)}, \quad (26)$$

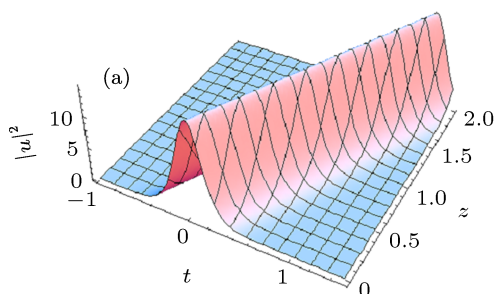
其中

$$k = -bw(2 - 4s_1w - 10s_2w^2)/(6s_2)$$

$$+ aw^2/2 + bw^3,$$

$$w = (-6s_1s_2 - bp)/(12s_2^2),$$

$$\lambda = b(-1 + 2s_1w + 32s_2w^2)/(9s_2).$$



正的赝五阶非线性系数以及正的二阶非线性色散效应使得超介质在零色散时具有亮孤子解。

3.2 负折射区的孤子

3.2.1 反常色散区

1) 当 $b = 0, p = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, 2k + w^2 \geq 0$ 时, 亮孤子解形式与解 (21) 相同。

2) 当 $b > 0, p = 0, s_1 < 0, s_2 = 0, \frac{64kb^3s_1^3 - b(2b - as_1)^2(2b + as_1)}{(6b - as_1)b} \leq 0$ 时, 亮孤子解形式同于解 (22)。

正的三阶线性色散系数以及负的自陡系数使超介质在反常色散时具有亮孤子解, 与正折射区反常色散情形的孤子形成条件相同。

(3) 当 $b = 0, p < 0, s_2 < 0, -p + 12s_2 - 12s_2^2w^2 \geq 0$ 时, 亮孤子解形式同于解 (23)。负的赝五阶非线性系数以及负的二阶非线性色散系数使超介质在反常色散时具有亮孤子解, 不同于正折射区反常色散情形的孤子形成条件。亮孤子的中心漂移决定于参数 $\lambda = s_1/(2s_2)$, 即由自陡系数 s_1 决定, 负的自陡系数使脉冲向后沿方向漂移 (见图 3(a)); 正的自陡系数使脉冲向前沿方向漂移 (见图 3(b))。

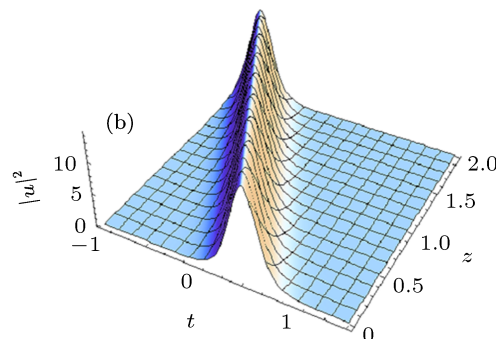


图3 负折射区反常色散情形亮孤子的强度分布 (其中, $p = -0.1, s_2 = -0.004$) (a) $s_1 = -0.005$; (b) $s_1 = 0.005$

4) 当 $b > 0, p < 0, s_2 < 0, -p + 12s_2 - 24s_1s_2w - 60s_2^2w^2 \geq 0$ 时, 亮孤子解形式同于解 (24)。正的三阶线性色散系数、负的赝五阶非线性系数以及负的二阶非线性色散系数使超介质在反常色散时具有亮孤子解, 不同于正折射区反常色散情形的孤子形成条件。

3.2.2 正常色散区

1) 当 $b = 0, p = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, 2k - w^2 \geq 0$ 时, 有

