

# 基于流体模型和非平衡态电子能量分布函数的高功率微波气体击穿研究\*

赵朋程<sup>†</sup> 廖成 杨丹 钟选明 林文斌

(西南交通大学, 电磁场与微波技术研究所, 成都 610031)

(2012年8月2日收到; 2012年10月10日收到修改稿)

用流体模型研究高功率微波气体击穿时, 电子能量分布函数常被假设为麦克斯韦分布形式, 此假设可能将给模拟结果带来较大的误差. 通过求解玻尔兹曼方程, 得到非平衡状态下的电子能量分布函数. 分别将上述两类分布函数引入到流体模型中, 对氩气击穿进行了数值模拟. 结果表明, 基于非平衡分布函数得到的击穿时间与粒子模拟结果符合得很好, 而当平均电子能量较低时, 麦克斯韦分布函数的高能尾部导致了较短的击穿时间. 最后, 采用非平衡分布函数计算了不同压强下的氩气击穿阈值, 发现其与实验结果基本符合.

**关键词:** 微波气体击穿, 电子能量分布函数, 流体模型, 玻尔兹曼方程

**PACS:** 51.50.+v, 52.80.Pi, 52.35.Mw

**DOI:** 10.7498/aps.62.055101

## 1 引言

高功率微波 (high power microwave, HPM) 在军事和民用领域具有广阔的应用前景, 如定向能武器, 人工等离子体层和地 - 空通信等. 近年来, 随着 HPM 功率容量的提高, 气体击穿问题已引起国内外学者的广泛关注<sup>[1-10]</sup>. 气体中的自由电子在 HPM 强电场下被加速, 进而与中性分子 (原子) 发生链式碰撞电离. 当电子密度增长到一定程度后, 气体击穿发生, 同时引起 HPM 脉冲尾部的急剧衰减和反射. 因此, 气体击穿已成为限制 HPM 发射和传输的主要因素之一, 对其开展研究十分必要.

流体模型是研究 HPM 气体击穿的主要模型之一, 其用经典流体力学和电动力学相结合的方法研究导电流体和微波场的相互作用. 在 1986 年, Yee 等通过联立麦克斯韦方程组和电子流体力学方程组, 建立了完备的流体模型<sup>[11]</sup>. 随后, 流体模型被广泛用于研究 HPM 气体击穿问题<sup>[1,8,10,12]</sup>. 在该模

型中, 电子能量分布函数是计算碰撞率、电离率、粘附率和能量损失率 (统称为率参数) 的一个关键参数, 常被假设为麦克斯韦分布形式. 而 HPM 作用下的气体电子通常处于非平衡状态, 此时上述假设可能将给流体模拟结果带来较大的误差.

为减小麦克斯韦分布函数假设引入的误差, 我们将粒子模拟的若干分布函数引入到流体模型中, 并证实了这些分布函数具有相对较高的精度<sup>[13]</sup>. 其中, 粒子模拟法是最精确的等离子体描述法之一, 但用该方法研究高压击穿问题时效率非常低<sup>[14]</sup>. 为此, 本文通过求解玻尔兹曼方程 (Boltzmann equation, BE), 得到非平衡状态下的电子能量分布函数 (简称非平衡分布函数). 以流体模型为基础, 分别采用麦克斯韦分布函数和非平衡分布函数, 计算了不同压强下的氩气击穿时间, 并与粒子模拟结果进行对比. 此外, 还分析了不同分布函数对击穿演化过程的影响. 最后, 我们采用非平衡分布函数计算了 10—100 Torr (1 Torr =  $1.33322 \times 10^2$  Pa) 范围内的氩气击穿阈值, 发现其与实验结果基本

\* 国家自然科学基金委员会 - 中国工程物理研究院联合基金 (批准号: 11076022)、教育部博士点基金 (批准号: 20110184110016) 和中央高校基本科研业务费专项资金资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: zhao\_pc2010@163.com

符合.

