非线性柱形涂层复合介质有效的直流-交流电响应*

李倩倩 陈小刚† 包曙红 郭军明 翟丽丽

(内蒙古工业大学理学院, 呼和浩特 010051)

(2012 年 3 月 13 日收到; 2012 年 10 月 16 日收到修改稿)

利用摄动展开方法, 研究了由圆柱形带涂层杂质随机嵌入基质所形成的非线性复合介质在外加的带有不同频率和振幅的混合电场 $\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1\sin\omega t+\boldsymbol{E}_3\sin 3\omega t$ 作用下有效的直流-交流电响应, 分别推导了复合介质在杂质核、涂层及基质区域的电势分布, 并在低杂质浓度下给出了复合介质有效的非线性响应及它们之间的关系.

关键词: 非线性柱形涂层复合介质, 有效的非线性响应, 外加交直流电场

PACS: 72.20.Ht, 72.60.+g **DOI:** 10.7498/aps.62.057201

1 引 言

复合材料是当今物理学的一个研究热点, 而复合介质又是复合材料中最重要的一种, 其宏观性质既与构成它的各组元本身的性质有关, 也与各组元的形状及混合方式有关 [1], 对这种体系的研究既具重要的理论意义又很有实用价值. 自 20 世纪 80 年代以来 [2,3], 科学家对复合介质的研究逐渐转移到组分具有非线性的电位移矢量 ($\boldsymbol{D}$)-电场 ($\boldsymbol{E}$) 关系 (如 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}+\chi|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{E}$) 的颗粒复合介质上. 对于这种复合介质, 在外加电场作用下, 其介电常数是综合反映其非线性输运性质的最基本的宏观物理量, 其结果有助于分析此类复合介质材料的性能, 以期通过改变材料结构进而设计具有特殊性能的复合介质材料 [1]. 因此, 对这种复合介质有效介电响应的研究一直是数学物理学界广泛研究的问题之一. 在理论上, 通常采用谱表示法 [4−6]、微扰展开法 [7,8] 和 T 矩阵法 [9] 等研究复合介质材料的有效非线性响应. 这些方法各有特点 [10], 谱表示方法通过引入反映微结构的谱密度函数, 将表征微结构信息的参数和物质参数分离, 因此, 只要获得体系的谱密度函数, 就可以计算出体系的有效线性响应和三阶非线性极化率; 对于微扰展开法, 由于弱非线性响应部分可以看作线性部分的微扰, 可通过求解非线性微分方程及静电边界条件, 从而获得非线性响应的解析表达式, 该方法可以用来处理颗粒杂质与基质均为非线性的情况; T 矩阵法是将体系的有效非线性响应表示成为一系列矩阵元的形式, 通过求解体系的矩阵元, 可以解析地给出复合体系的有效非线性响应.

最近, 许多学者对非线性复合介质在交流电场、交直流混合电场作用下有效的非线性响应进行了研究. 例如, Gu[8] 利用摄动法导出了在外加直流电场的情形下非线性复合介质的有效电导率; Yu[11] 利用这种方法得出了球形杂质随机嵌入基质中所构成复合介质的有效电导率; Yu[12] 研究了强非线性复合介质的有效直流电导率; Levy[13] 与 Hui[14,15] 给出了非线性复合介质的高阶有效性响应; 在低浓度下, Gu[16] 和 Wei[17−19] 得到了 Kerr 型非线性复合介质有效的交流电响应; 在外加简单交流电场作用下, Chen[20] 和 Wei[21,22] 讨论了非线性带涂层球形和圆柱形复合介质在各谐波频率下电势分布和有效的交流电响应, 给出了各响应之间的关系; Chen[23] 和 Wei[24] 研究了在外加交流电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{E}_1\sin\omega t+\boldsymbol{E}_3\sin 3\omega t$ 的作用下非线性 Kerr 型复合介质的有效性响应, 给出了基频和三阶谐波频率情形下的有效非线性响应之间的关系; Liu[25] 和 Wei[26] 分别研究了在外加直流和交流混

* 内蒙古自然科学基金 (批准号: 2011MS0113) 和内蒙古人才基金 (2010) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xiaogang_chen@imut.edu.cn

和电场作用下非线性球形和圆柱形复合介质的有效交直流电响应; Wei[27] 给出了非线性复合介质的高阶有效性响应; Natenapit 等 [28] 分别研究了在外加简单交流、交直流电场作用下弱非线性复合介质的直到九阶的有效性高阶响应; Li 等 [29]、Ding 等 [30] 分别研究了梯度型复合介质在外加简单交流电场作用下的有效性非线性响应; Shen 和 Chen[31,32] 研究了在外加混合电场作用下非线性带球形和圆柱形涂层复合介质的有效响应; Hao 和 Chen[33] 研究了球形涂层复合介质在外部交流电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{E}_1\sin\omega t+\boldsymbol{E}_3\sin 3\omega t$ 作用下的有效响应; Potisook 等 [34] 讨论了由弱非线性椭圆柱形杂质随机嵌入线性基质所形成复合介质在外加交流电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{E}_1\sin\omega t+\boldsymbol{E}_3\sin 3\omega t$ 作用下的高阶响应; Ding 等 [35] 利用摄动方法研究了柱形梯度复合介质在外加交直流电场 $\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{E}_0(1+\sin\omega t)$ 作用下的有效非线性响应等等.

本文研究一种带涂层的圆柱形复合介质, 假设电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 之间满足关系

$$\boldsymbol{D}_\alpha=\sigma_\alpha\boldsymbol{E}+x_\alpha|\boldsymbol{E}|^2\boldsymbol{E}, \text{in } \Omega_\alpha, \alpha=\mathrm{i,c,h}, \tag{1}$$

其中下标 $\alpha=\mathrm{i,c,h}$ 分别表示对应于杂质颗粒内部、涂层和基质的物理量, Ω_{i}, Ω_{c} 和 Ω_{h} 分别表示杂质颗粒内部, 涂层和基质所占空间区域, σ_α 和 χ_α 分别是线性和非线性介电常数且与外加电场无关. 我们考虑低频过程, 因而电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 分别满足控制方程

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0, \tag{2}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=0, \tag{3}$$

其边界条件为电势和电位移矢量在内外两种杂质界面及外层杂质和基质界面上是连续的.

