

一类非线性相对转动系统的组合谐波分岔行为研究*

孟宗^{1)†} 付立元¹⁾ 宋明厚²⁾

1) (河北省测试计量技术及仪器重点实验室(燕山大学), 秦皇岛 066004)

2) (河北省工业计算机控制工程重点实验室(燕山大学), 秦皇岛 066004)

(2012年9月20日收到; 2012年10月29日收到修改稿)

针对一类具有非线性刚度、非线性阻尼的非线性相对转动系统, 应用耗散系统的拉格朗日原理建立在组合谐波激励作用下非线性相对转动系统的动力学方程. 构造李雅普诺夫函数, 分析相对转动系统的稳定性, 研究自治系统的分岔特性. 应用多尺度法求解相对转动系统的非自治系统在组合激励作用下的分岔响应方程. 最后采用数值仿真方法, 通过分岔图、时域波形、相平面图、Poincaré截面图等研究外扰激励、系统阻尼、非线性刚度对相对转动系统经历倍周期分岔进入混沌运动的影响.

关键词: 相对转动, 组合激励, 分岔, 混沌

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.054501

1 引言

相对转动系统是广泛存在的动力传递系统, 自从1985年Carmeli提出了转动相对论力学的理论^[1,2], 到1996年罗绍凯创建了转动相对论系统的分析力学理论^[3-5], 至今转动相对论在Hamilton系统动力学^[6-8]和Birkhoff系统动力学^[9-15]理论的研究领域取得了一定成果. 相对转动系统包含许多非线性因素, 如失稳、分岔、混沌等. 分岔和混沌是非线性科学领域重要的研究内容^[16-20], 分岔和混沌理论不仅在非线性动力学中广泛应用, 而且在天体力学、信号处理、通信、航天科学和生命科学等领域^[21-29]也得到迅猛发展. 基于相对性原理, 文献[30-35]针对不同结构的相对转动系统建模, 并进行动态响应求解和稳定性分析. 文献[36, 37]建立了一类含周期参激刚度的相对转动非线性系统的动力学方程. 文献[38, 39]针对含非线性刚度和谐波激励的一类相对转动非线性动力系统进行稳定性分析. 文献[40-42]研究了一类具有非线性阻尼和强迫周期力项的相对转动系统非线性动力

学模型, 并分别应用Yoshizawa的非线性系统周期解理论、同伦映射方法和Mawhin重合度理论求解, 并对周期解的唯一性进行证明. 文献[43, 44]对含一类非线性弹性力和组合谐波的相对转动系统求解, 并对相对转动系统进行了稳定性分析. 文献[45]研究了一类多频激励相对转动非线性动力学模型, 用正规化方法得出模型在各种组合频率条件下解的渐进表达式, 未对相对转动系统的稳定性及非线性因素对相对转动系统经历倍周期分岔进入混沌运动的影响进行分析.

本文基于耗散系统的广义拉格朗日原理, 建立了非线性相对转动系统动力学模型, 研究了一类含时变刚度和滑动摩擦力的相对转动自治系统的稳定性, 应用多尺度法求出非线性相对转动系统在组合谐波激励作用下的分岔响应. 最后通过数值仿真方法, 进一步研究系统参数对相对转动系统运动状态的影响.

2 非线性相对转动系统动力学方程

相对转动系统是主要的动力传动系统. 考虑一

* 国家自然科学基金(批准号: 51105323)和河北省自然科学基金(批准号: E2012203166)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mzyu@ysu.edu.cn

类含时变刚度、滑动摩擦力和外扰激励作用下的两质量系统, 系统的动能和势能分别为

$$E = \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} J_i \dot{\phi}_i^2 = \frac{1}{2} J_1 \dot{\phi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\phi}_2^2, \quad (1)$$

$$U = \frac{1}{2} K_0 (1 + k' \cos(\omega t)) (\phi_1 - \phi_2)^2 \quad (2)$$

式中, J_i 为系统集中质量的转动惯量, K_0 为等效刚度, k' 为刚度的变动幅值, ω 为刚度激励频率, K 为系统的扭转刚度, $\phi_i, \dot{\phi}_i$ 分别为系统集中质量的转角和转速, T_i 为扭矩.

广义力矩

$$Q_j = \sum_{i=1}^2 F_i^j \frac{\partial \phi_i}{\partial q_j} \quad (j = 1, 2), \quad (3)$$

式中 $F_i^j = T_i + F_i^c$, F_i^j 为广义外力, F_i^c 为系统广义阻尼力. 则有

$$\begin{aligned} Q_1 &= F_1^1 = T_1 - f^c(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2), \\ Q_2 &= F_2^2 = T_2 + f^c(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2), \end{aligned} \quad (4)$$

式中广义阻尼力 $F^c = f^c(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)$, 即阻尼力为相对转速差的任意形式.

系统振动时, 除具有动能势能及广义力矩外, 还有由阻尼引起的功率损失, 即能量耗散 D .

$$D = \frac{1}{2} [f^c(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)]^2. \quad (5)$$

根据拉格朗日动力学方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\phi}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial \phi_i} + \frac{\partial U}{\partial \phi_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\phi}_i} = Q_i. \quad (6)$$

整理得含耗散项的广义 Lagrange 方程为

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\phi}_1 + K_0 (1 + k' \cos(\omega t)) (\phi_1 - \phi_2) \\ + f^c(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) &= T_1, \\ J_2 \ddot{\phi}_2 - K_0 (1 + k' \cos(\omega t)) (\phi_1 - \phi_2) \\ - f^c(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) &= T_2. \end{aligned} \quad (7)$$

针对一类广泛存在的非线性滑动摩擦力, 取阻尼力为 $f^c(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) = -C(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) + C'(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)^3$ 形式. 其中 C 和 C' 分别为系统的线性和非线性阻尼系数.

将阻尼力形式代入 (7) 式, 得

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\phi}_1 + K_0 (1 + k' \cos(\omega t)) (\phi_1 - \phi_2) \\ - C(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) + C'(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)^3 &= T_1, \\ J_2 \ddot{\phi}_2 - K_0 (1 + k' \cos(\omega t)) (\phi_1 - \phi_2) \end{aligned}$$

$$+ C(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2) - C'(\dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2)^3 = T_2. \quad (8)$$

考虑相对转角的变化, 将 (8) 式的一式乘以 $1/J_1$ 减去二式乘以 $1/J_2$, 整理得

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x + kx \cos(\omega t) - \alpha \dot{x} + \beta \dot{x}^3 = F(t), \quad (9)$$

式中

$$\begin{aligned} x &= \phi_1 - \phi_2, \quad \dot{x} = \dot{\phi}_1 - \dot{\phi}_2, \quad \ddot{x} = \ddot{\phi}_1 - \ddot{\phi}_2, \\ \omega_0^2 &= \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} K_0, \quad k = \omega_0^2 k', \quad \alpha = \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} C, \\ \beta &= \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} C', \quad \frac{1}{J_1 J_2} (T_1 J_2 - T_2 J_1) = F(t), \end{aligned}$$

其中 ω_0 为系统的固有频率, $F(t)$ 为外扰激励.