## 2 流体模型与玻尔兹曼方程

### 2.1 基本方程

流体模型由 Maxwell 方程组和电子流体力学方程组构成. 本文采用一维流体模型, 其基本方程如下<sup>[11]</sup>:

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial H_y}{\partial z} - \frac{q_e}{\epsilon_0} U_x, \quad (1)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = -\frac{q_e}{\epsilon_0} U_z, \quad (2)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} = (v_i - v_a) N_e - \frac{\partial U_z}{\partial z}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial U_x}{\partial t} = \frac{q_e}{m_e} N_e E_x - \frac{q_e}{m_e} \mu_0 U_z H_y - v_c U_x, \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_z}{\partial t} = & \frac{q_e}{m_e} N_e E_z + \frac{q_e}{m_e} \mu_0 U_x H_y \\ & - v_c U_z - m_e \frac{\partial U_n}{\partial z}, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_n}{\partial t} = q_e (U_x E_x + U_z E_z) - U_n \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} - N_e v_l, \quad (7)$$

方程(1)—(7)中,  $t$  代表时间,  $x$  和  $z$  代表空间;  $E_x$  和  $E_z$  分别为电场沿  $x$  和  $z$  轴的分量;  $H_y$  为沿  $y$  轴的磁场分量;  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  分别为真空中的介电常数和磁导率;  $q_e$  和  $m_e$  为电子的带电量和质量;  $N_e$  为电子流体的密度;  $U_x$  和  $U_z$  分别为电子流体速度沿  $x$  和  $z$  轴的分量,  $U_n$  为电子流体能量, 这 3 个变量还可被表达为

$$U_x = N_e \bar{v}_x, \quad U_z = N_e \bar{v}_z, \quad U_n = N_e \bar{\epsilon}, \quad (8)$$

其中,  $\bar{v}_x$  和  $\bar{v}_z$  分别为平均电子速度沿  $x$  和  $z$  轴的分量,  $\bar{\epsilon}$  为平均电子能量.  $v_c$ ,  $v_i$ ,  $v_a$  和  $v_l$  分别为碰撞率、电离率、黏附率和能量损失率.

### 2.2 率参数的定义

以氩气为背景气体, 本文主要考虑了电子与氩气原子之间的弹性碰撞、激发和碰撞电离, 如表 1 所示. 在实际过程中, 还有其他的碰撞反应系列, 但由于其碰撞截面远小于电子与原子碰撞的情况, 影响非常小, 可以忽略不计. 电子与氩气原子之间的

碰撞截面已经被理论和实验确定, 具体数据参见 Phelps 的总结<sup>[15]</sup>.

表 1 电子与氩气的碰撞系列

| 类型   | 碰撞表达式   | 反应阈值/eV |
|------|---|---------|
| 弹性碰撞 | $e + \text{Ar} \rightarrow e + \text{Ar}$       |         |
| 激发碰撞 | $e + \text{Ar} \rightarrow e + \text{Ar}^*$     | 11.5    |
| 电离碰撞 | $e + \text{Ar} \rightarrow e + \text{Ar}^+ + e$ | 15.6    |

由于电子与氩气原子之间不存在黏附反应, 可以定义黏附率为 0; 在定义非弹性碰撞能量损失时, 假设每次能量损失为反应阈值能量, 如在电离碰撞过程中电子能量损失为 15.6 eV. 基于上述分析, 率参数的具体计算如下:

$$v_c = N_{\text{Ar}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\epsilon}{m_e}} \sigma_T f_0(\epsilon) d\epsilon, \quad (9)$$

$$\sigma_T = \sigma_c + \sigma_e + \sigma_i, \quad (10)$$

$$v_i = N_{\text{Ar}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\epsilon}{m_e}} \sigma_i f_0(\epsilon) d\epsilon, \quad (11)$$

$$v_l = v_{l1} + v_{l2}, \quad (12)$$

$$v_{l1} = N_{\text{Ar}} \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \frac{m_e}{M_{\text{Ar}}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\epsilon}{m_e}} \sigma_c f_0(\epsilon) d\epsilon, \quad (13)$$

$$v_{l2} = v_e \epsilon_e + v_i \epsilon_i, \quad (14)$$

$$v_e = N_{\text{Ar}} \int_0^\infty \sqrt{\frac{2\epsilon}{m_e}} \sigma_e f_0(\epsilon) d\epsilon, \quad (15)$$