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \pm\sqrt{b_4},$$

$$Q = \sqrt{(2k - w^2)/2} \tanh\left(\sqrt{(2k - w^2)/2}\xi\right),$$

则有暗孤子解

$$u(z, t) = \sqrt{(2k - w^2)/2}$$

$$\times \tanh\left[\sqrt{(2k - w^2)/2}(t - wz)\right]$$

$$\times e^{i(kz - wt)}, \quad (27)$$

这是标准非线性薛定谔方程的典型暗孤子解形式 [26]。

2) 当 $b > 0, p = 0, s_1 > 0, s_2 = 0, (2k - w^2 -$

$2bw^3)/(1+6bw) \geq 0$ 时,

$$A_0=0, \quad A_1 = \sqrt{\frac{2bb_4}{s_1}},$$

$$Q = \sqrt{\frac{b(2k-w^2-2bw^3)}{s_1(1+6bw)}} \times \tanh\left(\sqrt{\frac{2k-w^2-2bw^3}{2(1+6bw)}}\xi\right),$$

则有暗孤子解

$$u(z,t) = \sqrt{\frac{b(2k-w^2-2bw^3)}{s_1(1+6bw)}} \times \tanh\left(\sqrt{\frac{2k-w^2-2bw^3}{2(1+6bw)}}\xi\right) \times e^{i(kz-wt)}, \quad (28)$$

其中 $w = (2b - s_1)/(4bs_1)$, $\lambda = 2b(-2b + s_1 - 2ks_1^2)/[(-6b + s_1)s_1^2]$. 正的三阶线性色散系数以及正的自陡系数使超介质在正常色散时具有暗孤子. 暗孤子的中心漂移决定于参数 λ 的符号. 对固定的 k , 若自陡系数满足 $\max\{(s_1 - 2ks_1^2)/2, s_1/6\} < b$ 或 $\min\{(s_1 - 2ks_1^2)/2, s_1/6\} > b$, 暗孤子的中心都向脉冲后沿方向漂移 ($\lambda > 0$) (见图 4(a)); 若自陡系数满足 $s_1/6 < b < (s_1 - 2ks_1^2)/2$ 或 $(s_1 - 2ks_1^2)/2 < b < s_1/6$, 暗孤子的中心向脉冲前沿方向漂移 ($\lambda < 0$) (见图 4(b)).

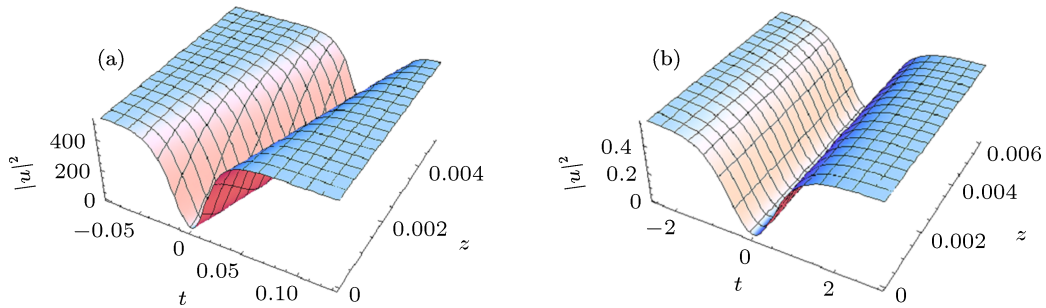


图 4 负折射区正常色散情形的暗孤子的强度分布 (其中, $k=1$) (a) $b=0.006, s_1=0.05$; (b) $b=0.096, s_1=0.6$

3) 当 $b=0, p < 0, s_2 > 0, p + 12s_2 - 12s_2^2w^2 \leq 0$ 时, 有

$$A_0=0, \quad A_1 = \sqrt{-\frac{12b_4s_2}{p}},$$

$$Q = \sqrt{\frac{p + 12s_2 - 12s_2^2w^2}{18ps_2}} \times \tanh\left(\sqrt{-\frac{p + 12s_2 - 12s_2^2w^2}{216s_2^2}}\xi\right),$$

则有暗孤子解

$$u(z,t) = \sqrt{\frac{p + 12s_2 - 12s_2^2w^2}{18ps_2}} \times \tanh\left(\sqrt{-\frac{p + 12s_2 - 12s_2^2w^2}{216s_2^2}}\xi\right) \times e^{i(kz-wt)}, \quad (29)$$

其中

$$\lambda = w = -\frac{s_1}{2s_2}, \quad k = \frac{(ap + 12s_2 - 12s_2^2w^2)^2 + 360aps_2^2w^2 - 3a^2p^2 - 36aps_2}{648ps_2^2}.$$

负的赝五阶非线性系数以及正的二阶非线性色散系数使超介质在正常色散时具有暗孤子解. 暗孤子的中心漂移决定于参数 λ 的符号, 即由自陡系数 s_1 的符号决定, 负的自陡系数使脉冲向后沿方向漂移 (见图 5(a)); 正的自陡系数使脉冲向前沿方向漂移 (见图 5(b)).

