

带有 Dzyaloshinski-Mariya 相互作用的两比特 XXZ 模型的纠缠量子热机*

王涛 黄晓理[†] 刘洋 许欢

(辽宁师范大学物理与电子技术学院, 大连 116029)

(2012年10月24日收到; 2012年11月7日收到修改稿)

以带有 Dzyaloshinski-Mariya 相互作用的两比特 XXZ 模型为工作物质构建纠缠量子热机. 在量子热力学平衡态下, 采用 Kieu 的形式描述了做功与热传递. 对于不同的各向异性参数, 分析了热机循环中量子纠缠与热传递、做功以及机械效率等热力学量之间的关系. 结果表明: 在这个纠缠体系中, 热力学第二定律依然成立; 机械效率的等值线图是环状曲线; 当各向异性参数 Δ 较小时, 热机在 $C_1 > C_2$ 和 $C_1 < C_2$ 两区域运行, 当增大 Δ 值时, 热机只在 $C_1 > C_2$ 区域运行.

关键词: 量子热机, 并发度, 机械效率

PACS: 03.65.Ud, 05.70.-a, 07.20.Pe

DOI: 10.7498/aps.62.060301

1 引言

自从量子热机这一概念被 Scovil 和 Schulz-DuBois^[1] 提出以来, 关于量子热机的研究引起了越来越多的关注^[2-23]. 顾名思义, 量子热机是以不同量子体系为工作物质并对外做功的热机. 它的工作物质通常有自旋系统^[2-8]、谐振子系统^[2-4,7,9]、二能级或多能级系统^[10-15]、谐振势中的单粒子系统^[17]和腔量子电动力学系统^[12,18-21]等.

量子热力学系统的基本热力学过程有量子绝热过程、量子等压过程、量子等温过程、量子等容过程^[11,22,24,25]. 与经典热力学循环一样, 量子热力学循环也是由这些基本过程构成, 如量子 Carnot 循环、量子 Ericsson 循环、量子 Brayton 循环和量子 Otto 循环等^[2-4,8,11,12,23]. 一般来说, Carnot 循环不依赖于它的工作物质^[26], 而其他循环总的来说依赖于工作物质, 这一结论在量子热力学循环中仍然成立.

随着量子信息技术的发展, 量子纠缠这一特殊

的量子现象引起了越来越多人的关注^[27-29]. 近年来以量子纠缠体系为工作物质的量子热机也成为了一个研究热点, 如四能级纠缠量子热机^[30-33]、以二能级系统与光场相互作用为工作物质的纠缠量子热机^[34]和以带有 Dzyaloshinski-Mariya(DM)相互作用的两自旋各向异性体系为工作物质的量子纠缠热机^[35]等等. 本文中, 我们以带有 DM 相互作用的两比特 XXZ 模型为工作物质构建一个四能级纠缠量子热机. 该热机循环由两个量子绝热过程和两个量子等容过程构成, 在等容过程中, 工作物质与热源相接触, 使整个体系达到了热力学平衡态; 在绝热过程中, 令耦合强度缓慢变化, 使每个量子态的概率保持不变. 通过数值计算, 探究了循环过程中在不同的各向异性参数下纠缠对热机的基本热力学参数的影响, 并且利用等值线图描绘和分析了纠缠与热量、功和机械效率之间的关系.

2 纠缠量子热机模型

我们的量子热机以含有 DM 相互作用各向异

* 国家自然科学基金(批准号: 11105064)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: huangxiaoli1982@foxmail.com

性的两比特海森堡模型为工作物质, 其哈密顿量可写为

$$H_{DM} = J[\sigma_{1x}\sigma_{2x} + \sigma_{1y}\sigma_{2y} + \Delta\sigma_{1z}\sigma_{2z} + D(\sigma_1 \times \sigma_2)] + B(\sigma_{1z} + \sigma_{2z}), \quad (1)$$

上式中 J 表示自旋耦合系数, 反铁磁性物质 $J > 0$, 铁磁性物质 $J < 0$, 为了计算方便, 这里取 $J > 0$; B 是沿 z 方向的连续外磁场; Δ 是各向异性参数; D 表示 DM 相互作用矢量, 它是由自旋轨道耦合引起的 DM 各向异性反对称相互作用^[36,37], 我们只考虑 $D = Dz$ 时的情况. 因此哈密顿量 H_{DM} 可化简为

$$H_{DM} = 2J[(1 + iD)\sigma_1^+\sigma_2^- + (1 - iD)\sigma_1^-\sigma_2^+] + J\Delta\sigma_{1z}\sigma_{2z} + B(\sigma_{1z} + \sigma_{2z}). \quad (2)$$

从方程 (2) 的形式可以看出, z 方向的 DM 相互作用使 x 和 y 方向的耦合变为复数, 而不改变原有的 z 方向耦合. 选取 $|00\rangle, |11\rangle, |10\rangle, |01\rangle$ 为基矢, 则 H_{DM} 的本征态为

$$\begin{aligned} |\psi_1\rangle &= |00\rangle, \quad |\psi_2\rangle = |11\rangle, \\ |\psi_3\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle + e^{i\theta} |10\rangle], \\ |\psi_4\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|01\rangle - e^{i\theta} |10\rangle], \end{aligned} \quad (3)$$

