

## 一类厄尔尼诺海 - 气时滞振子的渐近解\*

欧阳成<sup>1)</sup> 林万涛<sup>2)</sup> 程荣军<sup>3)†</sup> 莫嘉琪<sup>1)4)</sup>

1) (湖州师范学院理学院, 湖州 313000)

2) (中国科学院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

3) (浙江大学宁波理工学院, 宁波 315100)

4) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2012年10月20日收到; 2012年11月1日收到修改稿)

研究了一类厄尔尼诺 - 南方涛动机制. 利用奇异摄动理论和方法求出了厄尔尼诺 - 南方涛动模型的外部解及初始层校正项. 从而得到问题解的渐近展开式, 并讨论了解的渐近性态.

**关键词:** 非线性, 渐近解, 厄尔尼诺 - 南方涛动模型

**PACS:** 02.30.Mv

**DOI:** 10.7498/aps.62.060201

## 1 引言

厄尔尼诺 - 南方涛动是分别发生在热带大气和海洋中的异常事件. 厄尔尼诺 - 南方涛动事件严重地影响全球气候和生态等方面的变化. 因此对它的规律的研究和预防为学术界所关注. 许多学者已经对它的局部、整体的性态做了研究<sup>[1-13]</sup>. 厄尔尼诺大气物理的振荡需要海 - 气流动的正负两种反馈. 这种异常决定了海表温度 (SST) 变化, 它和南方涛动流动强度有关, 这导致弱信风沿着赤道行进. 弱信风驱动着海洋流动变化, 又加强了 SST 的异常. 正的海洋 - 大气反馈和耦合海洋 - 大气的不稳定性导致了赤道太平洋不断变暖. 振子模型需考虑东、西太平洋两者的异常. 在一定的假设下, 它将被归化为一个简单振子模型.

非线性理论在学术界的研究中是一个十分热门的对象<sup>[14]</sup>, 许多学者做了大量的工作<sup>[15-17]</sup>, 并解决了许多数学物理问题. 作者等也研究了一些相应的大气物理、海洋科学等非线性问题<sup>[18-24]</sup>.

本文是讨论一类厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统的模型, 利用奇异摄动理论和方法较简

捷地得到了相应模型解的渐近性态.

## 2 海 - 气时滞厄尔尼诺 - 南方涛动耦合模型和外部解

今考虑如下一个厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统<sup>[4]</sup>:

$$\frac{dT}{dt} = aT - b\tau(t - \delta) - \varepsilon f(T), \quad (1)$$

$$\varepsilon c \frac{d\tau}{dt} = dT - R\tau(t - \delta) - \varepsilon g(\tau), \quad (2)$$

$$T|_{t=0} = T_0, \quad (3)$$

$$\tau(t) = \tau_0, \quad -\delta \leq t \leq 0, \quad (4)$$

式中  $T$  为赤道东太平洋 SST 异常,  $\tau$  为信风强度异常, 参数  $a, b, c, d, \delta$  和  $\varepsilon$  为正常数,  $\delta$  表示时滞数,  $R$  为正的阻尼系数, 初始值  $T_0, \tau_0$  为常数,  $\varepsilon f(T), \varepsilon g(\tau)$  为扰动项, 其中  $f, g$  关于其自变量充分的光滑函数. (1) 式右边第一项表示耦合系统的正反馈, 第二项表示西太平洋边界反射波的负反馈. 方程 (2) 表示联系到温度异常的信风强度异常. 在本文中我们假设  $\varepsilon$  和  $\delta$  为小参数. 因此模型 (1)–(4) 为带有小时

\* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2011CB403501)、国家自然科学基金 (批准号: 41275062, 41175058, 11202106)、浙江省自然科学基金 (批准号: Y6110502) 和安徽高校自然科学基金项目 (批准号: KJ2012A001, KJ2012Z245) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: chengrongjun76@126.com

滞量的厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气振子奇异摄动耦合系统的模型.