方程 (9) 就是一类具有滑动摩擦力和含参数激励时变刚度的两质量相对转动系统在外扰激励作用下的非线性动力学普遍方程. 这是工程中描述可简化为两质量相对转动系统的基本方程, 是进一步研究系统动态特性的基础.

3 非线性相对转动系统的分岔特性

3.1 自治系统的分岔特性

系统 (9) 的两质量非线性相对转动系统的自治方程为

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \alpha \dot{x} + \beta \dot{x}^3 = 0. \quad (10)$$

令 $\dot{x} = y$, 则可将系统 (10) 等效方程组为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x + \alpha y - \beta y^3. \end{aligned} \quad (11)$$

定理 1 当 $\alpha < 0, \beta > 0$ 时, 系统 (11) 在奇点 $O(0,0)$ 处是渐近稳定的.

证明 由系统 (11) 可知, 奇点 $O(0,0)$ 是系统的唯一平衡点. 令 $x = p, y = -\omega_0 q$, 则系统 (11) 可化为

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -\omega_0 q, \\ \dot{q} &= \omega_0 p + \alpha q - \beta \omega_0^2 q^3. \end{aligned} \quad (12)$$

构造系统 (12) 的 Lyapunov 函数 $V(p, q) = \frac{1}{2} (p^2 + q^2)$, 则 $V(p, q)$ 为正定函数, 又有

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial p} \frac{dp}{dt} + \frac{\partial V}{\partial q} \frac{dq}{dt} = q^2 (\alpha - \beta \omega_0^2 q^2). \quad (13)$$

可知 $V(p, q)$ 为正定的, 又由于 $\alpha < 0, \beta > 0$, 可得 $\dot{V}(p, q)$ 为负定的, 于是系统 (11) 的平衡点 $(0, 0)$, 即零解是渐近稳定的.

定理 2 当 $\beta = 0$ 时, 系统 (11) 在 $\alpha = 0$ 处发生闭轨分岔.

证明 当 $\beta = 0$ 时, 得系统 (11) 的线性近似方程为

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y, \\ \dot{y} &= -\omega_0^2 x + \alpha y. \end{aligned} \quad (14)$$

系统 (14) 的系数矩阵 A 为 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & \alpha \end{bmatrix}$. 系数矩阵的特征方程为

$$\lambda^2 - \alpha\lambda + \omega_0^2 = 0. \quad (15)$$

特征值为 $\lambda_{1,2} = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega_0^2}}{2}$. 由线性系统的奇点稳定性理论可知, 系统 (14) 在奇点附近可能存在的结构如下:

1) 当 $\alpha^2 - 4\omega_0^2 < 0$ 时, 系统存在带实部的复数根. 当 $-2\omega_0 < \alpha < 0$ 时, 此时系统的方程解实部为负, 为稳定焦点; 当 $0 < \alpha < 2\omega_0$ 时, 此时系统的方程解实部为正, 为不稳定焦点.

(2) 当 $\alpha^2 - 4\omega_0^2 \geq 0$ 时, 系统存在两个实数根. 当 $\alpha < -2\omega_0$ 时, 方程解为两个负实根, 为稳定结点; 当 $\alpha > 2\omega_0$ 时, 方程解为两个正实根, 为不稳定结点.

由上述奇点稳定性理论总结可得如下两种情形:

情形 1 当 $\alpha < 0$ 时, 奇点 $O(0, 0)$ 是线性近似系统 (14) 的稳定焦点, 从而系统 (11) 在奇点 $O(0, 0)$ 处是稳定的. 如图 1 所示.

情形 2 当 $\alpha > 0$ 时, 奇点 $O(0, 0)$ 是线性近似系统 (14) 的不稳定焦点, 因此系统 (11) 在奇点 $O(0, 0)$ 处是不稳定的. 如图 2 所示.

又由定理 1 可知, 系统 (11) 在奇点 $O(0, 0)$ 处是渐近稳定的. 综上分析可知, 系统 (11) 在 $\alpha = 0$ 时发生了闭轨分岔.