其中,  $M_{\text{Ar}}$  和  $N_{\text{Ar}}$  为氩气原子质量和密度,  $\sigma_c$ ,  $\sigma_e$ ,  $\sigma_i$  和  $\sigma_T$  分别为弹性碰撞截面, 激发碰撞截面, 电离碰撞截面和总的碰撞截面;  $v_{l1}$  和  $v_{l2}$  为弹性碰撞能量损失率和非弹性碰撞能量损失率,  $v_e$  为氩气激发率;  $\epsilon_e$  和  $\epsilon_i$  为激发反应阈值能量和电离反应阈值能量;  $f_0(\epsilon)$  为电子能量分布函数, 常假设为麦克斯韦分布形式, 在某些情况下导致了不精确的模拟结果. 为减小此假设引入的误差, 本文通过求解 BE 得出非平衡状态下的电子能量分布函数.

### 2.3 玻尔兹曼方程及求解

由于磁场对电子的作用相对较小, 其影响可以忽略不计, 在电离气体中 BE 满足

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + v \cos \theta \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{q_e}{m_e} E \left( \cos \theta \frac{\partial f}{\partial v} \right. \\ \left. + \frac{\sin^2 \theta}{v} \frac{\partial f}{\partial \cos \theta} \right) = C[f], \end{aligned} \quad (16)$$

其中,  $f$  是关于空间  $z$  和速度  $v$  的电子分布函数,  $\theta$  为速度与电场方向的夹角,  $C$  代表碰撞引起的变化率. 将二项勒让德多项式代入方程 (16) 中, 得

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{\gamma}{3} \epsilon^{1/2} \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\gamma}{3} \epsilon^{-1/2} (\epsilon E f_1) = C_0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial t} + \gamma \epsilon^{1/2} \frac{\partial f_0}{\partial z} - E \gamma \epsilon^{1/2} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} \\ = -N_{Ar} \sigma_T \gamma \epsilon^{1/2} f_1, \end{aligned} \quad (18)$$

其中  $\gamma = (2q_e/m_e)^{1/2}$ ,  $f_0$  为各向同性项即上述的非平衡分布函数,  $f_1$  为异向干扰项. 通过求解方程 (17), (18), 可以得出  $f_0^{[16]}$ .

### 3 模拟结果与讨论

根据上述流体模型方程的特点, 我们采用时域有限差分方法对其进行合理的格点配置和离散处理. 在离散方程中, 电子流体密度和电子流体能量分量所组成的非线性方程组, 我们将应用 Atiken 方法进行局部迭代求解. 在每个时间步上, 更新各空间格点的率参数, 解决率参数的时间 - 空间动态计算问题. 详细的求解步骤参见文献 [13, 17]. 模拟过程中采用的基本条件为: 纯氩气, 压强为 10—1000 Torr, 注入的 HPM 为正弦型平面波.

分别在高压为 760 Torr 和低压为 20 Torr 时, 对不同类型的电子能量分布函数和相应的电离率进行了对比分析, 如图 1—4 所示. 图 1 给出压强为 760 Torr, HPM 振幅为 2.82 MV/m 和频率为 2.85 GHz 时三类电子能量分布函数的比较结果. 非平衡分布函数与粒子模拟的分布函数<sup>[18]</sup>符合很好, 而麦克斯韦分布函数具有较高的能量尾部. 分布函数的能量尾部决定高能电子 (其能量大于电离反应阈值 (见表 1)) 的比例, 对电离气体具有重要的影响. 图 2 给出压强为 760 Torr 和频率为 2.85 GHz 时分别采用麦克斯韦分布函数和非平衡分布函数得到的电离率. 通过两者的对比可以发现, 当平均电子能量低于 20 eV 时, 麦克斯韦分布函数产生了较大的电离率. 当压强为 20 Torr, HPM 振幅为 2.82 MV/m 和频率为 2.85 GHz 时, 麦克斯韦分布函数与非平衡分布函数基本符合, 因而在平均电子能量较高时这两类分布函数下的电离率近似相等, 如图 3 和 4 所示.