2 非线性交直流电过程的摄动方法

考虑将内层半径为 a, 涂层半径为 b 的圆柱形杂质颗粒随机嵌入基质所形成的弱非线性复合介质, 在本构方程中非线性项远小于线性项. 设外加电场

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}}=\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_1\sin\omega t+\boldsymbol{E}_3\sin 3\omega t. \tag{4}$$

沿 $\hat{x}$ 轴正向作用于非线性复合介质, 这里 $\boldsymbol{E}_0=\varepsilon_0\hat{x}$, $\boldsymbol{E}_1=\varepsilon_1\hat{x}$, $\boldsymbol{E}_3=\varepsilon_3\hat{x}$.

由于电场强度满足方程 (3), 故存在电势函数 $\Phi^\alpha(\boldsymbol{x},t)$, 满足

$$\boldsymbol{E}_\alpha=-\nabla\Phi^\alpha(\boldsymbol{x},t). \tag{5}$$

由 (4) 式, $\boldsymbol{x}$ 点处的电势可展开成如下形式:

$$\begin{aligned}\Phi_\alpha(\boldsymbol{x},\omega,t)=&\Phi_0^\alpha(\boldsymbol{x})+\Phi_1^\alpha(\boldsymbol{x})\sin\omega t\\&+\Phi_2^\alpha(\boldsymbol{x})\cos 2\omega t+\Phi_3^\alpha(\boldsymbol{x})\sin 3\omega t\\&+\Phi_4^\alpha(\boldsymbol{x})\cos 4\omega t+\cdots\\&\text{in } \Omega_\alpha,\ \alpha=\mathrm{i,c,h}.\end{aligned} \tag{6}$$

对于弱非线性复合介质, 我们可以选用摄动展开法来处理电势 [8]. 将基质区域的非线性介电常数 χ_{h} 作为摄动参数, 则电势 $\Phi_k^\alpha(\boldsymbol{x})$ 可以展开成如下形式:

$$\begin{aligned}\Phi_k^\alpha(\boldsymbol{x})=&\Phi_k^{0\alpha}(\boldsymbol{x})+\chi_{\mathrm{h}}\Phi_k^{1\alpha}(\boldsymbol{x})\\&+\chi_{\mathrm{h}}^2\Phi_k^{2\alpha}(\boldsymbol{x})+\cdots,\\&\text{in } \Omega_\alpha,\quad \alpha=\mathrm{i,c,h};\\&k=0,1,2,3,\cdots.\end{aligned} \tag{7}$$

这里下标 $k(k=0,1,2,3,\cdots)$ 表示 k 阶谐波频率.

利用电场强度和电势的关系 (5), 并把方程 (6) 和 (7) 代入到方程 (1) 中, 则可以得到电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 在杂质和基质区域的摄动展开式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_\alpha(\boldsymbol{x},\omega,t)=&\boldsymbol{D}_0^\alpha(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{D}_1^\alpha(\boldsymbol{x})\sin\omega t\\&+\boldsymbol{D}_2^\alpha(\boldsymbol{x})\cos 2\omega t+\boldsymbol{D}_3^\alpha(\boldsymbol{x})\sin 3\omega t\\&+\cdots,\quad \alpha=\mathrm{i,c,h}.\end{aligned} \tag{8}$$

这里, 局部电位移矢量 $\boldsymbol{D}_k^\alpha(\boldsymbol{x})$ 可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}_k^\alpha=&\boldsymbol{D}_k^{0\alpha}+\chi_{\mathrm{h}}\boldsymbol{D}_k^{1\alpha}+\chi_{\mathrm{h}}^2\boldsymbol{D}_k^{2\alpha}\\&+\cdots,\text{in}\Omega_\alpha,\quad \alpha=\mathrm{i,c,h},\\&k=0,1,2,3,\cdots.\end{aligned} \tag{9}$$

如果 (9) 式中每一项满足相应的控制方程, 则控制方程 (2) 将成立, 于是得到一组关于 $\boldsymbol{D}_k^\alpha(\boldsymbol{x})$ 的方程:

$$\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{D}_k^{s\alpha}(\boldsymbol{x})=0,\quad \alpha=\mathrm{i,c,h};\\&s=0,1,2,3,\cdots,\quad k=0,1,2,3,\cdots;\end{aligned} \tag{10}$$

这里上标 $s(s=0,1,2,3,\cdots)$ 表示所对应物理量的 s 阶摄动展开.

电势和电位移矢量在边界处分别满足如下条件:

$$\Phi_k^{s\mathrm{i}}(\boldsymbol{x})=\Phi_k^{sc}(\boldsymbol{x}),\hat{n}\cdot\boldsymbol{D}_k^{s\mathrm{i}}(\boldsymbol{x})$$

$$=\hat{n}\cdot \boldsymbol{D}_k^{sc}(\boldsymbol{x}), \quad \mathrm{on}\partial\Omega_{\mathrm{i}},$$
$$s=0,1,2,3,\cdots, \quad k=0,1,2,3,\cdots, \tag{11}$$

$$\Phi_k^{sc}(\boldsymbol{x})=\Phi_k^{sh}(\boldsymbol{x}), \hat{n}\cdot \boldsymbol{D}_k^{sc}(\boldsymbol{x})$$
$$=\hat{n}\cdot \boldsymbol{D}_k^{sh}(\boldsymbol{x}), \quad \mathrm{on}\partial\Omega_{\mathrm{c}},$$
$$k=0,1,2,3,\cdots, \quad s=0,1,2,3,\cdots. \tag{12}$$

这里 $\partial\Omega_{\mathrm{i}}$ 和 $\partial\Omega_{\mathrm{c}}$ 表示内外两层杂质界面和外层杂质与基质界面.

无穷远处的电势满足如下条件:

$$\left.\frac{\partial \Phi_k^{sh}(\boldsymbol{x})}{\partial x}\right|_{x\to\infty} = \begin{cases} -\varepsilon_0, & s=0,\ k=0\text{时}, \\ -\varepsilon_1, & s=0,\ k=1\text{时}, \\ -\varepsilon_3, & s=0,\ k=3\text{时}, \\ 0, & s\neq 0\text{或 当}s=0\text{ 且}k\neq 0,1,3\text{时}. \end{cases} \tag{13}$$

3 非线性复合介质的电势分布

由方程 (8), (9), 可得在 0, ω, 2ω, 和 3ω 阶谐波频率下零阶电势所满足的控制方程分别为

$$\sigma_{\mathrm{i}}\nabla^2\Phi_k^{0\mathrm{i}}=0, \quad k=0,1,2,3, \ \text{in } \Omega_{\mathrm{i}}, \tag{14}$$

$$\sigma_{\mathrm{c}}\nabla^2\Phi_k^{0\mathrm{c}}=0, \quad k=0,1,2,3, \ \text{in } \Omega_{\mathrm{c}}, \tag{15}$$

$$\sigma_{\mathrm{h}}\nabla^2\Phi_k^{0\mathrm{h}}=0, \quad k=0,1,2,3, \ \text{in } \Omega_{\mathrm{h}}. \tag{16}$$