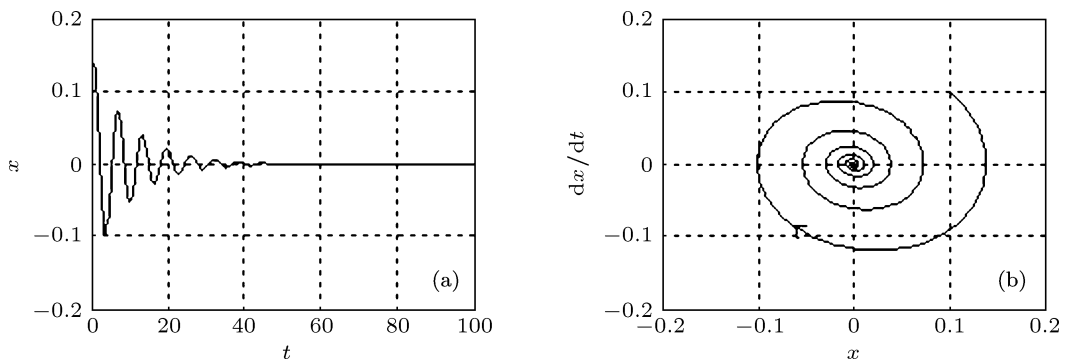


图 1 当 $\alpha < 0$ 时自治系统的时频特性 (a) 时域波形; (b) 相平面图

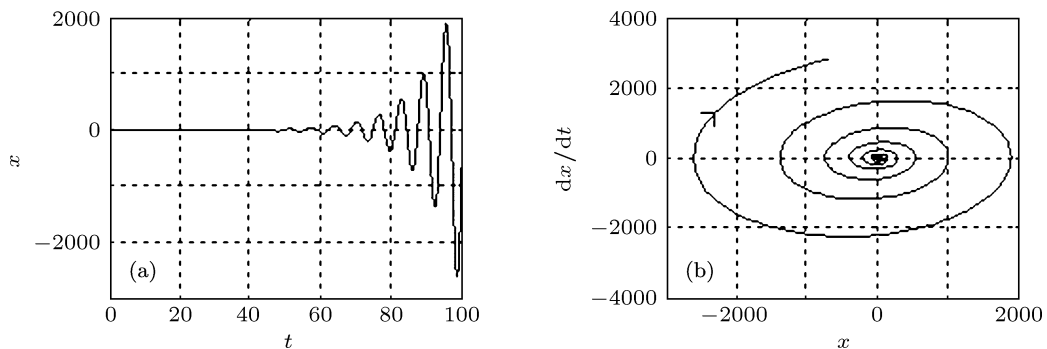


图 2 当 $\alpha > 0$ 时自治系统的时频特性 (a) 时域波形; (b) 相平面图

3.2 非自治系统的分岔特性

考虑外扰激励为频率不等的组合谐波激励, 设 $F(t) = F_1 \cos(v_1 t) + F_2 \cos(v_2 t)$, 则系统 (10) 化为组合激励下的非自治系统为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - \alpha \dot{x} + kx \cos \omega t + \beta \dot{x}^3 \\ = F_1 \cos(v_1 t) + F_2 \cos(v_2 t). \end{aligned} \quad (16)$$

对非线性项冠以小参数 ε , 则系统 (16) 可化为

$$\begin{aligned} \ddot{x} + \omega_0^2 x - \varepsilon \alpha \dot{x} + \varepsilon kx \cos \omega t + \varepsilon \beta \dot{x}^3 \\ = F_1 \cos(v_1 t) + F_2 \cos(v_2 t). \end{aligned} \quad (17)$$

应用多尺度法对系统 (17) 进行分析. 设系统 (17) 的解为

$$x(t, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1), \quad (18)$$

式中, $T_0 = t$ 为快变时间尺度, $T_1 = \varepsilon t$ 为慢变时间尺度. 将解 (18) 代入系统 (17), 并考虑方程两边 ε^0 和 ε^1 的系数分别相等得摄动方程

$$D_0^2 x_0 + \omega_0^2 x_0 = F_1 \cos(v_1 T_0) + F_2 \cos(v_2 T_0), \quad (19)$$

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = -2D_0 D_1 x_0 + \alpha D_0 x_0 - \beta (D_0 x_0)^3 \\ - kx_0 \cos \omega T_0, \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $D_i = \partial / \partial T_i$ ($i = 0, 1$) 为偏微分算子.

设方程 (19) 的通解为

$$x_0 = A(T_1) e^{i\omega_0 T_0} + \Lambda_1 e^{iv_1 T_0} + \Lambda_2 e^{iv_2 T_0} + \text{c.c.}, \quad (21)$$

式中 A 为待定的复函数, $\Lambda_i = \frac{F_i}{2(\omega_0^2 - v_i^2)}$ ($i = 1, 2$), c.c. 代表前面各项的共轭项.

为了简化计算过程且不失一般性, 设 $\omega = \omega_0$, 将 (21) 式代入系统 (20) 得

$$\begin{aligned} D_0^2 x_1 + \omega_0^2 x_1 = i\omega_0 [-2D_1 A + \alpha A - 3\beta(\omega_0^2 A^2 \bar{A} + 2v_1^2 A \Lambda_1^2 + 2v_2^2 A \Lambda_2^2)] e^{i\omega_0 T_0} \\ + i v_1 [\alpha - 3\beta(v_1^2 \Lambda_1^2 + 2\omega_0^2 A \bar{A} + 2v_2^2 \Lambda_2^2)] \Lambda_1 e^{iv_1 T_0} \\ + i v_2 [\alpha - 3\beta(v_2^2 \Lambda_2^2 + 2\omega_0^2 A \bar{A} + 2v_1^2 \Lambda_1^2)] \Lambda_2 e^{iv_2 T_0} \\ - (2/k) A e^{2i\omega_0 T_0} + \beta i \omega_0^3 A^3 e^{3i\omega_0 T_0} + \beta i v_1^3 \Lambda_1^3 e^{3iv_1 T_0} + \beta i v_2^3 \Lambda_2^3 e^{3iv_2 T_0} \\ + 6\beta i \omega_0 v_1 v_2 A \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_0 + v_1 + v_2) T_0} - 6\beta i \omega_0 v_1 v_2 A \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_0 + v_1 - v_2) T_0} \\ - 6\beta i \omega_0 v_1 v_2 A \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_0 - v_1 + v_2) T_0} + 6\beta i \omega_0 v_1 v_2 A \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(\omega_0 - v_1 - v_2) T_0} \\ - 6\beta i \omega_0 v_1 v_2 A \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(-\omega_0 + v_1 + v_2) T_0} + 6\beta i \omega_0 v_1 v_2 A \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(-\omega_0 + v_1 - v_2) T_0} \\ + 6\beta i \omega_0 v_1 v_2 A \Lambda_1 \Lambda_2 e^{i(-\omega_0 - v_1 + v_2) T_0} \\ + 3\beta i \omega_0 v_1^2 A \Lambda_1^2 e^{i(\omega_0 + 2v_1) T_0} + 3\beta i \omega_0 v_1^2 A \Lambda_1^2 e^{i(\omega_0 - 2v_1) T_0} \\ - 3\beta i \omega_0 v_1^2 \bar{A} \Lambda_1^2 e^{i(-\omega_0 + 2v_1) T_0} + 3\beta i \omega_0 v_2^2 A \Lambda_2^2 e^{i(\omega_0 + 2v_2) T_0} \\ + 3\beta i \omega_0 v_2^2 A \Lambda_2^2 e^{i(\omega_0 - 2v_2) T_0} - 3\beta i \omega_0 v_2^2 \bar{A} \Lambda_2^2 e^{i(-\omega_0 + 2v_2) T_0} \\ + 3\beta i \omega_0^2 v_1 A^2 \Lambda_1 e^{i(2\omega_0 + v_1) T_0} - 3\beta i \omega_0^2 v_1 A^2 \Lambda_1 e^{i(2\omega_0 - v_1) T_0} \\ + 3\beta i \omega_0^2 v_1 \bar{A}^2 \Lambda_1 e^{i(-2\omega_0 + v_1) T_0} + 3\beta i \omega_0^2 v_2 A^2 \Lambda_2 e^{i(2\omega_0 + v_2) T_0} \\ - 3\beta i \omega_0^2 v_2 A^2 \Lambda_2 e^{i(2\omega_0 - v_2) T_0} + 3\beta i \omega_0^2 v_2 \bar{A}^2 \Lambda_2 e^{i(-2\omega_0 + v_2) T_0} \\ + 3\beta i v_1^2 v_2 \Lambda_1^2 \Lambda_2 e^{i(2v_1 + v_2) T_0} - 3\beta i v_1^2 v_2 \Lambda_1^2 \Lambda_2 e^{i(2v_1 - v_2) T_0} \\ + 3\beta i v_1^2 v_2 \Lambda_1^2 \Lambda_2 e^{i(-2v_1 + v_2) T_0} + 3\beta i v_1 v_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2^2 e^{i(v_1 + 2v_2) T_0} \\ + 3\beta i v_1 v_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2^2 e^{i(v_1 - 2v_2) T_0} - 3\beta i v_1 v_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2^2 e^{i(-v_1 + 2v_2) T_0} \\ - (2/k) \Lambda_1 e^{i(\omega_0 + v_1) T_0} - (2/k) \Lambda_2 e^{i(\omega_0 + v_2) T_0} - (2/k) \Lambda_1 e^{i(\omega_0 - v_1) T_0} \\ - (2/k) \Lambda_2 e^{i(\omega_0 - v_2) T_0} - (2/k) \Lambda_1 e^{i(-\omega_0 + v_1) T_0} \\ - (2/k) \Lambda_2 e^{i(-\omega_0 + v_2) T_0} - (2/k)(A + \bar{A}) + \text{c.c.} \end{aligned} \quad (22)$$