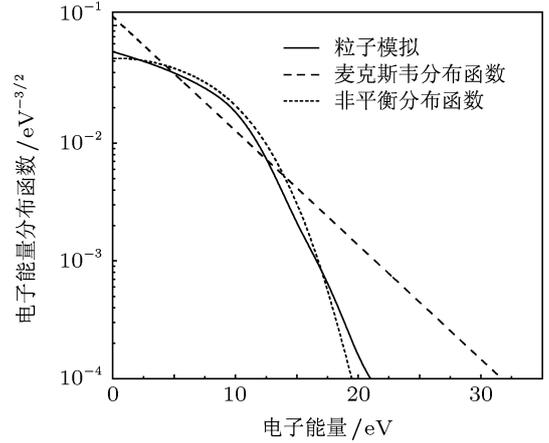


图 1 压强为 760 Torr, HPM 振幅为 2.82 MV/m 和频率为 2.85 GHz 时, 粒子模拟的分布函数、麦克斯韦分布函数和非平衡分布函数随电子能量的变化 (粒子模拟结果摘自文献 [18])

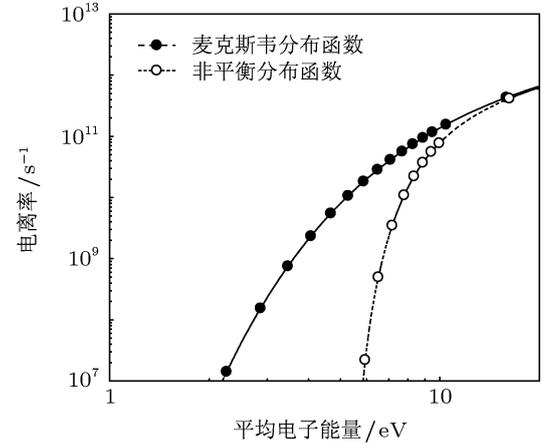


图 2 压强为 760 Torr 和 HPM 频率为 2.85 GHz 时, 麦克斯韦分布函数和非平衡分布函数下的电离率随平均电子能量的变化

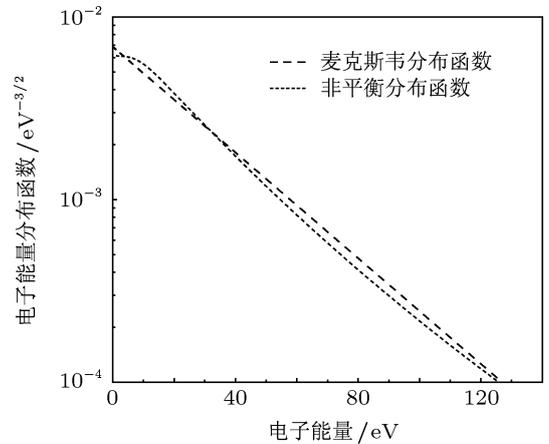


图 3 压强为 20 Torr, HPM 振幅为 2.82 MV/m 和频率为 2.85 GHz 时, 麦克斯韦分布函数和非平衡分布函数随电子能量的变化

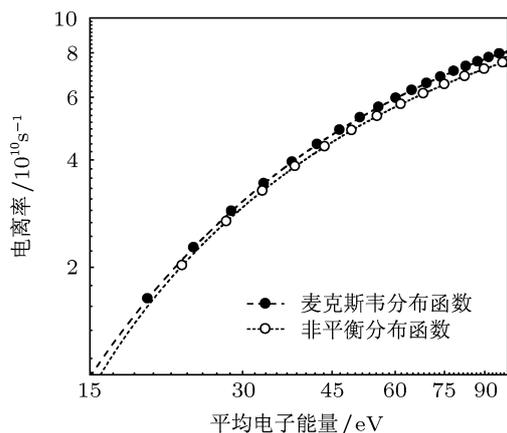


图4 压强为 20 Torr 和 HPM 频率为 2.85 GHz 时,麦克斯韦分布函数和非平衡分布函数下的电离率随平均电子能量的变化

基于流体模型,分别采用麦克斯韦分布函数和非平衡分布函数,计算了压强在 10—1000 Torr 范围内,HPM 振幅为 2.82 MV/m 和频率为 2.85 GHz 时的击穿时间,并将两者与粒子模拟结果<sup>[18]</sup>进行对比,如图 5 所示.其中,击穿时间被定义为电子密度增长到初始密度的  $10^8$  倍所需要的时间<sup>[19]</sup>.