利用边界条件 (11)—(13), 解上述方程可得在 0, ω, 3ω 阶谐波频率下零阶电势为

$$\Phi_0^{0\mathrm{i}}(\boldsymbol{x})=A_0(a_0+1)r\varepsilon_0\cos\theta, \quad (r\leqslant a), \tag{17}$$

$$\Phi_0^{0\mathrm{c}}(\boldsymbol{x})=A_0(a_0 r+a^2r^{-1})\varepsilon_0\cos\theta, \quad (a\leqslant r\leqslant b), \tag{18}$$

$$\Phi_0^{0\mathrm{h}}(\boldsymbol{x})=(-r+B_0b^2r^{-1})\varepsilon_0\cos\theta, \quad (r\geqslant b); \tag{19}$$

$$\Phi_1^{0\mathrm{i}}(\boldsymbol{x})=A_0(a_0+1)r\varepsilon_1\cos\theta, \quad (r\leqslant a), \tag{20}$$

$$\Phi_1^{0\mathrm{c}}(\boldsymbol{x})=A_0(a_0 r+a^2r^{-1})\varepsilon_1\cos\theta, \quad (a\leqslant r\leqslant b), \tag{21}$$

$$\Phi_1^{0\mathrm{h}}(\boldsymbol{x})=(-r+B_0b^2r^{-1})\varepsilon_1\cos\theta, \quad (r\geqslant b); \tag{22}$$

$$\Phi_3^{0\mathrm{i}}(\boldsymbol{x})=A_0(a_0+1)r\varepsilon_3\cos\theta, \quad (r\leqslant a), \tag{23}$$

$$\Phi_3^{0\mathrm{c}}(\boldsymbol{x})=A_0(a_0 r+a^2r^{-1})\varepsilon_3\cos\theta, \quad (a\leqslant r\leqslant b), \tag{24}$$

$$\Phi_3^{0\mathrm{h}}(\boldsymbol{x})=(-r+B_0b^2r^{-1})\varepsilon_3\cos\theta, \quad (r\geqslant b); \tag{25}$$

其中, A_0, B_0 和 a_0 分别为

$$A_0=\frac{2(\sigma_{\mathrm{i}}-\sigma_{\mathrm{c}})\sigma_{\mathrm{h}}}{(\sigma_{\mathrm{i}}+\sigma_{\mathrm{c}})(\sigma_{\mathrm{c}}+\sigma_{\mathrm{h}})+(\sigma_{\mathrm{i}}-\sigma_{\mathrm{c}})(\sigma_{\mathrm{c}}-\sigma_{\mathrm{h}})\left(\frac{a}{b}\right)^2}, \tag{26}$$

$$B_0=A_0\left(a_0+\frac{a^2}{b^2}\right)+1, \tag{27}$$

$$a_0=\frac{\sigma_{\mathrm{i}}+\sigma_{\mathrm{c}}}{\sigma_{\mathrm{c}}-\sigma_{\mathrm{i}}}. \tag{28}$$

由 2ω 阶谐波频率下零阶电势所满足的控制方程及边界条件可得

$$\Phi_2^{0\alpha}(\boldsymbol{x})=0, \quad \alpha=\mathrm{i,c,h}. \tag{29}$$

为进一步推导, 先给出如下在不同谐波频率下一阶电势所满足的控制方程

$$\sigma_\alpha\nabla^2\Phi_0^{1\alpha}+\beta_\alpha\nabla\cdot\Bigg[\left(|\nabla\Phi_0^{0\alpha}|^2+\frac{1}{2}|\nabla\Phi_1^{0\alpha}|^2+\frac{1}{2}|\nabla\Phi_3^{0\alpha}|^2\right)\nabla\Phi_0^{0\alpha}+|\nabla\Phi_0^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_1^{0\alpha}|\nabla\Phi_1^{0\alpha}+|\nabla\Phi_0^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_1^{0\alpha}|\nabla\Phi_3^{0\alpha}\Bigg]=0, \tag{30}$$

$$\sigma_\alpha\nabla^2\Phi_1^{1\alpha}+\beta_\alpha\nabla\cdot\Bigg[2|\nabla\Phi_0^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_1^{0\alpha}|\nabla\Phi_0^{0\alpha}+\left(|\nabla\Phi_0^{0\alpha}|^2+\frac{3}{4}|\nabla\Phi_1^{0\alpha}|^2-\frac{1}{2}|\nabla\Phi_1^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_3^{0\alpha}|+\frac{1}{2}|\nabla\Phi_3^{0\alpha}|^2\right)\nabla\Phi_1^{0\alpha}+\left(-\frac{1}{4}|\nabla\Phi_1^{0\alpha}|^2+|\nabla\Phi_1^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_3^{0\alpha}|\right)\nabla\Phi_3^{0\alpha}\Bigg]=0, \tag{31}$$

$$\sigma_\alpha\nabla^2\Phi_2^{1\alpha}+\beta_\alpha\nabla\cdot\Bigg[\left(-\frac{1}{2}|\nabla\Phi_1^{0\alpha}|^2+|\nabla\Phi_1^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_3^{0\alpha}|\right)\nabla\Phi_0^{0\alpha}+\left(-|\nabla\Phi_0^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_1^{0\alpha}|+|\nabla\Phi_0^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_3^{0\alpha}|\right)\nabla\Phi_1^{0\alpha}+\frac{1}{2}|\nabla\Phi_0^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_1^{0\alpha}|\nabla\Phi_3^{0\alpha}\Bigg]=0, \tag{32}$$

$$\sigma_\alpha\nabla^2\Phi_3^{1\alpha}+\beta_\alpha\nabla\cdot\Bigg[2|\nabla\Phi_0^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_3^{0\alpha}|\nabla\Phi_0^{0\alpha}+\left(-\frac{1}{4}|\nabla\Phi_1^{0\alpha}|^2+|\nabla\Phi_1^{0\alpha}\cdot\nabla\Phi_3^{0\alpha}|\right)\nabla\Phi_1^{0\alpha}+\left(|\nabla\Phi_0^{0\alpha}|^2+\frac{1}{2}|\nabla\Phi_1^{0\alpha}|^2$$

$$+\frac{3}{4}|\nabla\Phi_3^{0\alpha}|^2\Big)\nabla\Phi_3^{0\alpha}\Big]=0, \tag{33}$$

这里 $\beta_\alpha=\chi_\alpha/\chi_h$, $\alpha=\mathrm{i,c,h}$.