(22) 式中可能发生多种谐波响应:

1) $\omega_0 \approx 3v_i (i = 1, 2)$, 超谐波响应;

2) $\omega_0 \approx \frac{1}{3}v_i (i = 1, 2)$, 次谐波响应;

3) $\omega_0 \approx 2v_1 \pm v_2, \omega_0 \approx 2v_2 \pm v_1, 2\omega_0 \approx v_1 \pm v_2$,

组合谐波响应.

(22) 式中除具有以上单个响应以外, 还同时存在几种响应的组合, 即对于相对转动系统可以同时存在超谐波响应, 次谐波响应和组合谐波响应, 其中的任意一种响应或者任意两种响应组合等多种情况.

本文以 $\omega_0 \approx 2v_2 - v_1$ 为例讨论相对转动系统组合谐波响应情况. 设 ω_0 与 $2v_2 - v_1$ 的差别为 ε 的同阶小量, 引入调谐参数 σ , 令

$$2v_2 - v_1 = \omega_0 + \varepsilon\sigma. \quad (23)$$

根据 (22) 式, 含 $e^{i\omega_0 t}$ 项可引起久期项, 当满足该项系数为零时可以消除久期项, 得到

$$i\omega_0 [-2D_1A + \alpha A - 3\beta(\omega_0^2 A \bar{A} + 2v_1^2 A \Lambda_1^2 + 2v_2^2 A \Lambda_2^2)] - 3\beta i v_1 v_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2^2 e^{i\sigma T_1} = 0. \quad (24)$$

将复函数 A 对 t 求导, 得

$$\frac{dA}{dt} = D_0A + \varepsilon D_1A, \quad (25)$$

其中 $D_0A = 0, D_1A$ 由条件 (24) 确定, 导出 A 应满足的常微分方程为

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon A + \frac{3}{2}\beta\varepsilon A(\omega_0^2 A \bar{A} + 2v_1^2 \Lambda_1^2 + 2v_2^2 \Lambda_2^2) + \frac{3}{2\omega_0}\beta\varepsilon v_1 v_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2^2 e^{i\sigma T_1}. \quad (26)$$

将复函数 A 写成指数形式为

$$A(T_1) = \frac{1}{2}a(T_1)e^{i\theta(T_1)}, \quad (27)$$

其中 $a(T_1)$ 和 $\theta(T_1)$ 皆是 T_1 的实函数. 将 (27) 式代入方程 (26) 得

$$\begin{aligned} \frac{dA}{dt} = & -\frac{1}{4}\alpha\varepsilon a e^{i\theta} + \frac{3}{16}\beta\varepsilon a(\omega_0^2 a^2 + 8v_1^2 \Lambda_1^2 \\ & + 8v_2^2 \Lambda_2^2) e^{i\theta} \\ & + \frac{3}{2\omega_0}\beta\varepsilon v_1 v_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2^2 \cos(\sigma T_1 - \theta) e^{i\theta} \\ & + \frac{3i}{2\omega_0}\beta\varepsilon v_1 v_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2^2 \sin(\sigma T_1 - \theta) e^{i\theta}. \end{aligned} \quad (28)$$

将实部与虚部分开, 得到 $a(T_1)$ 和 $\theta(T_1)$ 的一阶常微分方程组为

$$\dot{a} = -\frac{1}{2}\alpha\varepsilon a + \frac{3}{8}\beta\varepsilon a(\omega_0^2 a^2 + 8v_1^2 \Lambda_1^2 + 8v_2^2 \Lambda_2^2)$$

$$+ \frac{3}{\omega_0}\beta\varepsilon v_1 v_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2^2 \cos(\sigma T_1 - \theta), \quad (29)$$

$$a\dot{\theta} = \frac{3}{\omega_0}\beta\varepsilon v_1 v_2^2 \Lambda_1 \Lambda_2^2 \sin(\sigma T_1 - \theta). \quad (30)$$

令 $\gamma = \sigma T_1 - \theta, \Gamma_1 = v_1 \Lambda_1, \Gamma_2 = v_2 \Lambda_2, \alpha\varepsilon = \alpha_1, \beta\varepsilon = \beta_1$ 上述微分方程组可化为

$$\begin{aligned} \dot{a} = & -\frac{1}{2}\alpha_1 a + \frac{3}{8}\beta_1 a(\omega_0^2 a^2 + 8\Gamma_1^2 + 8\Gamma_2^2) \\ & + \frac{3}{\omega_0}\beta_1 \Gamma_1 \Gamma_2^2 \cos \gamma, \end{aligned} \quad (31)$$

$$a\dot{\gamma} = \sigma a - \frac{3}{\omega_0}\beta_1 \Gamma_1 \Gamma_2^2 \sin \gamma. \quad (32)$$

令 $\dot{a} = \dot{\gamma} = 0$, 并消去 γ , 得到分岔响应方程为

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2}\alpha_1 a - \frac{3}{8}\beta_1 a(\omega_0^2 a^2 + 8\Gamma_1^2 + 8\Gamma_2^2) \right]^2 + \sigma^2 a^2 \\ & = \left(\frac{3}{\omega_0}\beta_1 \Gamma_1 \Gamma_2^2 \right)^2. \end{aligned} \quad (33)$$