结果发现,采用非平衡分布函数得到的击穿时间在各压强下均与粒子模拟结果符合得很好,但高压下麦克斯韦分布函数给出了较短的击穿时间.其原因如下:高压下平均电子能量较低时,非平衡分布函数与粒子模拟的分布函数符合很好,而麦克斯韦分布函数的高能尾部产生了较大的电离率(见图 1 和 2).此外,从图 3 和 4 可知,低压下平均电子能量较高时,麦克斯韦分布函数与非平衡分布函数在随电子能量的变化趋势上基本符合,且根据这两类分布函数得到的电离率近似相等.因此,低压下麦克斯韦

分布函数也可以给出相对精确的模拟结果.

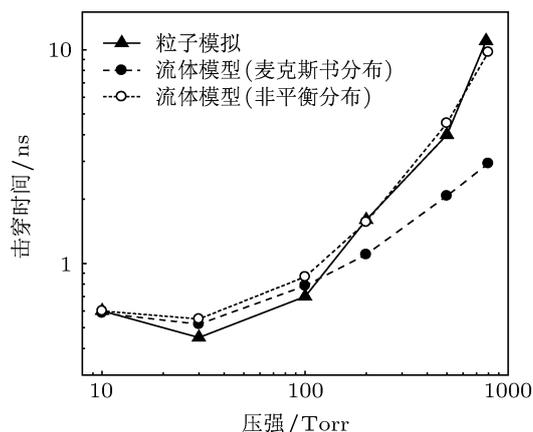


图5 HPM 振幅为 2.82 MV/m 和频率为 2.85 GHz 时,通过粒子模拟法、流体模型(麦克斯韦分布)和流体模型(非平衡分布函数)得到的击穿时间随压强的变化(粒子模拟结果摘自文献<sup>[18]</sup>)

将麦克斯韦分布函数和非平衡分布函数分别引入到流体模型中,对压强为 760 Torr, HPM 振幅为 2.82 MV/m 和频率为 2.85 GHz 时的击穿演化过程进行了数值模拟,发现这两类分布函数下的击穿演化过程具有明显的差异,如图 6 所示.从图 6(b)和(e)可以看出,平均电子能量随时间振荡,且最大能量均低于 10 eV.此时,麦克斯韦分布函数产生了较大的电离率(见图 2),同时由方程(12)—(15)可知该分布函数过高估计了能量损失率.因此,基于麦克斯韦分布函数得到的平均电子能量较低,但电子密度增长更快,以致 HPM 脉冲尾部衰减更加严重.图 7 给出压强为 760 Torr, HPM 振幅为 4.4 MV/m