首先考虑问题 (1) — (4) 的外部解  $(\bar{T}, \bar{\tau})$ . 设

$$\begin{aligned} \bar{T}(t) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \bar{T}_{ij}(t) \varepsilon^i \delta^j, \\ \bar{\tau}(t) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \bar{\tau}_{ij}(t) \varepsilon^i \delta^j, \end{aligned} \quad (5)$$

再将时滞函数按  $\varepsilon, \delta$  的幂展开

$$\begin{aligned} \bar{\tau}(t - \delta) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} \bar{\tau}(t) \delta^k \\ &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} [\bar{\tau}_{i(j-k)}(t)] \right] \varepsilon^i \delta^j. \end{aligned} \quad (6)$$

将 (5), (6) 式代入 (1) — (3) 式, 按  $\varepsilon, \delta$  展开非线性项, 合并  $\varepsilon^i \delta^j$  的同次幂项, 并分别令各次幂的系数为零. 由  $\varepsilon^0 \delta^0$  的系数为零, 得

$$\frac{d\bar{T}_{00}}{dt} = a\bar{T}_{00} - b\bar{\tau}_{00}, \quad (7)$$

$$d\bar{T}_{00} - R\bar{\tau}_{00} = 0, \quad (8)$$

$$\bar{T}_{00}|_{t=0} = T_0. \quad (9)$$

显然, 问题 (7) — (9) 的解为

$$\bar{T}_{00}(t) = T_0 \exp\left(\frac{aR - bd}{R}t\right), \quad (10)$$

$$\bar{\tau}_{00}(t) = \frac{dT_0}{R} \exp\left(\frac{aR - bd}{R}t\right). \quad (11)$$

由  $\varepsilon^i \delta^j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, i + j \neq 0$ ) 的系数为零, 得

$$\frac{d\bar{T}_{ij}}{dt} = a\bar{T}_{ij} - b\bar{\tau}_{ij} - b\bar{\zeta}_{ij} - \bar{F}_{(i-1)j}, \quad (12)$$

$$d\bar{T}_{ij} - R\bar{\tau}_{ij} = R\bar{\zeta}_{ij} + \bar{G}_{(i-1)j} + c \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}}{dt}, \quad (13)$$

$$\bar{T}_{ij}|_{t=0} = 0, \quad (14)$$

其中

$$\bar{\zeta}_{i0} = 0,$$

$$\bar{\zeta}_{ij}(t) = \sum_{k=1}^j \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dt^k} [\bar{\tau}_{i(j-k)}(t)] \quad (j \neq 0),$$

$$\bar{F}_{ij}(t) = \frac{1}{i!j!} \left[ \frac{\partial^{i+j} f \left( \sum_{k,l=0}^{\infty} \bar{T}_{kl}(t) \varepsilon^k \delta^l \right)}{\partial \varepsilon^i \partial \delta^j} \right]_{\varepsilon=\delta=0},$$

$$\bar{G}_{ij}(t) = \frac{1}{i!j!} \left[ \frac{\partial^{i+j} g \left( \sum_{k,l=0}^{\infty} \bar{\tau}_{kl}(t) \varepsilon^k \delta^l \right)}{\partial \varepsilon^i \partial \delta^j} \right]_{\varepsilon=\delta=0},$$

它们都是逐次已知的函数, 其结构在此略.

由 (12) — (14) 式, 可得

$$\begin{aligned} \bar{T}_{ij}(t) &= \int_0^t \left( \frac{b}{R} \bar{G}_{(i-1)j}(\xi) + \frac{bc}{R} \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}(\xi)}{d\xi} \right. \\ &\quad \left. - \bar{F}_{(i-1)j}(\xi) \right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{aR - bd}{R}(t - \xi)\right) d\xi, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{ij}(t) &= - \left( \bar{\zeta}_{ij}(t) + \frac{1}{R} \bar{G}_{ij}(t) + \frac{c}{R} \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}(t)}{dt} \right) \\ &\quad + \frac{d}{R} \int_0^t \left( \frac{b}{R} \bar{G}_{(i-1)j}(\xi) + \frac{bc}{R} \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}(\xi)}{d\xi} \right. \\ &\quad \left. - \bar{F}_{(i-1)j}(\xi) \right) \\ &\quad \times \exp\left(\frac{aR - bd}{R}(t - \xi)\right) d\xi. \end{aligned} \quad (16)$$

由 (10), (11), (15), (16) 式, 将得到的  $\bar{T}_{ij}, \bar{\tau}_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, \dots$ ) 代入 (5) 式, 便得到了厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统 (1) — (4) 的外部解. 但是外部解未必满足初始条件 (4). 为此尚需构造模型解的初始层校正项.