分岔响应方程整理得

$$\begin{aligned} & \frac{9}{64}\beta_1^2 \omega_0^4 a^6 + \left[\frac{9}{4}\beta_1^2 \omega_0^2 (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2) \right. \\ & \left. - \frac{3}{8}\alpha_1 \beta_1 \omega_0^2 \right] a^4 + \left[9\beta_1^2 (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2)^2 \right. \\ & \left. - 3\alpha_1 \beta_1 (\Gamma_1^2 + \Gamma_2^2) + \frac{1}{4}\alpha_1^2 + \sigma^2 \right] a^2 \\ & - \frac{9}{\omega_0}\beta_1^2 \Gamma_1^2 \Gamma_2^4 = 0. \end{aligned} \quad (34)$$

由分岔响应方程 (34) 可以得出, 在组合谐波激励作用下响应幅值 a 不仅与阻尼系数 α, β 和外扰激励的幅值 F_i , 频率 v_i 有关, 而且与调谐参数 σ 有关, 响应幅值 a 是由方程 (34) 所决定的, 不同的组合激励, 分岔响应方程的解不同, 所以相对转动系统的稳定性也不同.

4 非线性相对转动系统稳定性分析

4.1 外扰激励对相对转动系统分岔行为的影响

由于混沌运动的复杂性, 需要通过多方面的分析才能了解其特性. 如通过其时域波形、相平面图、Poincaré截面等时域特性进行分析. 模型 (16) 中, 当各参数取值为 $\alpha = 0.25, \beta = 0.1, k = -1, F_1 = F_2 = f$, 外扰激励参数 f 取不同的值, 则可以观察到相对应的周期解、拟周期解、混沌等. 激励参数 f 分别取 0.01, 0.3, 0.6, 0.7 时, 其相应的时频特性分别如图 3 至图 6 所示.