利用边界条件 (11)—(13), 可得在 0, ω, 2ω 和 3ω 阶谐波频率下的一阶电势分别为

$$\Phi_0^{1\mathrm{i}}(\boldsymbol{x})=(A_0^{1\mathrm{i}}r\cos\theta+A_0^{3\mathrm{i}}r^3\cos3\theta)\times\left(\varepsilon_0^3+\frac{3}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1^2+\frac{3}{2}\varepsilon_0\varepsilon_3^2\right),\quad(r\leqslant a), \tag{34}$$

$$\Phi_0^{1\mathrm{c}}(\boldsymbol{x})=\Big[(A_0^{1\mathrm{c}}r+C_0^{1\mathrm{c}}r^{-1}+C_0^{2\mathrm{c}}a^4r^{-3}+C_0^{3\mathrm{c}}a^6r^{-5})\cos\theta+(A_0^{3\mathrm{c}}r^3+D_0^{1\mathrm{c}}r^{-3}+D_0^{2\mathrm{c}}r^{-1})\cos3\theta\Big]\times\left(\varepsilon_0^3+\frac{3}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1^2+\frac{3}{2}\varepsilon_0\varepsilon_3^2\right),\quad(a\leqslant r\leqslant b), \tag{35}$$

$$\Phi_0^{1\mathrm{h}}(\boldsymbol{x})=\Big[(C_0^{1\mathrm{h}}r^{-1}+C_0^{2\mathrm{h}}r^{-3}+C_0^{3\mathrm{h}}r^{-5})\cos\theta+(D_0^{1\mathrm{h}}r^{-3}+D_0^{2\mathrm{h}}r^{-1})\cos3\theta\Big]\times\left(\varepsilon_0^3+\frac{3}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1^2+\frac{3}{2}\varepsilon_0\varepsilon_3^2\right),\quad(r\geqslant b), \tag{36}$$

$$\Phi_1^{1\mathrm{i}}(\boldsymbol{x})=(A_1^{1\mathrm{i}}r\cos\theta+A_1^{3\mathrm{i}}r^3\cos3\theta)\left(3\varepsilon_0^2\varepsilon_1+\frac{3}{4}\varepsilon_1^3-\frac{3}{4}\varepsilon_1^2\varepsilon_3+\frac{3}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3^2\right),\quad(r\leqslant a), \tag{37}$$

$$\Phi_1^{1\mathrm{c}}(\boldsymbol{x})=\Big[\big(A_1^{1\mathrm{c}}r+C_1^{1\mathrm{c}}r^{-1}+C_1^{2\mathrm{c}}a^4r^{-3}+C_1^{3\mathrm{c}}a^6r^{-5}\big)\times\cos\theta+\big(A_1^{3\mathrm{c}}r^3+D_1^{1\mathrm{c}}r^{-3}+D_1^{2\mathrm{c}}r^{-1}\big)\cos3\theta\Big]\left(3\varepsilon_0^2\varepsilon_1+\frac{3}{4}\varepsilon_1^3-\frac{3}{4}\varepsilon_1^2\varepsilon_3+\frac{3}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3^2\right),\quad(a\leqslant r\leqslant b), \tag{38}$$

$$\Phi_1^{1\mathrm{h}}(\boldsymbol{x})=\Big[\big(C_1^{1\mathrm{h}}r^{-1}+C_1^{2\mathrm{h}}r^{-3}+C_1^{3\mathrm{h}}r^{-5}\big)\cos\theta+\big(D_1^{1\mathrm{h}}r^{-3}+D_1^{2\mathrm{h}}r^{-1}\big)\cdot\cos3\theta\Big]\times\left(3\varepsilon_0^2\varepsilon_1+\frac{3}{4}\varepsilon_1^3-\frac{3}{4}\varepsilon_1^2\varepsilon_3+\frac{3}{2}\varepsilon_1\varepsilon_3^2\right),\quad(r\geqslant b), \tag{39}$$

$$\Phi_2^{1\mathrm{i}}(\boldsymbol{x})=\big(A_2^{1\mathrm{i}}r\cos\theta+A_2^{3\mathrm{i}}r^3\cos3\theta\big)\times\left(-\frac{3}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1^2+3\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_3\right),\quad(r\leqslant a), \tag{40}$$

$$\Phi_2^{1\mathrm{c}}(\boldsymbol{x})=\Big[\big(A_2^{1\mathrm{c}}r+C_2^{1\mathrm{c}}r^{-1}+C_2^{2\mathrm{c}}a^4r^{-3}+C_2^{3\mathrm{c}}a^6r^{-5}\big)\times\cos\theta+\big(A_2^{3\mathrm{c}}r^3+D_2^{1\mathrm{c}}r^{-3}+D_2^{2\mathrm{c}}r^{-1}\big)\cos3\theta\Big]\times\left(-\frac{3}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1^2+3\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_3\right),\quad(a\leqslant r\leqslant b), \tag{41}$$

$$\Phi_2^{1\mathrm{h}}(\boldsymbol{x})=\Big[\big(C_2^{1\mathrm{h}}r^{-1}+C_2^{2\mathrm{h}}r^{-3}+C_2^{3\mathrm{h}}r^{-5}\big)\cos\theta+\big(D_2^{1\mathrm{h}}r^{-3}+D_2^{2\mathrm{h}}r^{-1}\big)\cos3\theta\Big]\times\left(-\frac{3}{2}\varepsilon_0\varepsilon_1^2+3\varepsilon_0\varepsilon_1\varepsilon_3\right),\quad(r\geqslant b), \tag{42}$$

$$\Phi_3^{1\mathrm{i}}(\boldsymbol{x})=\big(A_3^{1\mathrm{i}}r\cos\theta+A_3^{3\mathrm{i}}r^3\cos3\theta\big)\times\left(3\varepsilon_0^2\varepsilon_3-\frac{1}{4}\varepsilon_1^3+\frac{3}{2}\varepsilon_1^2\varepsilon_3+\frac{3}{4}\varepsilon_3^3\right),\quad(r\leqslant a), \tag{43}$$