### 3 海 - 气时滞模型解初始层

设厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统 (1) — (4) 的解  $(T(t), \tau(t))$  为

$$\begin{aligned} T(t) &= \bar{T}(t) + \varepsilon \mu(r), \\ \tau(t) &= \bar{\tau}(t) + \nu(r), \end{aligned} \quad (17)$$

其中  $r$  为为伸长变量:  $r = t/\varepsilon$ . 将 (17) 式代入模型 (1) — (4), 得

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dr} &= \varepsilon a \mu - b \nu (\varepsilon r - \delta) \\ &\quad - \varepsilon (f(\bar{T} + \varepsilon \mu) - f(\bar{T})), \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} c \frac{d\nu}{dr} &= \varepsilon d \mu - R \nu (\varepsilon r - \delta) \\ &\quad - \varepsilon (g(\bar{\tau} + \nu) - g(\bar{\tau})), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\mu|_{r=0} = 0, \quad (20)$$

$$\nu(r) = \tau_0 - \bar{\tau}(\varepsilon r), \quad -\varepsilon \delta \leq r \leq 0. \quad (21)$$

令

$$\begin{aligned} \mu(r) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \mu_{ij}(r) \varepsilon^i \delta^j, \\ \nu(r) &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \nu_{ij}(r) \varepsilon^i \delta^j. \end{aligned} \quad (22)$$

这时有

$$\begin{aligned}
 & v(r - \delta) \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dr^k} v(r) \delta^k \\
 &= \sum_{i,j=0}^{\infty} \left[ \sum_{k=0}^j \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dr^k} [v_{i(j-k)}(r)] \right]_{r=0} \varepsilon^i \delta^j. \quad (23)
 \end{aligned}$$

将 (22) 式代入 (18)—(21) 式, 按  $\varepsilon, \delta$  展开非线性项, 合并  $\varepsilon^i \delta^j$  的同次幂项, 并分别令各次幂的系数为零. 由  $\varepsilon^0 \delta^0$  的系数为零, 得

$$\frac{d\mu_{00}}{dr} = -bv_{00}(r), \quad (24)$$

$$c \frac{dv_{00}}{dr} = -Rv_{00}(r), \quad (25)$$

$$\mu_{00}|_{r=0} = 0, \quad (26)$$

$$v_{00}(r)|_{r=0} = \tau_0 - \frac{dT_0}{R}. \quad (27)$$

初值问题 (24)—(27) 的解为

$$\begin{aligned}
 \mu_{00}(r) &= \frac{bc}{R} \left( \tau_0 - \frac{dT_0}{R} \right) \left( \exp\left(-\frac{R}{c}r\right) - 1 \right), \\
 v_{00}(r) &= \left( \tau_0 - \frac{dT_0}{R} \right) \exp\left(-\frac{R}{c}r\right). \quad (28)
 \end{aligned}$$

由  $\varepsilon^i \delta^j$  ( $i, j = 1, 2, \dots, i + j \neq 0$ ) 的系数为零, 并考虑到 (23) 式, 得

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mu_{ij}}{dr} &= a\mu_{(i-1)j}(r) - b\nu_{ij}(r) - b\eta_{ij}(r) \\
 &\quad - F_{(i-2)j}(0), \quad (29)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 c \frac{d\nu_{ij}}{dr} &= d\mu_{(i-1)j}(r) - R\nu_{ij}(r) - R\eta_{ij}(r) \\
 &\quad - G_{(i-1)j}(0), \quad (30)
 \end{aligned}$$

$$\mu_{ij}|_{r=0} = 0, \quad (31)$$

$$\begin{aligned}
 \nu_{ij}|_{r=0}(r) &= \tau_0 + \bar{\zeta}_{ij}(0) + \frac{1}{R} \bar{G}_{ij}(0) \\
 &\quad + \frac{c}{R} \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}(t)}{dt} \Big|_{t=0}, \quad (32)
 \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \eta_{i0}(r) &= 0, \\
 \eta_{ij}(r) &= \sum_{k=1}^j \frac{(-1)^k}{k!} \frac{d^k}{dr^k} [v_{i(j-k)}(r)] \quad (j \neq 0), \\
 F_{ij}(r) &= \frac{1}{i!j!} \left[ \frac{\partial^{i+j}}{\partial \varepsilon^i \partial \delta^j} [\mu(r) f_T(T(r))] \right]_{\varepsilon=\delta=0}, \\
 G_{ij}(r) &= \frac{1}{i!j!} \left[ \frac{\partial^{i+j}}{\partial \varepsilon^i \partial \delta^j} [\mu(r) G_T(v(r))] \right]_{\varepsilon=\delta=0}.
 \end{aligned}$$

它们都是逐次已知的函数.