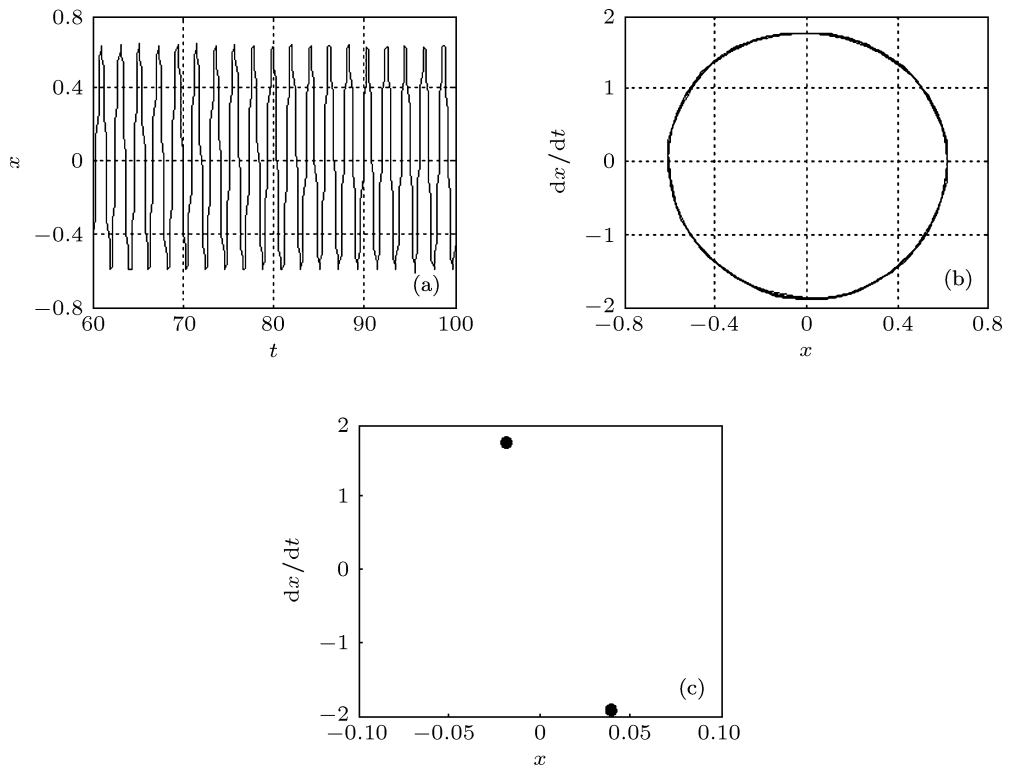


图3 $f = 0.01$ 时系统的时频特性 (a) 时域波形; (b) 相平面; (c) Poincaré图

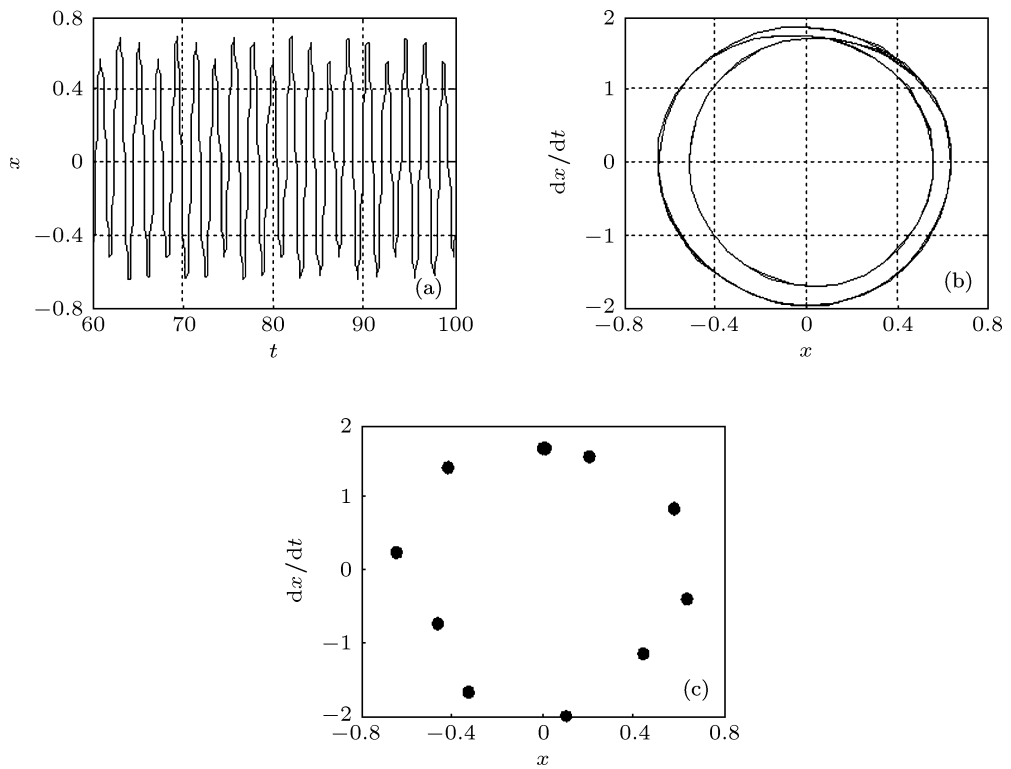


图4 $f = 0.3$ 时系统的时频特性 (a) 时域波形; (b) 相平面; (c) Poincaré图

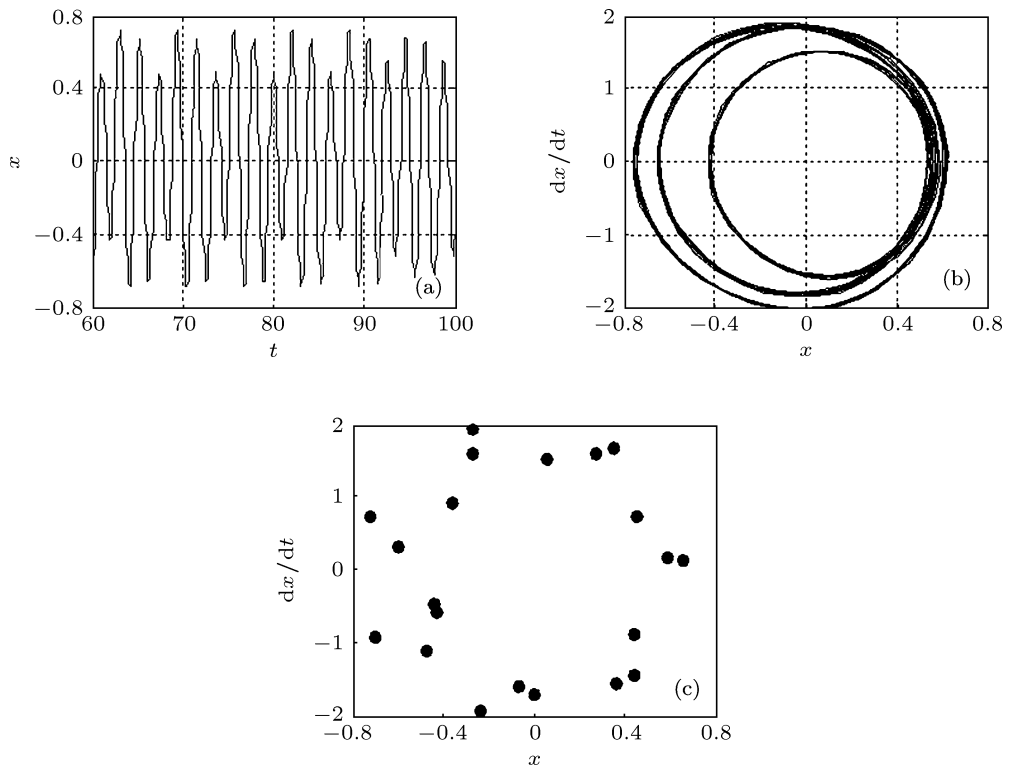


图5 $f = 0.6$ 时系统的时频特性 (a) 时域波形; (b) 相平面; (c) Poincaré图

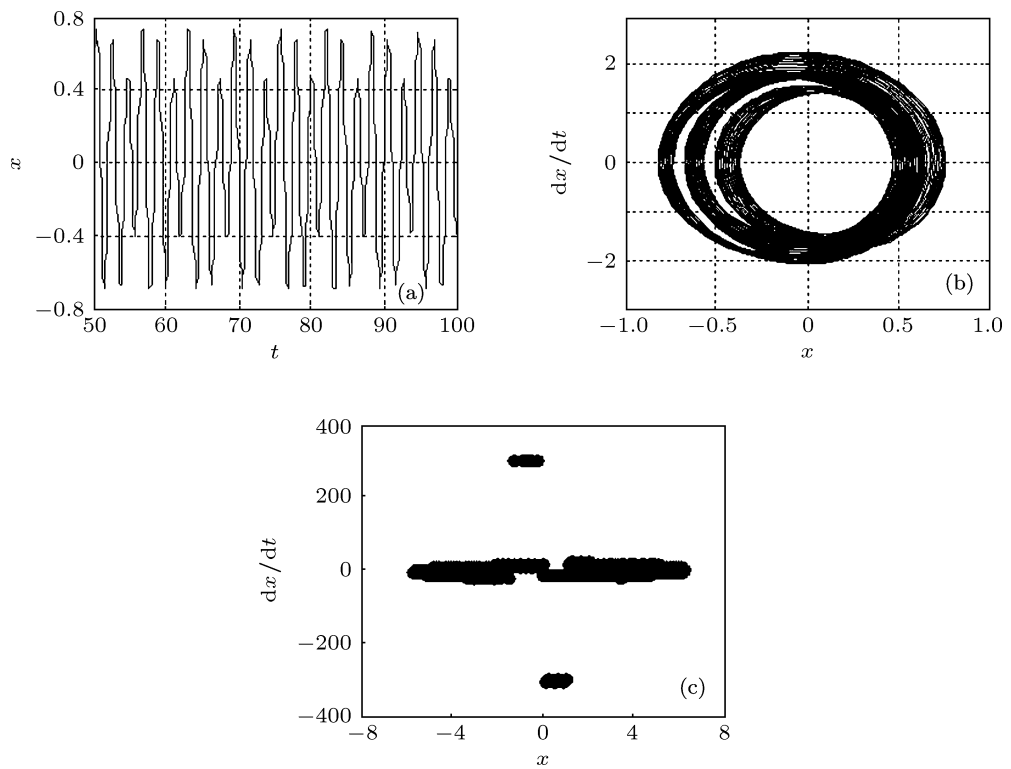


图6 $f = 0.7$ 时系统的时频特性 (a) 时域波形; (b) 相平面; (c) Poincaré图

根据非线性振动与混沌运动的理论可知: 当系统的运动为周期运动时, 相平面图应为闭合曲线, Poincaré截面只是一个或两个不动点, 此时系统是稳定的; 当系统进入倍周期运动时, Poincaré截面是一条闭合曲线, 此时运动具有准周期性. 当相平面图变得杂乱时, 且 Poincaré截面是一些成片的点集时, 系统进入混沌运动, 此时系统不稳定. 比较仿真结果可以看出, 随着 f 值的不断变化, 当 $f = 0.01$ 时系统为周期运动, 当 $f = 0.3$ 时系统已经进入倍周期运动阶段, 当 $f = 0.6, 0.7$ 时系统出现混沌特征.