其中 $\theta = \arctan D$, 相应的四个本征值为

$$\begin{aligned} E_1 &= -2B + J\Delta, \\ E_2 &= 2B + J\Delta, \\ E_3 &= -J\Delta + 2J\sqrt{1 + D^2}, \\ E_4 &= -J\Delta - 2J\sqrt{1 + D^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

当耦合系统处于温度为 T 的热平衡态时, 我们假设它满足正则分布, 其状态可用密度算符 $\rho(T) = \frac{1}{\mathcal{Z}} e^{-\beta H_{DM}}$ 来描述, 其中配分函数 $\mathcal{Z} = \text{Tr}(e^{-\beta H_{DM}})$, $\beta = 1/kT$. 我们选用并发度 C (concurrence)^[38,39] 作为两比特之间纠缠的度量, 则当 $\sinh(2\beta J\sqrt{1 + D^2}) \leq e^{-2\beta J\Delta}$ 时

$$C = 0; \quad (5a)$$

当 $\sinh(2\beta J\sqrt{1 + D^2}) > e^{-2\beta J\Delta}$ 时

$$C = \frac{e^{2\beta J\Delta} \sinh(2\beta J\sqrt{1 + D^2}) - 1}{\cosh(2\beta B) + e^{2\beta J\Delta} \cosh(2\beta J\sqrt{1 + D^2})}. \quad (5b)$$

由于并发度和纠缠度在数学变化关系上是单调的, 因此这里我们直接用并发度来度量纠缠. 从上式可知当 $C = 0$, 即 $\sinh(2\beta J\sqrt{1 + D^2}) \leq e^{-2\beta J\Delta}$ 时纠缠消失.

我们采用 Kieu 在量子水平上对做功和热传递的解释^[40], 系统内能的平均值为: $U = \langle E \rangle = \sum_i p_i E_i$, 其中 p_i 表示粒子的占有概率, E_i 表示相应的本征能量. 对于微小的热力学过程, 取内能期望值的无穷小变化量 dU , 传递的热量的微量 $\bar{d}Q$ 和做功的微量 $\bar{d}W$, 则

$$\begin{aligned} dU &= \sum_i E_i dp_i + \sum_i p_i dE_i, \\ \bar{d}Q &= \sum_i E_i dp_i, \\ \bar{d}W &= \sum_i p_i dE_i. \end{aligned} \quad (6)$$

从数学上来说, 上述过程与路径有关, 不是严格意义的全微分. 由式中可知, 热量是粒子占有概率的重新分布而与能谱分布的变化无关; 做功是能谱的重新排布而与粒子占有概率的变化无关.

下面对量子热机循环过程的四个阶段做简要叙述.

1) 初始时, 体系的四个本征态的概率为 $p_{i0} (i = 1, 2, 3, 4)$, 耦合常数为 J_1 , 将体系与温度为 T_h 的高温热源接触达到热力学平衡, 在这个过程中系统本征能量 E_{i1} 保持不变, 因此广义坐标 B 和 J 不变, 根据基本量子热力学过程的定义^[11,24,25], 这是一个量子等容过程. 设每个本征态的占有概率变为 p_{i1} , 体系的密度算符 $\rho_1 = \sum_i p_{i1} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, $p_{i1} = \exp(-\beta_h E_{i1}) / \mathcal{Z}_1$, 其中配分函数 $\mathcal{Z}_1 = \sum_i \exp(-\beta_h E_{i1})$. 在这个过程中, 只有粒子占有概率发生了改变, 因此只有热量的交换, 设热量交换为 Q_h .

2) 移除热源, 体系经历一个量子绝热过程, 耦合常数从 J_1 变到 J_2 , 这个过程要足够缓慢, 根据量子绝热定理, 每个量子态的概率 p_{i1} 不变^[41], 因此这个过程只有做功而无热量传递. 需要指出要使该过程保持绝热, 耦合常数的变化需要满足传统的绝热条件^[41], 但近年来的研究表明, 在某些体系中传统的绝热条件并不能保证体系的绝热演化^[40,42,43], 2007年 Tong 等^[44] 给出了一个更为严格的绝热条件. 这里我们假设 J_1 到 J_2 这个过程足够缓慢. 使得系统能够严格保持绝热演化. 另一方面当耦合常数 J_1 缓慢变化到 J_2 时, 系统的能级可能会发生交

又, 根据 Rigolin 给出的能级简并时的量子绝热定理^[45], 只要系统变化满足相应的绝热条件, 系统处于每一本征态的概率仍然保持不变.

3) 与第一阶段相似, 将体系与温度为 $T_1 (T_1 < T_h)$ 的低温热源持续接触达到热平衡, 每个本征态的概率由 p_{i1} 变为 p_{i2} , 体系各本征能级 E_{i2} 保持不变. 体系的密度算符为 $\rho_2 = \sum_i p_{i2} |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$, $p_{i2} = \exp(-\beta_1 E_{i2}) / \mathcal{Z}_2$, 其中配分函数 $\mathcal{Z}_2 = \sum_i \exp(-\beta_1 E_{i2})$. 在此过程中, 由于占有概率的改变使体系与热源之间存在热传递, 设传递的热量为 Q_1 .