4) 当 $b > 0, p < 0, s_2 > 0, p + 12s_2 - 24s_1s_2w -$

$60s_2^2w^2 \leq 0$ 时, 有

$$A_0=0, \quad A_1 = \sqrt{-12b_4s_2/p},$$

$$Q = \sqrt{\frac{p + 12s_2 - 24s_2s_1w - 60s_2^2w^2}{18ps_2}} \times \tanh\left(\sqrt{-\frac{p + 12s_2 - 24s_2s_1w - 60s_2^2w^2}{216s_2^2}}\xi\right),$$

则有暗孤子解

$$u(z,t) = \sqrt{\frac{p + 12s_2 - 24s_1s_2w - 60s_2^2w^2}{18ps_2}} \times \tanh\left(\sqrt{-\frac{p + 12s_2 - 24s_1s_2w - 60s_2^2w^2}{216s_2^2}}\xi\right) \times e^{i(kz-wt)}, \quad (30)$$

其中

$$\lambda = w + 3bw^2 - \frac{b(p + 12s_2 - 24s_1s_2w - 60s_2^2w^2)}{108s_2^2},$$

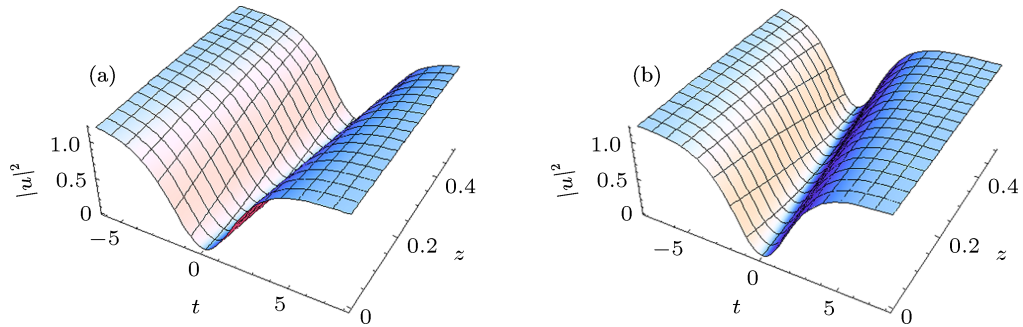


图5 负折射区正常色散情形暗孤子的强度分布 (其中, $p = -0.1, s_2 = 0.06$) (a) $S_1 = -0.5$; (b) $S_1 = 0.5$

3.2.3 零色散区

1) 当 $p < 0, s_2 < 0, 1 - 2s_1w - 5s_2w^2 \geq 0$ 时, 亮孤子解的形式同于解 (26), 负的赝五阶非线性系数以及负的二阶非线性色散效应使得超介质在零色散时具有亮孤子. 不同于正折射区零色散情形的孤子形成条件.

2) 当 $p < 0, s_2 > 0, 1 - 2s_1w - 5s_2w^2 \geq 0$ 时, 有

$$A_0 = 0, \quad A_1 = \sqrt{-\frac{12b_4s_2}{p}},$$

$$Q = \sqrt{\frac{2 - 4s_1w - 10s_2w^2}{3p}} \times \tanh\left(\sqrt{-\frac{1 - 2s_1w - 2s_2w^2}{18s_2}}\xi\right),$$

则有暗孤子解

$$u(z,t) = \sqrt{\frac{2 - 4s_1w - 10s_2w^2}{3p}} \times \tanh\left(\sqrt{-\frac{1 - 2s_1w - 5s_2w^2}{18s_2}}\xi\right) \times e^{i(kz-wt)}, \quad (31)$$

$$w = \frac{-6s_1s_2 - bp}{12s_2^2},$$

$$k = -\frac{(a/2 + 3bw)(ap + 12s_2 - 24s_2s_1w - 60s_2^2w^2)}{108s_2^2} + aw^2/2 + bw^3 + \frac{(ap + 12s_2 - 24s_2s_1w - 60s_2^2w^2)^2}{6 \times 108 ps_2^2}.$$

正的三阶线性色散系数, 负的赝五阶非线性系数以及正的二阶非线性色散系数使超介质在正常色散时具有暗孤子解.