对该非线性传动系统进行更加详细的数值仿真, 可以得到随 f 值变化的分岔图, 从而可以观察到出现混沌运动的大面积区域, 如图 7 所示. 从图 7 可以看出, 随着系统外扰激励幅值 f 的增加, 相对转动系统从周期运动经历倍周期分岔, 最后进入混沌运动.

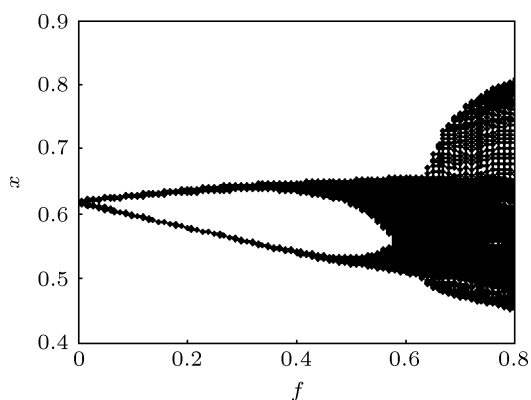


图 7 随 f 值变化相对转动系统的分岔图

4.2 阻尼对相对转动系统分岔行为的影响

模型 (16) 中, 当各参数取值为 $\beta = 0.1, k = -1, f = 0.7$ 时, 改变阻尼参数 α 的大小, 可以得相对转动系统的分岔图, 如图 8 所示. 从图 8 可以得出, 系统随着阻尼参数 α 的增大, 相对转动系统从周期运动经历倍周期分岔, 最后进入混沌运动. 因此, 增大系统阻尼 (方程中为 $-\alpha$), 有利于相对转动系统处于稳定状态.

4.3 非线性刚度对相对转动系统分岔行为的影响

模型 (16) 中, 当各参数取值为 $\alpha = 0.25, \beta =$

$0.1, f = 0.7$ 时, 改变非线性刚度参数 k 的大小, 可以得相对转动系统随非线性刚度变化的分岔图, 如图 9 所示. 从图 9 可以得出, 系统随着非线性刚度参数 k 的减小, 相对转动系统从周期运动经历倍周期分岔, 最后进入混沌运动. 当非线性刚度 $k < 0$ 时, 相对转动系统发生混沌的可能性大, 系统不稳定; 当非线性刚度 $k > 0$ 时, 相对转动系统随非线性刚度 k 的增大, 系统逐渐变得稳定.

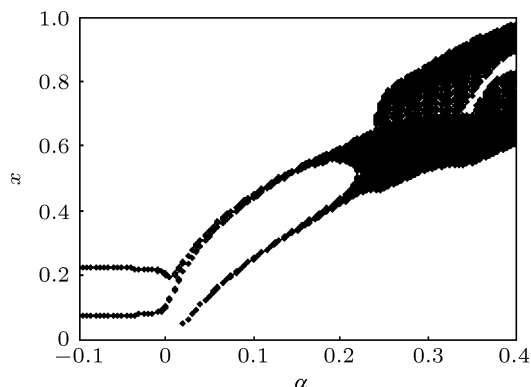


图 8 随阻尼变化相对转动系统的分岔图

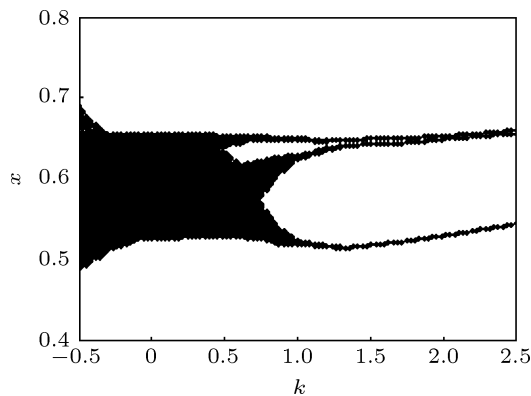


图 9 随非线性刚度变化相对转动系统的分岔图

5 结论

本文对一类具有滑动摩擦力和含参数激励的时变刚度的两质量相对转动非线性传动系统进行研究, 建立其在外扰激励作用下的非线性系统动力学方程, 并对模型的自治系统和非自治系统进行稳定性分析. 针对所建立的非线性动力学方程, 通过仿真分析了系统周期运动的稳定性以及通过倍周期分岔进入混沌的过程. 通过数值仿真发现, 外扰

激励、阻尼和非线性刚度的变化都可以使相对系统的稳定性发生变化, 导致系统经历倍周期分岔进入混动运动, 在一定程度上, 外扰激励幅值越大, 阻尼越小, 非线性负刚度值越大, 相对转动系统越不稳定, 越容易发生混沌运动. 因此适当降低外扰激

励, 增大系统阻尼, 减小非线性刚度, 有利于抑制相对转动系统混沌运动的产生. 本文研究对于减少工程中广泛存在的相对转动系统振动现象具有重要的理论意义. 同时为进一步研究大型旋转机械系统运行和设计提供理论依据.