$$\Phi_3^{1\mathrm{c}}(\boldsymbol{x})=\Big[\big(A_3^{1\mathrm{c}}r+C_3^{1\mathrm{c}}r^{-1}+C_3^{2\mathrm{c}}a^4r^{-3}+C_3^{3\mathrm{c}}a^6r^{-5}\big)\cos\theta+\big(A_3^{3\mathrm{c}}r^3+D_3^{1\mathrm{c}}r^{-3}+D_3^{2\mathrm{c}}r^{-1}\big)\cos3\theta\Big]\times\left(3\varepsilon_0^2\varepsilon_3-\frac{1}{4}\varepsilon_1^3+\frac{3}{2}\varepsilon_1^2\varepsilon_3+\frac{3}{4}\varepsilon_3^3\right),\quad(a\leqslant r\leqslant b), \tag{44}$$

$$\Phi_3^{1\mathrm{h}}(\boldsymbol{x})=\Big[\big(C_3^{1\mathrm{h}}r^{-1}+C_3^{2\mathrm{h}}r^{-3}+C_3^{3\mathrm{h}}r^{-5}\big)\cos\theta+\big(D_3^{1\mathrm{h}}r^{-3}+D_3^{2\mathrm{h}}r^{-1}\big)\cos3\theta\Big]\times\left(3\varepsilon_0^2\varepsilon_3-\frac{1}{4}\varepsilon_1^3+\frac{3}{2}\varepsilon_1^2\varepsilon_3+\frac{3}{4}\varepsilon_3^3\right),\quad(r\geqslant b). \tag{45}$$

本文研究在交直流混合电场作用下, 圆柱形带涂层非线性复合介质的有效性响应, 这里我们只给出在后面对计算有效性响应有用的系数

$$A_0^{1\mathrm{i}}=\frac{A_0^3}{\sigma_\mathrm{i}+\sigma_\mathrm{c}}\left[2\sigma_\mathrm{c}F_1\frac{\sigma_\mathrm{c}-\sigma_\mathrm{h}}{\sigma_\mathrm{i}+\sigma_\mathrm{c}}\left(\frac{a}{b}\right)^2-1\right]\times\left[\beta_\mathrm{i}(a_0+1)^3+\beta_\mathrm{c}F_3\right]+\frac{2\sigma_\mathrm{c}}{\sigma_\mathrm{i}+\sigma_\mathrm{c}}F_1(F_2+\beta_\mathrm{c}A_0^3F_4), \tag{46}$$

$$A_0^{1c} = F_1\left\{F_2 + \frac{\sigma_c - \sigma_h}{\sigma_i + \sigma_c}A_0^3\left(\frac{a}{b}\right)^2 \times\left[\beta_i(a_0+1)^3 + \beta_c F_3\right]\right\} + F_1\beta_c A_0^3 F_4, \tag{47}$$

$$C_0^{2c} = \frac{\beta_c}{\sigma_c}A_0^3 a_0, \quad C_0^{3c} = -\frac{\beta_c}{6\sigma_c}A_0^3, \tag{48}$$

$$C_1^{2c} = C_0^{2c}, \quad C_1^{3c} = C_0^{3c},$$

$$A_1^{1i} = A_0^{1i}, \quad A_1^{1c} = A_0^{1c}. \tag{49}$$

这里,

$$F_1 = \frac{-(\sigma_i + \sigma_c)}{(\sigma_i + \sigma_c)(\sigma_c + \sigma_h) + (\sigma_i - \sigma_c)(\sigma_c - \sigma_h)\left(\frac{a}{b}\right)^2},$$

$$F_2 = \frac{1}{3}B_0^3 + 2B_0 + 1, \quad F_3 = -a_0^3 + 2a_0^2 + \frac{1}{3},$$

$$F_4 = -\frac{1}{6}\left(\frac{a}{b}\right)^6\left(1+\frac{\sigma_h}{\sigma_c}\right) - a_0\left(\frac{a}{b}\right)^4\left(1-\frac{\sigma_h}{\sigma_c}\right) + a_0\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(1-\frac{\sigma_h}{\sigma_c}\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(1-\frac{\sigma_h}{\sigma_c}\right) - 2a_0^2\left(\frac{a}{b}\right)^2 + a_0^3.$$

4 有效的交流直流电响应

在低杂质浓度下, 利用文献 [8] 研究复合介质有效的直流电响应方法, 可得

$$\frac{1}{V}\int_V \left[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\omega,t) - (\sigma_h \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega,t) + x_h|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega,t)|^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega,t))\right]\mathrm{d}V = \bar{\boldsymbol{D}}(\omega,t) - \left[\sigma_h\bar{\boldsymbol{E}}(\omega,t) + x_h|\bar{\boldsymbol{E}}(\omega,t)|^2\bar{\boldsymbol{E}}(\omega,t)\right], \tag{50}$$

这里 $V = \Omega_i + \Omega_c + \Omega_h$. $\bar{\boldsymbol{D}}$ 和 $\bar{\boldsymbol{E}}$ 分别表示电位移矢量和电场强度在整个场内的体积平均.

由于方程 (50) 的左边在区域 Ω_h 内为零, 故可简化成如下形式:

$$\frac{1}{V}\int_{\Omega_i+\Omega_c} \left[\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x},\omega,t) - (\sigma_h \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega,t) + x_h|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega,t)|^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},\omega,t))\right]\mathrm{d}V = \bar{\boldsymbol{D}}(\omega,t) - \left[\sigma_h\bar{\boldsymbol{E}}(\omega,t) + x_h|\bar{\boldsymbol{E}}(\omega,t)|^2\bar{\boldsymbol{E}}(\omega,t)\right]. \tag{51}$$

因为本构关系是三次非线性的, 所以在外加电场 $\boldsymbol{E}_a = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1\sin\omega t + \boldsymbol{E}_3\sin 3\omega t$ 作用下, 电位移矢量包含很多谐波分量, 复合介质的有效的交直流电响应可定义如下:

$$\bar{\boldsymbol{D}}(\omega,t) = \bar{\boldsymbol{D}}_0 + \bar{\boldsymbol{D}}_1\sin\omega t + \bar{\boldsymbol{D}}_2\cos 2\omega t + \bar{\boldsymbol{D}}_3\sin 3\omega t + \cdots, \tag{52}$$

其中 $\bar{\boldsymbol{D}}_n = \sigma_{n\omega}^*\bar{\boldsymbol{E}} + \chi_{n\omega}^*|\bar{\boldsymbol{E}}|^2\bar{\boldsymbol{E}} + \cdots, n = 0,1,2,3,\cdots$; $\sigma_{n\omega}^*$ 和 $\chi_{n\omega}^*$ 是 n 阶谐波频率 $n\omega$ 下所对应的线性和非线性有效介电常数.