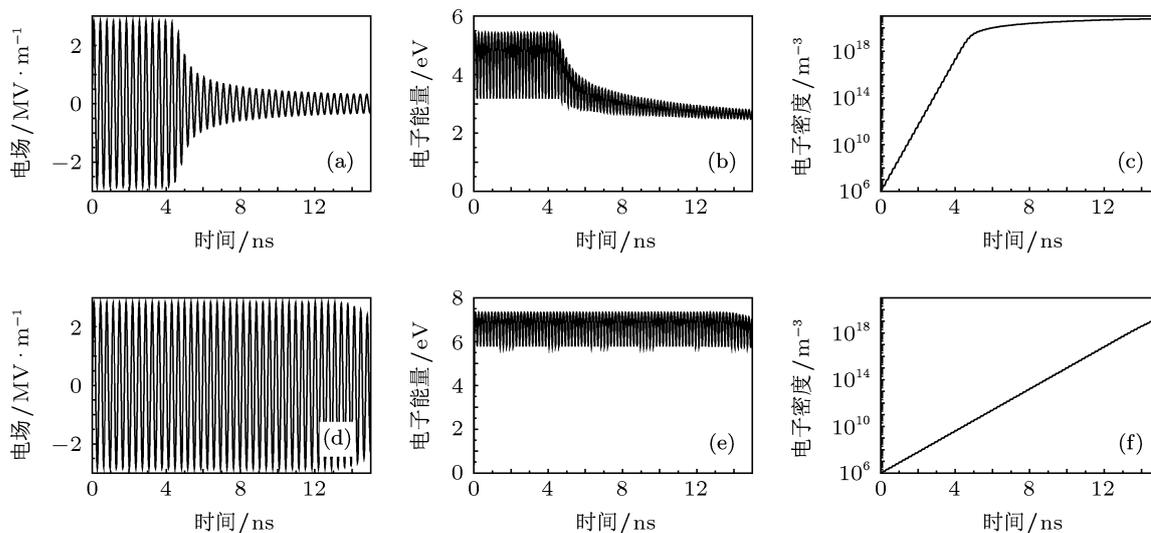


图6 压强为 760 Torr, HPM 振幅为 2.82 MV/m 和频率为 2.85 GHz 时,HPM 电场、平均电子能量和电子密度随时间的变化 (a)—(c) 为采用麦克斯韦分布函数模拟的结果;(d)—(f) 为采用非平衡分布函数模拟的结果

和频率为 2.85 GHz 时基于非平衡分布函数得到的击穿演化过程. 将图 6(a)—(c) 与图 7 对比可以发现, 两者均在 5 ns 左右发生击穿, 此时脉冲尾部出现明显的衰减, 且电子密度趋于饱和水平. 这表明当同样的击穿效果出现时, 在麦克斯韦分布函数下注入的 HPM 振幅相对较低.

当压强为 20 Torr, HPM 振幅为 2.82 MV/m 和

频率为 2.85 GHz 时, 将麦克斯韦分布函数和非平衡分布函数下的击穿演化过程进行对比, 如图 8 所示. 从图 8(b) 和 (e) 可以看出, 平均电子能量约在 15—55 eV 的范围内振荡. 当平均电子能量处于该范围时, 麦克斯韦分布函数和非平衡分布函数下的率参数近似相等 (见图 4), 所以两者的击穿演化过程基本一致, 如图 8 所示.

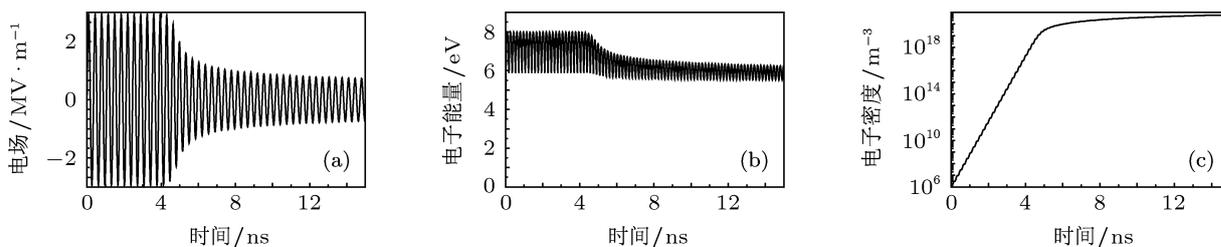


图 7 压强为 760 Torr, HPM 振幅为 4.4 MV/m 和频率为 2.85 GHz 时, 采用非平衡分布函数模拟的击穿演化过程 (a) HPM 电场随时间的变化; (b) 平均电子能量随时间的变化; (c) 电子密度随时间的变化