- [1] Carmeli M 1985 *Found. Phys.* **15** 175
- [2] Carmeli M 1986 *Inter. J. Theor. Phys.* **25** 89
- [3] Luo S K 1996 *J. Beijing Inst. Technol.* **16** (S1) 154 (in Chinese) [罗绍凯 1996 北京理工大学学报 **16** (S1) 154]
- [4] Luo S K 1996 *Appl. Math. Mech.* **17** 683
- [5] Luo S K 1998 *Appl. Math. Mech.* **19** 45
- [6] Luo S K 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2941 (in Chinese) [罗绍凯 2003 物理学报 **52** 2941]
- [7] Luo S K 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 5 (in Chinese) [罗绍凯 2004 物理学报 **53** 5]
- [8] Jiang W A, Luo S K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060201 (in Chinese) [姜文安, 罗绍凯 2011 物理学报 **60** 060201]
- [9] Luo S K, Fu J L, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 383 (in Chinese) [罗绍凯, 傅景礼, 陈向炜 2001 物理学报 **50** 383]
- [10] Luo S K, Guo Y X, Chen X W, Fu J L 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2049 (in Chinese) [罗绍凯, 郭永新, 陈向炜, 傅景礼 2001 物理学报 **50** 2049]
- [11] Fu J L, Chen L Q, Luo S K, Chen X W, Wang X M 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2289 (in Chinese) [傅景礼, 陈立群, 罗绍凯, 陈向炜, 王新民 2001 物理学报 **50** 2289]
- [12] Fu J L, Chen L Q, Xue Y, Luo S K 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2683 (in Chinese) [傅景礼, 陈立群, 薛纭, 罗绍凯 2002 物理学报 **51** 2683]
- [13] Chen X W, Luo S K, Mei F X 2002 *Appl. Math. Mech.* **23** 47
- [14] Guo Y X, Shang M, Luo S K 2003 *Appl. Math. Mech.* **24** 62
- [15] Luo S K 2003 *Appl. Math. Mech.* **24** 414
- [16] Chen X W, Luo S K, Mei F X 2000 *Acta Mech. Solid. Sin.* **21** 251 (in Chinese) [陈向炜, 罗绍凯, 梅凤翔 2000 固体力学学报 **21** 251]
- [17] Ma C, Wang X Y 2011 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **17** 721
- [18] Wang X Y, Liang Q Y, Meng J 2008 *International Journal of Modern Physics C* **19** 1389
- [19] Di G H, Xu Y, Xu W, Gu R C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020504 (in Chinese) [狄根虎, 许勇, 徐伟, 顾仁财 2011 物理学报 **60** 020504]
- [20] Li Q H, Yan Y L, Yang D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200505 (in Chinese) [李群宏, 闫玉龙, 杨丹 2012 物理学报 **61** 200505]
- [21] Liu Y Z, Lin C S, Li X C 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060507 (in Chinese) [刘扬正, 林长圣, 李心朝 2011 物理学报 **60** 060507]
- [22] Zhang Z X, Yu S M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3017 (in Chinese) [张朝霞, 禹思敏 2010 物理学报 **59** 3017]
- [23] Ding L, Xia G Q, Shen J T, Li N Y, Wu Z M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 014210 (in Chinese) [丁灵, 吴加贵, 夏光琼, 李能尧, 吴正茂 2011 物理学报 **60** 014210]
- [24] Wang M J, Wang X Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1467 (in Chinese) [王明军, 王兴元 2009 物理学报 **58** 1467]
- [25] Yan S L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2819 (in Chinese) [颜森林 2008 物理学报 **57** 2819]
- [26] Wang X Y, Liang Q Y 2008 *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* **13** 913
- [27] Liu Z H, Zhang Y J, Zhang J, Wu J H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 019501 (in Chinese) [刘朝华, 张英杰, 章兢, 吴建辉 2011 物理学报 **60** 019501]
- [28] Gu H G, Zhu Z, Jia B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 100505 (in Chinese) [古华光, 朱洲, 贾冰 2011 物理学报 **60** 100505]
- [29] Zhong M, Tang G N 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3070 (in Chinese) [钟敏, 唐国宁 2010 物理学报 **59** 3070]
- [30] Luo S K, Guo Y X, Chen X W 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2053 (in Chinese) [罗绍凯, 郭永新, 陈向炜 2001 物理学报 **50** 2053]
- [31] Luo S K 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5580 (in Chinese) [罗绍凯 2007 物理学报 **56** 5580]
- [32] Jia L Q, Xie Y L, Luo S K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040201 (in Chinese) [贾利群, 解银丽, 罗绍凯 2011 物理学报 **60** 040201]
- [33] Dong Q L, Liu B 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 2191 (in Chinese) [董全林, 刘彬 2002 物理学报 **51** 2191]
- [34] Zhao W, Liu B, Shi P M, Jiang J S 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 3852 (in Chinese) [赵武, 刘彬, 时培明, 蒋金水 2005 物理学报 **54** 3852]
- [35] Liu S, Liu B, Zhang Y K, Wen Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 38 (in Chinese) [刘爽, 刘彬, 张业宽, 闻岩 2010 物理学报 **59** 38]
- [36] Shi P M, Li J Z, Liu B, Han D Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 094501 (in Chinese) [时培明, 李纪召, 刘彬, 韩东颖 2011 物理学报 **60** 094501]
- [37] Wang Y Z, Zhou Y Z 2011 *Chin. Phys. B* **20** 040501
- [38] Meng Z, Liu B 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6194 (in Chinese) [孟宗, 刘彬 2007 物理学报 **56** 6194]
- [39] Liu H R, Zhu Z L, Shi P M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6770 (in Chinese) [刘浩然, 朱占龙, 时培明 2010 物理学报 **59** 6770]
- [40] Wang K, Guan X P, Qiao J M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3648 (in Chinese) [王坤, 关新平, 乔杰敏 2010 物理学报 **59** 3648]
- [41] Mo J Q, Cheng R J, Ge H X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040203 (in Chinese) [莫嘉琪, 程荣军, 葛红霞 2011 物理学报 **60** 040203]
- [42] Li X J, Chen X Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210201 (in Chinese) [李晓静, 陈绚青 2012 物理学报 **61** 210201]
- [43] Meng Z, Liu B 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1329 (in Chinese) [孟宗, 刘彬 2008 物理学报 **57** 1329]
- [44] Li H B, Wang B H, Zhang Z Q, Liu S, Li Y S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 094501 (in Chinese) [李海滨, 王博华, 张志强, 刘爽, 李延树 2012 物理学报 **61** 094501]
- [45] Tang R R 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200201 (in Chinese) [唐荣荣 2012 物理学报 **61** 200201]

Bifurcation of a kind of nonlinear-relative rotational system with combined harmonic excitation*

Meng Zong^{1)†} Fu Li-Yuan¹⁾ Song Ming-Hou²⁾

1) (*Key Laboratory of Measurement Technology and Instrumentation of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

2) (*Key Laboratory of Industrial Computer Control Engineering of Hebei Province, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China*)

(Received 20 September 2012; revised manuscript received 29 October 2012)

Abstract

Using the Lagrange principle of dissipative system, the nonlinear dynamic equation of a relative rotation with combined harmonic excitation is established, which contains nonlinear stiffness and nonlinear damping. The stability and bifurcation characteristics of autonomous system are analyzed by constructing Lyapunov function. Bifurcation response equation of non-autonomous system under the combined harmonic excitation is obtained by the method of multiple scale. Finally, numerical method is employed to analyze the effects of external excitation, system damping and nonlinear stiffness on the process that the system enter into chaos motion via period-doubling bifurcation by bifurcation diagram, time domain waveform, phase trajectory and Poincaré map.

Keywords: relative rotation, combined harmonic excitation, bifurcations, chaos

PACS: 45.20.dc, 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.62.054501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51105323), and the Natural Science Foundation of Hebei Province, China (Grant No. E2012203166).

† Corresponding author. E-mail: mzyu@ysu.edu.cn