在 $\boldsymbol{x}$ 点的电场强度为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}_\alpha(\boldsymbol{x},\omega,t) =& \boldsymbol{E}_0^\alpha(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{E}_1^\alpha(\boldsymbol{x})\sin\omega t + \boldsymbol{E}_2^\alpha(\boldsymbol{x})\cos 2\omega t + \boldsymbol{E}_3^\alpha(\boldsymbol{x})\sin 3\omega t + \cdots \\ =& -\left[\nabla\Phi_0^{0\alpha}(\boldsymbol{x}) + x_h\nabla\Phi_0^{1\alpha}(\boldsymbol{x}) + \cdots\right] - \left[\nabla\Phi_1^{0\alpha}(\boldsymbol{x}) + x_h\nabla\Phi_1^{1\alpha}(\boldsymbol{x})\right]\sin\omega t \\ & - \left[\nabla\Phi_2^{0\alpha}(\boldsymbol{x}) + x_h\nabla\Phi_2^{1\alpha}(\boldsymbol{x}) + \cdots\right]\cos 2\omega t - \left[\nabla\Phi_3^{0\alpha}(\boldsymbol{x}) + x_h\nabla\Phi_3^{1\alpha}(\boldsymbol{x})\right]\sin 3\omega t + \cdots. \end{aligned} \tag{53}$$

将方程 (53) 和方程 (52) 代入到方程 (51) 中, 就可以得到圆柱形带涂层非线性复合介质的有效性响应为

在零阶频率下,

$$\sigma_{0,0}^* = \sigma_h - (\sigma_i - \sigma_h)A_0(a_0+1)f_i - (\sigma_c - \sigma_h)A_0 a_0 f_c, \tag{54}$$

$$\begin{aligned}\chi_{0,0}^* =& x_h - \left[(x_i - x_h)A_0^3(a_0+1)^2 f_i + (x_c - x_h)A_0^3\left(a_0^3 + a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_c\right] \\ & - x_h\left[(\sigma_i - \sigma_h)A_0^{1i}f_i + (\sigma_c - \sigma_h) \times\left(A_0^{1c} - \frac{a^2}{b^2}C_0^{2c} - \frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3c}\right)f_c\right],\end{aligned} \tag{55}$$

$$\chi_{0(\omega)^2,0}^* = \frac{3}{2}x_h - \frac{3}{2}\left[(x_i - x_h)A_0^3(a_0+1)^2 f_i + (x_c - x_h)A_0^3\left(a_0^3 + a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_c\right] - \frac{3}{2}x_h\left[(\sigma_i - \sigma_h)A_0^{1i}f_i + (\sigma_c - \sigma_h)\right.$$

$$\times\left(A_0^{1c}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2c}-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3c}\right)f_c\Bigg], \tag{56}$$

$$\chi^*_{0(3\omega)^2,0}=\frac{3}{2}x_h-\frac{3}{2}\left[(x_i-x_h)A_0^3(a_0+1)^2f_i+(x_c-x_h)A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_c\right]-\frac{3}{2}x_h\Bigg[(\sigma_i-\sigma_h)A_0^{1i}f_i+(\sigma_c-\sigma_h)\times\left(A_0^{1c}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2c}-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3c}\right)f_c\Bigg]; \tag{57}$$

在基频 ω 下,

$$\sigma^*_{\omega,\omega}=\sigma_h-(\sigma_i-\sigma_h)A_0(a_0+1)f_i-(\sigma_c-\sigma_h)A_0a_0f_c, \tag{58}$$

$$\chi^*_{0^2(\omega),\omega}=3x_h-3\left[(x_i-x_h)A_0^3(a_0+1)^2f_i+(x_c-x_h)A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_c\right]-3x_h\Bigg[(\sigma_i-\sigma_h)A_0^{1i}f_i+(\sigma_c-\sigma_h)(A_0^{1c}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2c}-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3c}\Big)f_c\Bigg], \tag{59}$$

$$\chi^*_{(\omega^3),\omega}=\frac{3}{4}x_h-\frac{3}{4}\left[(x_i-x_h)A_0^3(a_0+1)^2f_i+(x_c-x_h)A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_c\right]-\frac{3}{4}x_h\Bigg[(\sigma_i-\sigma_h)A_0^{1i}f_i+(\sigma_c-\sigma_h)\left(A_0^{1c}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2c}-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3c}\right)f_c\Bigg], \tag{60}$$

$$\chi^*_{(\omega^2)3\omega,\omega}=-\frac{3}{4}x_h+\frac{3}{4}\left[(x_i-x_h)A_0^3(a_0+1)^2f_i+(x_c-x_h)A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_c\right]+\frac{3}{4}x_h\Bigg[(\sigma_i-\sigma_h)A_0^{1i}f_i+(\sigma_c-\sigma_h)\left(A_0^{1c}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2c}-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3c}\right)f_c\Bigg], \tag{61}$$

$$\chi^*_{\omega(3\omega)^2,\omega}=\frac{3}{2}x_h-\frac{3}{2}\left[(x_i-x_h)A_0^3(a_0+1)^2f_i+(x_c-x_h)A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_c\right]-\frac{3}{2}x_h\Bigg[(\sigma_i-\sigma_h)A_0^{1i}f_i+(\sigma_c-\sigma_h)\left(A_0^{1c}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2c}-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3c}\right)f_c\Bigg]; \tag{62}$$

在二次谐波频率 2ω 下,

$$\sigma^*_{2\omega,2\omega}=\sigma_h-(\sigma_i-\sigma_h)A_0(a_0+1)f_i-(\sigma_c-\sigma_h)A_0a_0f_c, \tag{63}$$

$$\chi^*_{0(\omega^2),2\omega}=-\frac{3}{2}x_h+\frac{3}{2}\left[(x_i-x_h)A_0^3(a_0+1)^2f_i+(x_c-x_h)A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_c\right]+\frac{3}{2}x_h\Bigg[(\sigma_i-\sigma_h)A_0^{1i}f_i+(\sigma_c-\sigma_h)\left(A_0^{1c}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2c}-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3c}\right)f_c\Bigg], \tag{64}$$

$$\chi^*_{0(\omega)3\omega,2\omega}=3x_h-3\left[(x_i-x_h)A_0^3(a_0+1)^2f_i+(x_c-x_h)A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_c\right]-3x_h\Bigg[(\sigma_i-\sigma_h)A_0^{1i}f_i+(\sigma_c-\sigma_h)\left(A_0^{1c}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2c}-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3c}\right)f_c\Bigg]; \tag{65}$$