由 (29)—(32) 式, 可得

$$\begin{aligned}
 & \mu_{ij}(r) \\
 &= \int_0^r [a\mu_{(i-1)j} - b\eta_{ij}(\xi) - F_{(i-2)j}(0)] d\xi \\
 &\quad + \frac{bc}{R} \left( \tau_0 + \bar{\zeta}_{ij}(0) + \frac{1}{R} \bar{G}_{ij}(0) + \frac{c}{R} \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\
 &\quad \times \left( \exp\left(-\frac{R}{c}r\right) - 1 \right) \\
 &\quad - \frac{b}{c} \int_0^r \int_0^\xi [d\mu_{(i-1)j}(\xi_1) - R\eta_{ij}(\xi_1) - G_{(i-1)j}(0)] \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{R}{c}(\xi - \xi_1)\right) d\xi_1 d\xi, \quad (33)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \nu_{ij}(r) \\
 &= \left( \tau_0 + \bar{\zeta}_{ij}(0) + \frac{1}{R} \bar{G}_{ij}(0) + \frac{c}{R} \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right) \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{R}{c}r\right) \\
 &\quad + \frac{1}{c} \int_0^r \left[ d\mu_{(i-1)j}(\xi) - R\eta_{ij}(\xi) - G_{(i-1)j}(0) \right] \\
 &\quad \times \exp\left(-\frac{R}{c}(r - \xi)\right) d\xi. \quad (34)
 \end{aligned}$$

由 (28), (33), (34) 式, 将得到的  $\mu_{ij}, \nu_{ij}$  ( $i, j = 0, 1, \dots$ ) 代入 (22) 式, 我们便得到了系统 (1)—(4) 的初始层校正项 ( $\varepsilon\mu(r), \nu(r)$ ). 再由 (17) 式, 便得到厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统 (1)—(4) 的渐近解 ( $T, \tau$ ) 的合成展开式:

$$\begin{aligned}
 & T(t) \\
 &= T_0 \exp\left(\frac{aR - bd}{R}t\right) + \frac{bc}{R} \varepsilon \left( \tau_0 - \frac{dT_0}{R} \right) \\
 &\quad \times \left( \exp\left(-\frac{Rt}{c\varepsilon}\right) - 1 \right) \\
 &\quad + \sum_{i,j=0, i+j \neq 0}^M \left[ \int_0^t \left( \frac{b}{R} \bar{G}_{(i-1)j}(\xi) + \frac{bc}{R} \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}(\xi)}{d\xi} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \bar{F}_{(i-1)j}(\xi) \right) \exp\left(\frac{aR - bd}{R}(t - \xi)\right) d\xi \right] \varepsilon^i \delta^j \\
 &\quad + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0, i+j \neq 0}^M \left[ \int_0^{t/\varepsilon} \left[ a\mu_{(i-1)j} - b\eta_{ij}(\xi) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - F_{(i-2)j}(0) \right] d\xi + \frac{bc}{R} \left( \tau_0 + \bar{\zeta}_{ij}(0) + \frac{1}{R} \bar{G}_{ij}(0) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{c}{R} \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}(t)}{dt} \Big|_{t=0} \right) \left( \exp\left(-\frac{R}{c}r\right) - 1 \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{b}{c} \int_0^r \int_0^\xi [d\mu_{(i-1)j}(\xi_1) - R\eta_{ij}(\xi_1) - G_{(i-1)j}(0)] \right. \\
 &\quad \left. \times \exp\left(-\frac{R}{c}(\xi - \xi_1)\right) d\xi_1 d\xi \right] \varepsilon^{i+1} \delta^j + O(\lambda),
 \end{aligned}$$