其中

$$k = -bw(2 - 4s_1w - 10s_2w^2)/(6s_2) + bw^3 + (2 - 4s_1w - 10s_2w^2)^2/(18p),$$

$$w = (-6s_1s_2 - bp)/(12s_2^2),$$

$$\lambda = b(-1 + 2s_1w + 32s_2w^2)/(9s_2).$$

负的赝五阶非线性系数以及正的二阶非线性色散系数使超介质在零色散时具有暗孤子.

综上所述, 比较常规介质和超介质的孤子形成条件及传输特性: 常规介质只有正的自陡系数, 没有二阶非线性色散效应, 并且在零色散情形不存在孤子解, 在反常和正常色散情形下分别有亮孤子和暗孤子解. 而超介质可分别从正折射区和负折射区考虑孤子形成条件及传输特性. 正折射区的超介质在零色散下有亮孤子解, 这是因为二阶非线性色散效应充当了线性色散的作用; 负、正二阶非线性色散效应以及其他高阶效应使得超介质在负折射区的零色散情形下, 分别有亮孤子和暗孤子解. 负的自陡效应和二阶非线性色散效应使得正、负折射区的超介质在反常色散下具有更多的亮孤子解; 正折射区的超介质不存在正常色散, 而负折射区的超

介质在正常色散下有暗孤子解, 二阶非线性色散效应使其具有常规光学介质不可能具有的暗孤子解形式. 反常自陡效应的符号或者反常自陡效应和三阶线性色散效应的相互大小关系能够决定正、负折射区中亮、暗孤子中心的漂移方向.

4 结论

与常规光学介质相比, 超介质存在正、负折射区, 并且具有反常自陡效应和特有的二阶非线性色散效应. 通过 F- 函数扩展法求解超介质中的超短脉冲传输方程, 得到了不同条件下的亮孤子和暗孤子

解析解, 分析了反常自陡效应和二阶非线性色散效应对孤子形成和传输的影响. 结果表明, 在零群速度色散情形, 由于二阶非线性色散效应充当了线性色散的作用, 在超介质的正折射区有亮孤子解, 且负、正二阶非线性色散效应和其他高阶效应的共同作用使得超介质的负折射区既有亮孤子解又有暗孤子解. 在反常群速度色散情形, 在超介质的正、负折射区都有亮孤子解. 在正常群速度色散情形, 在超介质的正折射区没有孤子解, 在负折射区有暗孤子解, 且二阶非线性色散效应使其孤子形式比常规介质更丰富.