在三次谐波频率 3ω 下,

$$\sigma^*_{3\omega,3\omega}=\sigma_h-(\sigma_i-\sigma_h)A_0(a_0+1)f_i-(\sigma_c-\sigma_h)A_0a_0f_c, \tag{66}$$

$$\begin{aligned}\chi^*_{0^2(3\omega),3\omega} =&3x_\mathrm{h}-3\bigg[(x_\mathrm{i}-x_\mathrm{h})A_0^3(a_0+1)^2f_\mathrm{i}\\&+(x_\mathrm{c}-x_\mathrm{h})A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_\mathrm{c}\bigg]\\&-3x_\mathrm{h}\bigg[(\sigma_\mathrm{i}-\sigma_\mathrm{h})A_0^{1\mathrm{i}}f_\mathrm{i}\\&+(\sigma_\mathrm{c}-\sigma_\mathrm{h})\bigg(A_0^{1\mathrm{c}}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2\mathrm{c}}\\&-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3\mathrm{c}}\bigg)f_\mathrm{c}\bigg],\end{aligned}\tag{67}$$

$$\begin{aligned}\chi^*_{(\omega^3),3\omega} =&-\frac{1}{4}x_\mathrm{h}+\frac{1}{4}\bigg[(x_\mathrm{i}-x_\mathrm{h})A_0^3(a_0+1)^2f_\mathrm{i}\\&+(x_\mathrm{c}-x_\mathrm{h})A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_\mathrm{c}\bigg]\\&+\frac{1}{4}x_\mathrm{h}\bigg[(\sigma_\mathrm{i}-\sigma_\mathrm{h})A_0^{1\mathrm{i}}f_\mathrm{i}\\&+(\sigma_\mathrm{c}-\sigma_\mathrm{h})\bigg(A_0^{1\mathrm{c}}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2\mathrm{c}}\\&-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3\mathrm{c}}\bigg)f_\mathrm{c}\bigg],\end{aligned}\tag{68}$$

$$\begin{aligned}\chi^*_{(\omega^2)3\omega,3\omega} =&\frac{3}{2}x_\mathrm{h}-\frac{3}{2}\bigg[(x_\mathrm{i}-x_\mathrm{h})A_0^3(a_0+1)^2f_\mathrm{i}\\&+(x_\mathrm{c}-x_\mathrm{h})A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_\mathrm{c}\bigg]\\&-\frac{3}{2}x_\mathrm{h}\bigg[(\sigma_\mathrm{i}-\sigma_\mathrm{h})A_0^{1\mathrm{i}}f_\mathrm{i}\\&+(\sigma_\mathrm{c}-\sigma_\mathrm{h})\bigg(A_0^{1\mathrm{c}}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2\mathrm{c}}\\&-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3\mathrm{c}}\bigg)f_\mathrm{c}\bigg],\end{aligned}\tag{69}$$

$$\begin{aligned}\chi^*_{(3\omega)^3,3\omega} =&\frac{3}{4}x_\mathrm{h}-\frac{3}{4}\bigg[(x_\mathrm{i}-x_\mathrm{h})A_0^3(a_0+1)^2f_\mathrm{i}\\&+(x_\mathrm{c}-x_\mathrm{h})A_0^3\left(a_0^3+a_0\frac{a^2}{b^2}\right)f_\mathrm{c}\bigg]\\&-\frac{3}{4}x_\mathrm{h}\bigg[(\sigma_\mathrm{i}-\sigma_\mathrm{h})A_0^{1\mathrm{i}}f_\mathrm{i}\\&+(\sigma_\mathrm{c}-\sigma_\mathrm{h})\bigg(A_0^{1\mathrm{c}}-\frac{a^2}{b^2}C_0^{2\mathrm{c}}\\&-\frac{a^2}{b^2}\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)C_0^{3\mathrm{c}}\bigg)f_\mathrm{c}\bigg].\end{aligned}\tag{70}$$

这里 $f_\mathrm{i}, f_\mathrm{c}$ 分别是杂质核和涂层所占有的体积百分比, $a^2/b^2 = f_\mathrm{i}(f_\mathrm{i}+f_\mathrm{c})$, 系数 $A_0, B_0, a_0, A_0^{1\mathrm{i}}, A_0^{1\mathrm{c}}, C_0^{2\mathrm{c}}, C_0^{3\mathrm{c}}, A_1^{1\mathrm{i}}, A_1^{1\mathrm{c}}, C_1^{2\mathrm{c}}, C_1^{3\mathrm{c}}$ 分别由 (26)—(28), (46)—(49) 式给出.

由 (17)—(28), (34)—(49), (54)—(70) 式可知, 有效的非线性响应不仅包含外加交直流电场的直流分量、交流基频分量和三阶谐波频率分量之间的相互作用, 还包含杂质核、杂质涂层以及基质之间的相互作用.

5 结论与讨论

本文利用摄动方法研究了弱非线性圆柱形带涂层复合介质在外加的具有不同振幅和频率的交直流电场 $\boldsymbol{E}_\mathrm{a} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1\sin\omega t + \boldsymbol{E}_3\sin3\omega t$ 作用下的有效性响应问题, 在低杂质浓度下给出了非线性复合介质在各阶谐波频率下的有效性响应.

与文献 [15—25, 28—30] 的研究相比, 这里所研究的非线性复合介质结构更为复杂, 且外加电场包含直流分量、交流基频分量和三阶谐波分量, 所以有效的非线性响应不仅包含外加交直流电场的直流分量、交流基频分量和三阶谐波频率分量之间的相互作用, 还包含杂质核、杂质涂层以及基质之间的相互作用. 此外, 由于外加电场含有直流分量以及复合介质的非线性特点, 带圆柱形涂层的非线性响应 (54)—(70) 中存在二次谐波频率的表达式.