$$0 < \lambda = \max(\varepsilon^M \delta^{M+1}, \varepsilon^{M+1} \delta^M) \ll 1. \quad (35)$$

$$\begin{aligned} & \tau(t) \\ &= \frac{dT_0}{R} \exp\left(\frac{aR-bd}{R}t\right) + \left(\tau_0 - \frac{dT_0}{R}\right) \exp\left(-\frac{R}{c\varepsilon}t\right) \\ &+ \sum_{i,j=0, i+j \neq 0}^M \left[ \int_0^t \left( \frac{b}{R} \bar{G}_{(i-1)j}(\xi) + \frac{bc}{R} \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}(\xi)}{d\xi} \right. \right. \\ &\left. \left. - \bar{F}_{(i-1)j}(\xi) \right) \exp\left(\frac{aR-bd}{R}(t-\xi)\right) d\xi \right. \\ &\left. + \varepsilon \left[ \left( \tau_0 + \bar{\zeta}_{ij}(0) + \frac{1}{R} \bar{G}_{ij}(0) + \frac{c}{R} \frac{d\bar{\tau}_{(i-1)j}(t)}{dt} \right) \Big|_{t=0} \right] \right. \\ &\left. \times \exp\left(-\frac{R}{c}r\right) \right. \\ &\left. + \frac{1}{c} \int_0^r \left[ d\mu_{(i-1)j}(\xi) - R\eta_{ij}(\xi) - G_{(i-1)j}(0) \right] \right. \\ &\left. \times \exp\left(-\frac{R}{c}(r-\xi)\right) d\xi \right] \varepsilon^i \delta^j + O(\lambda), \end{aligned}$$

$$0 < \lambda = \max(\varepsilon^M \delta^{M+1}, \varepsilon^{M+1} \delta^M) \ll 1. \quad (36)$$

由 (35), (36) 式看出, 模型参数在  $aR - bd < 0$  时, 海 - 气时滞耦合系统 (1)–(4) 的渐近解是稳定的. 但当  $aR - bd > 0$  时, 厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统 (1)–(4) 的渐近解是不稳定的, 这时厄尔尼诺 - 南方涛动事件将对气候产生很大的变化. 因此, 我们可利用渐近解 (35), (36) 式对 SST 异常和信风强度异常进行测算, 从而做出预报.

#### 4 厄尔尼诺 - 南方涛动物理模型的状态

利用渐近方法厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统求近似解, 是一个有效的方法. 得到的解能描述其状态. 下面在举例中, 不失一般性, 我们简单设无量纲参数.

**模型 1** 设  $b = 2, a = c = R = 1, f = \ln T, g = 0$  和初值  $T_0 = 1, \tau_0 = 2$ . 这时厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统 (1)–(4) 为

$$\frac{dT}{dt} = T - 2\tau(t - \delta) - \varepsilon \ln T, \quad (37)$$

$$\varepsilon \frac{d\tau}{dt} = T - \tau(t - \delta), \quad (38)$$

$$T|_{t=0} = 1, \quad (39)$$

$$\tau(t) = 2, \quad -\delta \leq t \leq 0. \quad (40)$$

现利用上述奇摄动方法求出问题 (37)–(40) 的渐近解. 由 (10), (11), (15), (16) 式知, 问题 (37)–(40) 的

外部解和初始层有关的前几项为

$$\bar{T}_{00}(t) = \exp(-t), \quad \bar{\tau}_{00}(t) = \exp(-t),$$

$$\bar{T}_{01}(t) = 0, \quad \bar{\tau}_{01}(t) = -\exp(-t),$$

$$\bar{T}_{10}(t) = t(1 - 2\exp(-t)),$$

$$\bar{\tau}_{10}(t) = t + (1 - 2t)\exp(-t),$$

$$\mu_{00}(t/\varepsilon) = 2(\exp(-t/\varepsilon) - 1),$$

$$\nu_{00}(t/\varepsilon) = \exp(-t/\varepsilon),$$

$$\nu_{10}(t/\varepsilon) = 3\exp(-t/\varepsilon) + 2(t/\varepsilon)\exp(-t/\varepsilon) - 2.$$