-
- [1] Kivshar Y S, Agrawal G 2003 *Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals* (San Diego: Academic Press).
- [2] Zharov A A, Shadrivov I V, Kivshar Y S 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 037401
- [3] Shadrivov I V, Sukhorukov A A, Kivshar Y S 2004 *Phys. Rev. E* **69** 016617
- [4] Zharova N A, Shadrivov I V, Zharov A A, Kivshar Y S 2005 *Opt. Express* **13** 1291
- [5] D'Aguanno G 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 213902
- [6] Scalora M, de Ceglia D, D'Aguanno G, Mattiucci N, Akozbek N, Centini M, J. Bloemer M 2007 *Phys. Rev. E* **75** 066606
- [7] Scalora M, Syrchin M S, Akozbek N, Poliakov E Y, D'Aguanno G, Mattiucci N, Bloemer M J, Zheltikov A M 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 013902
- [8] Lazarides N, Eleftheriou M, Tsironis G P 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 157406
- [9] Liu Y M, Bartal G A, Genov D, Zhang X 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 153901
- [10] Kockaert P, Tassin P, der Sande G V, Veretennicoff I, Tlidi M 2007 *Phys. Rev. A* **74** 033822
Tassin P, Gelens L, Danckaert J, Veretennicoff I, der Sande G V, Kockaert P, Tlidi M 2007 *Chaos* **17** 037116
- [11] Wen S, Xiang Y, Dai X, Tang Z, Su W, Fan D 2007 *Phys. Rev. A* **75** 033815
- [12] Wen S, Wang Y, Su W, Xiang Y, Fu X, Fan D 2006 *Phys. Rev. E* **73** 036617
- [13] Wen S, Xiang Y, Su W, Hu Y, Fu X, Fan D 2006 *Opt. Express* **14** 1568
- [14] Zhang J G, Wen S C, Xiang Y J, Wang Y W, Luo H L 2010 *Phys. Rev. A* **81** 023829
- [15] Dai X Y, Xiang Y J, Wen S C, Fan D Y 2010 *Optics Communications* **283** 1607
- [16] Cheng X, Zhuang B X, Dai X Y, Su W H, Wen S C 2009 *Journal of Nonlinear Optical Physics and Materials* **18** 271
- [17] Liu H L, Wen S C, Xiong M, Dai X Y 2007 *Acta Physica Sinica* **56** 6473 (in Chinese) [刘海兰, 文双春, 熊敏, 戴小玉 2007 物理学报 **56** 6473]
- [18] Li P G, Yang R C, Xu Z Y 2010 *Phys. Rev. E* **82** 046603
- [19] Yang R C, Zhang Y 2011 *J. Opt. Soc. Am. B* **28** 123
- [20] Chen C, Dong J, Yang R C 2012 *Acta Photonica Sinica* **41** 288 (in Chinese) [陈诚, 董佳, 杨荣草 2012 光子学报 **41** 288]
- [21] Dai X Y, Wen S C, Xiang Y J 2008 *Acta Phys. Sini.* **57** 186 (in Chinese) [戴小玉, 文双春, 项元江 2008 物理学报 **57** 186]
- [22] Xiang Y J, Dai X Y, Wen S C, Guo J, Fan D Y 2011 *Phys. Rev. A* **84** 033815
- [23] Krolikowski W, Bang O, Rasmussen J J, Wyller J 2001 *Phys. Rev. E* **64** 016602
- [24] Potasek M J 1987 *Optics Letters* **12** 921
- [25] Abdou M A 2007 *Chaos, Solitons and Fractals* **31** 95
- [26] Palacios S L, Guinea A, Fernandez-Diaz J M, Crespo R D 1999 *Phys. Rev. E* **60** R45

Bright and dark solitons in metamaterials obtained by extended F-expansion method*

Zhuang Bin-Xian Guo Jun Xiang Yuan-Jiang Dai Xiao-Yu Wen Shuang-Chun[†]

(Key Laboratory for Micro-/Nano-Optoelectronic Devices of Ministry of Education, College of Information Science and Engineering, Hunan University, Changsha 410082, China)

(Received 9 July 2012; revised manuscript received 16 October 2012)

Abstract

The ultra-short pulse equation in a metamaterial is solved by the extended F-expansion method. The new phenomena and characteristics of solitons, caused by the anomalous self-steepening effect and the second-order nonlinear dispersion in metamaterials, are discussed. The results show that the second-order nonlinear dispersion in the positive-index region may take the place of the linear dispersion to form the bright and dark solitons. Due to the switchable sign of the anomalous self-steepening effect in the positive-index and negative-index regions, the bright and dark solitons separately exist in the anomalous and normal dispersion regions under some specific conditions. The moving directions of the centers of bright and dark solitons can be controlled by the sign of the anomalous self-steepening effect or by the combination of the anomalous self-steepening effect and third-order linear dispersion.

Keywords: soliton, metamaterial, extended F-expansion method

PACS: 42.25.Bs, 42.65.Tg

DOI: 10.7498/aps.62.054207

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10974049).

[†] Corresponding author. E-mail: scwen@hnu.edu.com