通过比较, 可以得到如下关系:

$$\begin{aligned}&\sigma^*_{\omega,\omega} = \sigma^*_{2\omega,2\omega} = \sigma^*_{3\omega,3\omega} = \sigma^*_{0,0},\\&\chi^*_{0(\omega)^2,0} = \chi^*_{0(3\omega)^2,0} = \chi^*_{\omega(3\omega)^2,\omega} = \chi^*_{\omega^2(3\omega),3\omega} = \frac{3}{2}\chi^*_{0,0},\\&\chi^*_{0(\omega^2),2\omega} = -\frac{3}{2}\chi^*_{0,0},\\&\chi^*_{0^2(\omega),\omega} = \chi^*_{0(\omega)3\omega,2\omega} = \chi^*_{0^2(3\omega),3\omega} = 3\chi^*_{0,0},\\&\chi^*_{(\omega^3),\omega} = \chi^*_{(3\omega)^3,3\omega} = \frac{3}{4}\chi^*_{0,0},\\&\chi^*_{(\omega)^23\omega,\omega} = -\frac{3}{4}\chi^*_{0,0},\\&\chi^*_{(\omega^3),3\omega} = -\frac{1}{4}\chi^*_{0,0}.\end{aligned}$$

由此可知, 若已知非线性复合介质零阶频率下的有效性响应, 则利用这些关系可以估计这种非线性复合介质在基频、二次及三次谐波频率下的有效性响应.

最后, 若 $\varepsilon_3 = 0$ 或 $\sigma_\mathrm{c} = \sigma_\mathrm{h}$ 和 $\chi_\mathrm{c} = \chi_\mathrm{h}$, 即外加电场为 $\boldsymbol{E}_\alpha = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1\sin\omega t$ 或复合介质为不带涂层的非线性圆柱形复合介质时, 这里所得结果即可简化为 Shen[31,32] 的结果.

[1] Yin Z W 2003 *Dielectric Physics, 2nd Version* (Beijing: Science Press) 1–27 (in Chinese) [殷之文 2003 电介质物理学 第二版 (北京: 科学出版社) 第 1—27 页]

[2] Xie B C, Gao L 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 365 (in Chinese) [谢秉川, 高雷 2000 物理学报 **49** 365]

[3] Gao L, Hong G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 575 (in Chinese) [高雷, 洪刚 2003 物理学报 **52** 575]

[4] Bergman D J 1978 *Phys. Rep.* **43** 337

[5] Li X T, Ma H R 1999 *Acta Phys. Sin.* **48** 461 (in Chinese) [李向亭, 马红孺 1999 物理学报 **48** 461]

[6] Gao L 2001 *J Phys.*: *Condense Matter.* **13** 7271

[7] Gu G Q, Yu K W 1991 *Acta Phys. Sin.* **40** 709 (in Chinese) [顾国庆, 余建华 1991 物理学报 **40** 709]

[8] Gu G Q, Yu K W 1992 *Phys. Rev.* B **46** 4502

[9] Yuen K P, Law M F, Yu K W 1997 *Phys. Rev.* E **56** 1322

[10] Wu Y M, Chen G Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5242 (in Chinese) [吴亚敏, 陈国庆 2006 物理学报 **55** 5242]

[11] Yu K W, Wang Y C, Hui P M 1993 *Phys. Rev.* B **47** 1782

[12] Yu K W, Gu G Q 1995 *Phys. Lett.* A **205** 295

[13] Levy O, Bergman D J, Stroud D G 1995 *Phys. Rev.* E **52** 3184

[14] Hui P M, Cheung P, Stroud D 1998 *J. Appl. Phys.* **84** 3451

[15] Hui P M, Cheung P 2000 *Phys.* B **279** 45

[16] Gu G Q, Hui P M, Yu K W 2000 *Phys.* B **279** 62

[17] Wei E B, Gu G Q 2001 *Commun. Theor. Phys.* **35**: 501

[18] Wei E B, Gu G Q 2001 *Chin. Phys. Lett.* **18** 960

[19] Wei E B, Song J B, Gu G Q 2002 *Phys.* B **324** 322

[20] Chen X G, Liang F C, Wei E B 2005 *Chin. Phys.* **14** 1217

[21] Wei E B, Tian J W, Song J B 2003 *J. Phys. Condens Matter.* **15** 8907

[22] Wei E B, Tian J W, Song J B 2004 *Chin. Phys.* **13** 388

[23] Chen X G, Wei E B, Song J B 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 771

[24] Wei E B, Yang Z D, Gu G Q 2004 *J. Phys.* D: *Appl. Phys.* **37** 107

[25] Liu Y, Liang F C, Shen H L 2005 *Commun.Theor. Phys.* **44** 731

[26] Wei E B, Song J B, Gu G Q 2004 *J. Appl. Phys.* **95** 1377

[27] Wei E B, Song J B, Tian J W, Gu G Q. 2003 *Phys. Lett.* A **309** 160

[28] Natenapit M, Thongboonrithi C, Potisook C 2008 *Phys.* B **403** 4314

[29] Li Z, Wei E B, Zhang H D, Tian J W 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22(9)** 2360

[30] Ding X, Jia Y X, Wang X 2008 *Phys. Lett.* A **372** 4247

[31] Shen Y Y, Chen X G, Li Q Q 2009 *Commun. Theor. Phys.* **51** 743

[32] Shen Y Y, Chen X G, Cui W 2009 *Chin. Phys.* B **18** 757

[33] Hao Yan-Hua, Chen X G, Hou R 2010 *Chin. Phys.* B **19** 067202

[34] Potisook C, Natenapit M 2012 *Phys.* B **407** 598

[35] Ding X, Jia Y X, Wei E B 2012 *Chin. Phys.* B **21** 057202

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 62, No. 5 (2013) 057201

Effective response to external DC and AC electric field in nonlinear cylindrical coated composite*

Li Qian-Qian Chen Xiao-Gang† Bao Shu-Hong Guo Jun-Ming Zhai Li-Li

(*College of Science, Inner Mongolia University of Technology, Hohhot* 010051, *China*)

(Received 13 March 2012; revised manuscript received 16 October 2012)

Abstract

By using the perturbation method, an effective nonlinear direct current (DC) and alternating current (AC) response of nonlinear composites with cylindrical coated inclusions randomly embedded in a host medium is studied under the action of an external electric field $\boldsymbol{E}_{\mathrm{a}} = \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_1 \sin\omega t + \boldsymbol{E}_3 \sin 3\omega t$ with different amplitudes and frequencies. The local potentials of composite at all harmonics are given in the inclusion core, the coated layer and the host regions. All effective nonlinear responses of composites and the relationship between the effective nonlinear responses at all harmonics are also deduced for the cylindrical coated inclusions in a dilute limit.

Keywords: nonlinear cylindrical coated composite, effective nonlinear response, the external AC and DC electric field

PACS: 72.20.Ht, 72.60.+g **DOI:** 10.7498/aps.62.057201

* Project supported by the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant No. 2011MS0113), and the Talent Foundation of Inner Mongolia (2010).

† Corresponding author. E-mail: xiaogang_chen@imut.edu.cn