由上述得到的结果, 再由 (35), (36) 式, 便有厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统 (37)–(40) 的渐近解:

$$\begin{aligned} T(t) &= \exp(-t) + \varepsilon[t(1 - 2\exp(-t)) \\ &+ 2(\exp(-t/\varepsilon) - 1)] + O(\lambda), \\ 0 < \lambda &= \max(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2) \ll 1, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \tau(t) &= [\exp(-t) + \exp(-t/\varepsilon)] \\ &+ \delta[-\exp(-t) + (3 - t/\varepsilon)\exp(-t/\varepsilon)] \\ &+ \varepsilon[t + (1 - 2t)\exp(-t) + 3\exp(-t/\varepsilon) \\ &+ 2(t/\varepsilon)\exp(-t/\varepsilon) - 2] + O(\lambda), \\ 0 < \lambda &= \max(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2) \ll 1. \end{aligned} \quad (42)$$

由 (41), (42) 式, 可以得到厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统 (37)–(40) ( $aR - bd < 0$ ) 渐近解 ( $T(t), \tau(t)$ ) 在小参数  $\varepsilon = \delta = 0.01$  时的曲线图形 (参见图 1, 图 2)

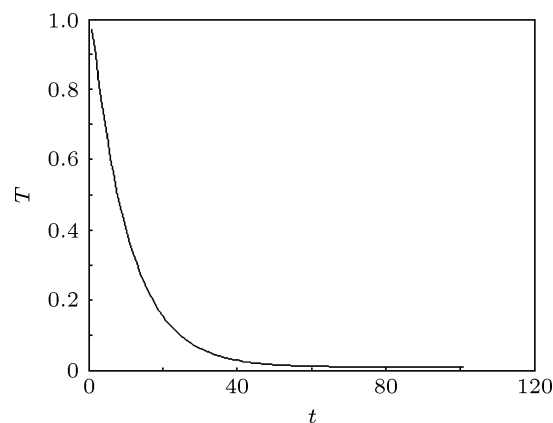


图 1 海表温度  $T(t)$  曲线分布曲线 ( $\varepsilon = \delta = 0.01$ )

在模型 1 中, 从表示式 (41), (42) 和图 1, 图 2 都说明了解是渐近稳定的. 这意味着对应的海 - 气时滞耦合振子 ( $aR - bd < 0$ ) 将随着时间的增大而逐渐平息.

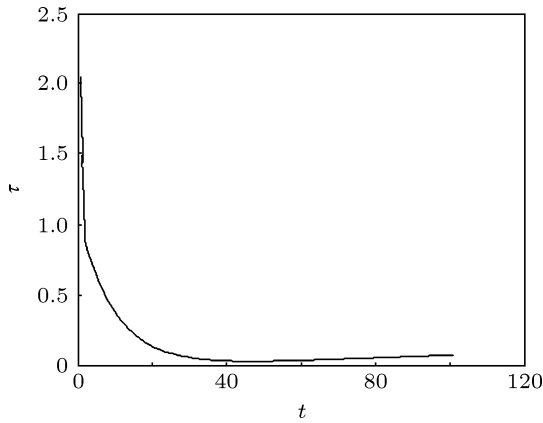


图2 信风强度  $\tau(t)$  曲线分布曲线 ( $\varepsilon = \delta = 0.01$ )

**模型 2** 设  $a = 2, b = c = R = 1, f = \ln T, g = 0$  和初值  $T_0 = 1, \tau_0 = 2$ . 这时厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统 (1) — (4) 为

$$\frac{dT}{dt} = 2T - \tau(t - \delta) - \varepsilon \ln T, \quad (43)$$

$$\varepsilon \frac{d\tau}{dt} = T - \tau(t - \delta), \quad (44)$$

$$T|_{t=0} = 1, \quad (45)$$

$$\tau(t) = 2, \quad -\delta \leq t \leq 0. \quad (46)$$

由 (10), (11), (15), (16) 式知, 问题 (37) — (40) 的外部解和初始层的前几项为

$$\bar{T}_{00}(t) = \exp t, \quad \bar{\tau}_{00}(t) = \exp t,$$

$$\bar{T}_{01}(t) = 0, \quad \bar{\tau}_{01}(t) = \exp t,$$

$$\bar{T}_{10}(t) = t(\exp t + 1), \quad \bar{\tau}_{10}(t) = \exp t,$$

$$\mu_{00}(t/\varepsilon) = \exp(-t/\varepsilon) - 1, \quad \nu_{00}(r) = \exp(-t/\varepsilon),$$

$$\nu_{01}(t/\varepsilon) = (1 - t/\varepsilon)\exp(-t/\varepsilon),$$

$$\nu_{10}(t/\varepsilon) = 4\exp(-t/\varepsilon) + (t/\varepsilon)\exp(t/\varepsilon) - 1.$$