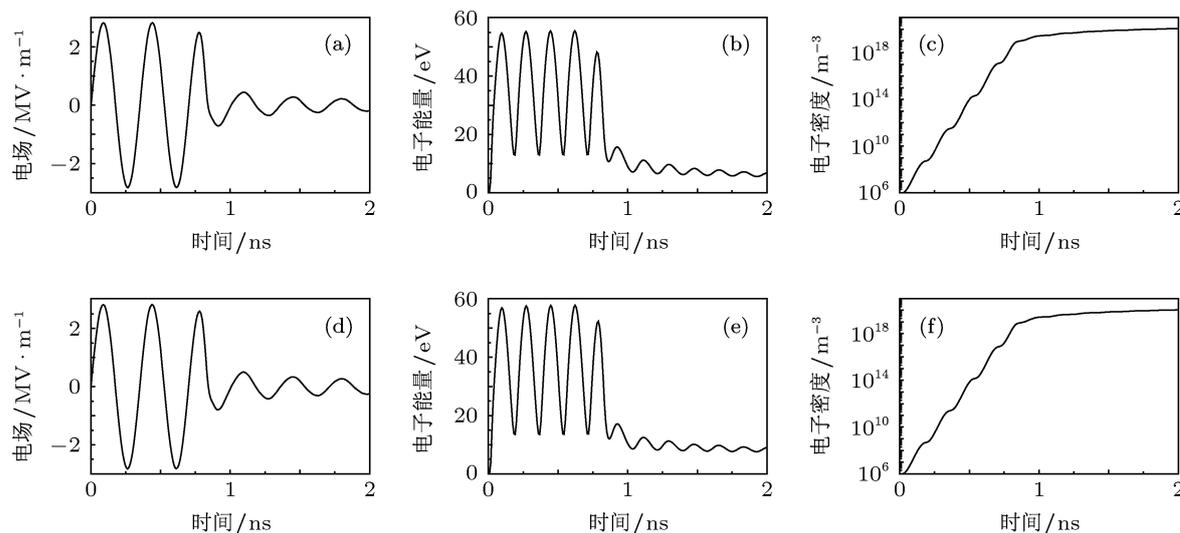


图 8 压强为 20 Torr, HPM 振幅为 2.82 MV/m 和频率为 2.85 GHz 时, HPM 电场、平均电子能量和电子密度随时间的变化 (a)—(c) 为采用麦克斯韦分布函数模拟的结果; (d)—(f) 为采用非平衡分布函数模拟的结果

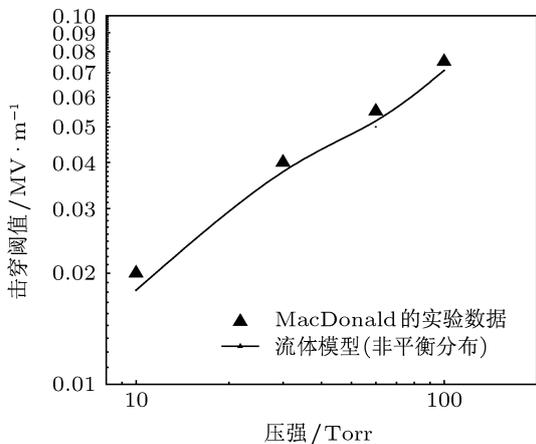


图 9 HPM 频率为 2.8 GHz 时, 模拟结果与实验数据的对比 (实验摘自文献 [20])

最后, 我们采用流体模型和非平衡分布函数计算了不同压强下的氩气击穿阈值, 并将其与实验结果 [20] 进行对比, 如图 9 所示. 其中, 注入的 HPM 为连续波的形式, 频率为 2.8 GHz. 在此情况下, 击穿阈值被定义为加速电子以致能够发生电离的临界场强. 由图 9 可见, 模拟结果与实验数据在随压强的变化趋势上基本符合.

## 4 结论

本文通过求解玻尔兹曼方程, 得到非平衡状态下的电子能量分布函数 (简称非平衡分布函数). 分

别将非平衡分布函数和麦克斯韦分布函数引入到流体模型中,对高功率微波氩气击穿进行了数值模拟.结果发现,相对于粒子模拟结果,高压下采用麦克斯韦分布函数得到的击穿时间较短.这是由于当平均电子能量较低时,麦克斯韦分布函数过高地估计了能量尾部而产生了较大的电离率.但基于非平衡分布函数得到的击穿时间,在各压强下均与粒子

模拟结果符合得很好.此外,当平均电子能量较低时,基于麦克斯韦分布函数得到的击穿演化过程与非平衡分布函数下的模拟结果具有明显的差异,而当平均电子能量较高时两者基本一致.最后,我们采用非平衡分布函数计算了不同压强下的击穿阈值,发现其与实验结果基本符合.