由上述得到的结果, 再由 (35), (36) 式便有厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统 (43) — (47) 的渐近解:

$$T(t) = \exp t + \varepsilon[t(\exp t + 1) + \exp(-t/\varepsilon) - 1] + O(\lambda),$$

$$0 < \lambda = \max(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2) \ll 1, \quad (47)$$

$$\tau(t) = [\exp t + \exp(-t/\varepsilon)] + \delta[(1 - t/\varepsilon)\exp(-t/\varepsilon)]$$

$$+ \varepsilon[\exp t + 4\exp(-t/\varepsilon) + (t/\varepsilon)\exp(t/\varepsilon) - 1]$$

$$+ O(\lambda),$$

$$0 < \lambda = \max(\varepsilon^2, \varepsilon\delta, \delta^2) \ll 1. \quad (48)$$

由 (47), (48) 式, 可以得到厄尔尼诺 - 南方涛动海 - 气时滞耦合系统 (43) — (46) ( $aR - bd > 0$ ) 渐近

解  $(T(t), \tau(t))$  在小参数  $\varepsilon = \delta = 0.01$  时的曲线图形 (参见图 3, 图 4)

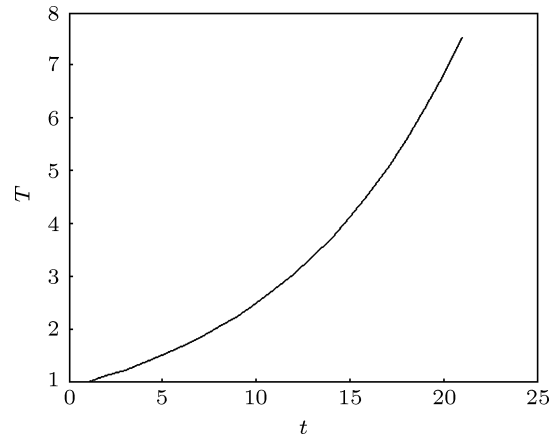


图3 海表温度  $T(t)$  曲线分布曲线 ( $\varepsilon = \delta = 0.01$ )

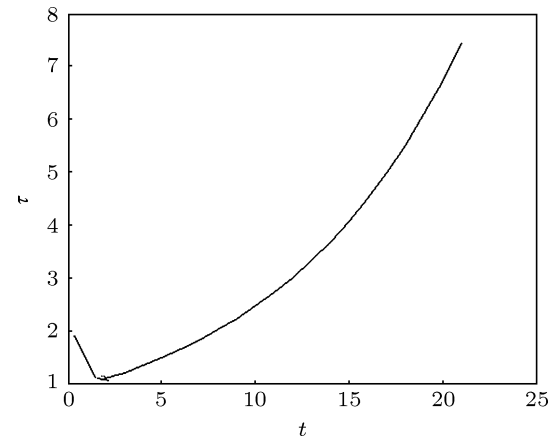


图4 信风强度  $\tau(t)$  曲线分布曲线 ( $\varepsilon = \delta = 0.01$ )

在模型 2 中, 从表示式 (47), (48) 和图 3, 图 4 都说明了解是渐近不稳定的. 这意味着对应的海 - 气时滞耦合振子 ( $aR - bd > 0$ ) 将随时间的增大而逐渐增大, 从而使海表温度和信风强度发生异常, 这将有可能形成气候紊乱, 导致对全球气候和生态状况的灾害. 为此我们需要对这种现象进行研究和预测, 以便力求在发生灾害前和灾害时采取措施, 避免或减少灾害的程度. 然而本文寻求的渐近解就可能做到这样的预测.

由两个模型例子的表示式和图形也可明显地看出, 对应的信风强度  $\tau(t)$  具有初始层现象. 这也符合实际情况.

## 5 结论

利用奇异摄动方法求厄尔尼诺 - 南方涛动海 -

气时滞耦合系统的渐近解是一个简单而有效的方法. 得到的解能够说明问题解的特性. 同时渐近解 (33), (34) 是解析的表示式. 因此对它们还可以继续

进行微分、积分等解析运算, 以便得到其他相关物理量的性态. 然而利用简单的数值模拟的方法是办不到的.

- [1] Xue Y, Cane M A, Zebiak S E 1997 *Monthly Weather Rev.* **125** 2043
- [2] Wang C, Weisberg R H 1996 *J. Climate* **9** 3132
- [3] Wang C 2001 *J. Climath* **14** 98
- [4] Wang C 2001 *Adv. Atmos. Sci.* **18** 674
- [5] Zhou T J, Yu R, Li H, Wang B 2008 *J. Climate* **21** 3833
- [6] Zhou T J, Wu B, Wang B 2009 *J. Climate* **22** 1159
- [7] Zhou T J, Zou L 2010 *J. Climate* **23** 6009
- [8] Zhou T J, Zhang J 2011 *J. Climate* **24** 1053
- [9] Cabanes C, Huck T, De Verderce A G 2006 *J. Phys. Oceanogr.* **36** 1739
- [10] Qiu B, Chen S M 2006 *J. Phys. Oceanogr.* **36** 1751
- [11] Zhang Y C, Lu K C, Zhang M 2011 *Sci. Meteorologica Sin.* **31** 11 (in Chinese) [张永垂, 路凯程, 张铭 2011 气象科学 **31** 11]
- [12] Lu K C, Zhang Y C, Zhang M 2011 *Sci. Meteorologica Sin.* **31** 17 (in Chinese) [路凯程, 张永垂, 张铭 2011 气象科学 **31** 17]
- [13] Zhang Y C, Lu K C, Zhang M 2012 *Climatic and Environmental Research* **17** 217 (in Chinese) [张永垂, 路凯程, 张铭 2012 气候与环境研究 **17** 217]
- [14] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems* (Basel: Birkhauserm Verlag AG)
- [15] Ramos M 2009 *J. Math. Anal. Appl.* **352** 246
- [16] D'Aprile T, Pistoia A 2010 *J. Diff. Eqs.* **248** 556
- [17] Faye L, Frenod E, Seck D 2011 *Discrete Contin. Dyn. Sys.* **29** 1001
- [18] Mo J Q 2009 *Sci. China G* **39** 568
- [19] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 060202
- [20] Mo J Q 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 010204
- [21] Mo J Q, Lin Y H, Lin W T 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6701 (in Chinese) [莫嘉琪, 林一骅, 林万涛 2010 物理学报 **59** 6701]
- [22] Mo J Q 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090203 (in Chinese) [莫嘉琪 2011 物理学报 **60** 090203]
- [23] Mo J Q 2010 *Commun. Theor. Phys.* **53** 440
- [24] Mo J Q, Lin W T, Lin Y H 2011 *Chin. Phys. B* **20** 070205

# A class of asymptotic solution of sea-air time delay oscillator for the El Niño-southern oscillation mechanism\*

Ouyang Cheng<sup>1)</sup> Lin Wan-Tao<sup>2)</sup> Cheng Rong-Jun<sup>3)†</sup> Mo Jia-Qi<sup>1)4)</sup>

1) (*Faculty of Science, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China*)

2) (*State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamics, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

3) (*Ningbo Institute of Technology, Zhejiang University, Ningbo 315100, China*)

4) (*Department of Mathematics, Anhui Normal University, Wuhu 241003, China*)

(Received 20 October 2012; revised manuscript received 1 November 2012)

## Abstract

A class of coupled system of the El Niño-southern oscillation mechanism is studied. Using the singular perturbation theory and method, the outer solution and the initial layer corrective term of the model are solved. And then, the asymptotic expansion of the solution for the problem is obtained and the asymptotic behavior of solution is considered.

**Keywords:** nonlinear, asymptotic solution, El Niño-southern oscillation model

**PACS:** 02.30.Mv

**DOI:** 10.7498/aps.62.060201

---

\* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB403501), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41275062, 41175058, 11202106), the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Grant No. Y6110502) and the Natural Science Foundation from the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant Nos. KJ2012A001, KJ2012Z245).

† Corresponding author. E-mail: chengrongjun76@126.com