- 
- [1] Zhou Q H, Dong Z W, Chen J Y 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 125202 (in Chinese) [周前红,董志伟,陈京元 2011 物理学报 **60** 125202]
- [2] Cai L B, Wang J G 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 025217 (in Chinese) [蔡利兵,王建国 2011 物理学报 **60** 025217]
- [3] Yu D, Pang X, Jin X, Zhou D, Guo Y 2011 *High Power Laser and Particle Beams* **23** 449 (in Chinese) [余道杰,庞学民,金晓磊,周东方,郭玉华 2011 强激光与粒子束 **23** 449]
- [4] Zhang Z, Shao X, Zhang G, Li Y, Peng Z 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 045205 (in Chinese) [张增辉,邵先军,张冠军,李娅西,彭兆裕 2012 物理学报 **61** 045205]
- [5] Cai L B, Wang J G, Zhu X, Wang Y, Xuan C, Xia H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 075101 (in Chinese) [蔡利兵,王建国,朱湘琴,王玥,宣春,夏洪富 2012 物理学报 **61** 075101]
- [6] Wang G P, Xiang F, Tan J, Cao S H, Luo M, Kang Q, Chang A B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 072901 (in Chinese) [王淦平,向飞,谭杰,曹绍云,罗敏,康强,常安壁 2011 物理学报 **60** 072901]
- [7] Liu G Z, Liu J, Huang W, Zhou J, Song X, Ning H 2000 *Chin. Phys. J.* **9** 757
- [8] Chaudhury B, Boeuf J P 2010 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **38** 2281
- [9] Nam S K, Verboncoeur J P 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 055004
- [10] Balcon N, Hagelaar G J M, Boeuf J P 2008 *IEEE Trans. Plasma Sci.* **36** 2782
- [11] Yee J H, Alvarez R, Mayhall D J, Byrne D P, Degroot J 1986 *Phys. Fluids* **29** 1238
- [12] Kim J, Kuo S P, Kossey P 1995 *J. Plasma Phys.* **53** 253
- [13] Zhao P, Liao C, Lin W, Chang C, Fu H 2011 *Phys. Plasmas* **18** 102111
- [14] Nam S K, Verboncoeur J P 2008 *Appl. Phys. Lett.* **93** 151504
- [15] [http://jila.colorado.edu/~avp/collision\\_data/electronneutral/ELECTRON.TXT](http://jila.colorado.edu/~avp/collision_data/electronneutral/ELECTRON.TXT)
- [16] Hagelaar G J M, Pitchford L C 2005 *Plasma Sources Sci. Technol.* **14** 722
- [17] Zhao P, Liao C, Lin W 2011 *J. of Electromagn. Waves and Appl.* **25** 2365
- [18] Nam S K, Verboncoeur J P 2009 *Computer Phys. Communications* **180** 628
- [19] Kim H C, Verboncoeur J P 2006 *Phys. Plasmas* **13** 123506
- [20] Cook A, Shapiro M, Temkin R 2010 *Appl. Phys. Lett.* **97** 011504

# High power microwave breakdown in gas using the fluid model with non-equilibrium electron energy distribution function<sup>\*</sup>

Zhao Peng-Cheng<sup>†</sup> Liao Cheng Yang Dang Zhong Xuan-Ming Lin Wen-Bin

(*Institute of Electromagnetics, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China*)

(Received 2 August 2012; revised manuscript received 10 October 2012)

## Abstract

The electron energy distribution function (EEDF) is usually assumed to be of the Maxwellian distribution in the fluid model in the simulation of high power microwave breakdown in gas. However, this assumption may lead to some large errors in the simulations. In this paper we compute the non-equilibrium EEDF via solving the Boltzmann equation directly, and incorporate it into the fluid model for argon breakdown. Numerical simulations show that the breakdown time obtained by the fluid model with the non-equilibrium EEDF accords well with the Particle-in-cell-Monte Carlo collision simulation result, while the Maxwellian EEDF has higher energy tail and results in faster breakdown time at low mean electron energy. Based on the non-equilibrium EEDF, the dependence of the breakdown threshold on the pressure predicted by the fluid model accord well with the argon breakdown experimental result.

**Keywords:** microwave breakdown in gas, electron energy distribution function, fluid model, Boltzmann equation

**PACS:** 51.50.+v, 52.80.Pi, 52.35.Mw

**DOI:** 10.7498/aps.62.055101

---

<sup>\*</sup> Project supported by the Joint Fund of the National Natural Science Foundation of China and the China Academy of Engineering Physics (Grant No. 11076022), the Doctoral Found of Ministry of Education of China (Grant No. 20110184110016), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: zhao\_pc2010@163.com