4) 与第二阶段类似, 移除热源, 体系再次经历量子绝热过程, 耦合常数由 J_2 变到 J_1 , 每个本征态的占有概率 p_{i2} 均保持不变, 此过程中体系只做功, 没有热量的交换. 为使循环能够重复进行, 有 $p_{i2} = p_{i0}$.

在两个等容过程中转移的能量分别为

$$Q_h = \sum_i E_{i1} (p_{i1} - p_{i0})$$

$$= \sum_i E_{i1} (p_{i1} - p_{i2}),$$

$$Q_1 = \sum_i E_{i2} (p_{i2} - p_{i1}). \quad (7)$$

因此整个循环的输出功为

$$W = Q_h + Q_1$$

$$= \sum_i (E_{i1} - E_{i2}) (p_{i1} - p_{i2}), \quad (8)$$

由于实际的热机要求有净功输出, 因此我们要求 $W > 0$. 这就意味着三种可能 (i) $Q_h > -Q_1 > 0$, (ii) $Q_1 > -Q_h > 0$, (iii) $Q_h > 0, Q_1 > 0$; 其中 (i) 是物理学上可接受的, (ii) 和 (iii) 违背了热力学第二定律. 在后面的数值结果中, 也没有出现 (ii) 和 (iii) 两种情况的结果. 因此在本模型中不违反热力学第二定律.

量子热机的机械效率为

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = 1 + \frac{Q_1}{Q_h}, \quad (9)$$

在 1) 和 3) 阶段末考虑两个热平衡态下的纠缠, 分别用 C_1 和 C_2 来表示:

$$C_1 = \begin{cases} 0 & \sinh(2\beta_h J_1 \sqrt{1+D^2}) \leq e^{-2\beta_h J_1 \Delta} \\ \frac{e^{2\beta_h J_1 \Delta} \sinh(2\beta_h J_1 \sqrt{1+D^2}) - 1}{\cosh(2\beta_h B) + e^{2\beta_h J_1 \Delta} \cosh(2\beta_h J_1 \sqrt{1+D^2})} & \sinh(2\beta_h J_1 \sqrt{1+D^2}) > e^{-2\beta_h J_1 \Delta} \end{cases}, \quad (10a)$$

$$C_2 = \begin{cases} 0 & \sinh(2\beta_1 J_2 \sqrt{1+D^2}) \leq e^{-2\beta_1 J_2 \Delta} \\ \frac{e^{2\beta_1 J_2 \Delta} \sinh(2\beta_1 J_2 \sqrt{1+D^2}) - 1}{\cosh(2\beta_1 B) + e^{2\beta_1 J_2 \Delta} \cosh(2\beta_1 J_2 \sqrt{1+D^2})} & \sinh(2\beta_1 J_2 \sqrt{1+D^2}) > e^{-2\beta_1 J_2 \Delta} \end{cases}. \quad (10b)$$

3 量子热机和纠缠

以上我们已经知道了两等容阶段自旋体的纠缠度 C_1 和 C_2 , 由 C_1 和 C_2 可以反解出两阶段的耦合常数 J_1 和 J_2 , 将 J_1 和 J_2 代入相应的本征能量, 进而利用 (7), (8) 和 (9) 式得出热量 (Q_1, Q_2)、功 W 和效率 η 等热力学量的表达式, 这样我们就以 C_1 和 C_2 为变量写出了 Q_1, Q_2, W 和 η 的函数. 但它们的形式过于复杂, 这里我们只给出数值结果.

当 $kT_1 = 2kT_2, B = 3kT_2, D = 1, \Delta$ 取不同值时, 我们给出了 Q_1, Q_2, W (它们都以 kT_2 为单位) 和 η 随 C_1, C_2 变化的等值线图 (如图 1—图 4).

从所示的等值线图中可以得出: 1) 当 $W > 0$ 时,

$Q_1 > -Q_2 > 0$, 虽然这里并没有明显的定量式子直接证明, 但是我们任意选取了大量不同的 Δ 值进行数值运算, 所得结论都成立; 2) 从图中可以看出, 在不同情况下该纠缠热机机械效率都小于卡诺热机效率 $\eta_c = 1 - T_1/T_2 = 1/2$, 因此热力学第二定律始终成立; 3) 机械效率的等值线图是环状曲线, 即当我们令 $\lambda = C_1/C_2$ 且固定 C_1 或 C_2 时, 机械效率 η 不是 λ 的单调函数 (如图 1—图 4); 4) 当 B 和 D 值不变, Δ 取不同值时, 热机的热传递、做功以及机械效率等热力学量的等值线图有显著变化, 即当 Δ 值较小时, 热机在 $C_1 > C_2$ 和 $C_1 < C_2$ 两区域运行 (如图 1, 图 2); 当 Δ 值增加到某些值时, 热机只在 $C_1 > C_2$ 区间运行 (如图 3, 图 4).

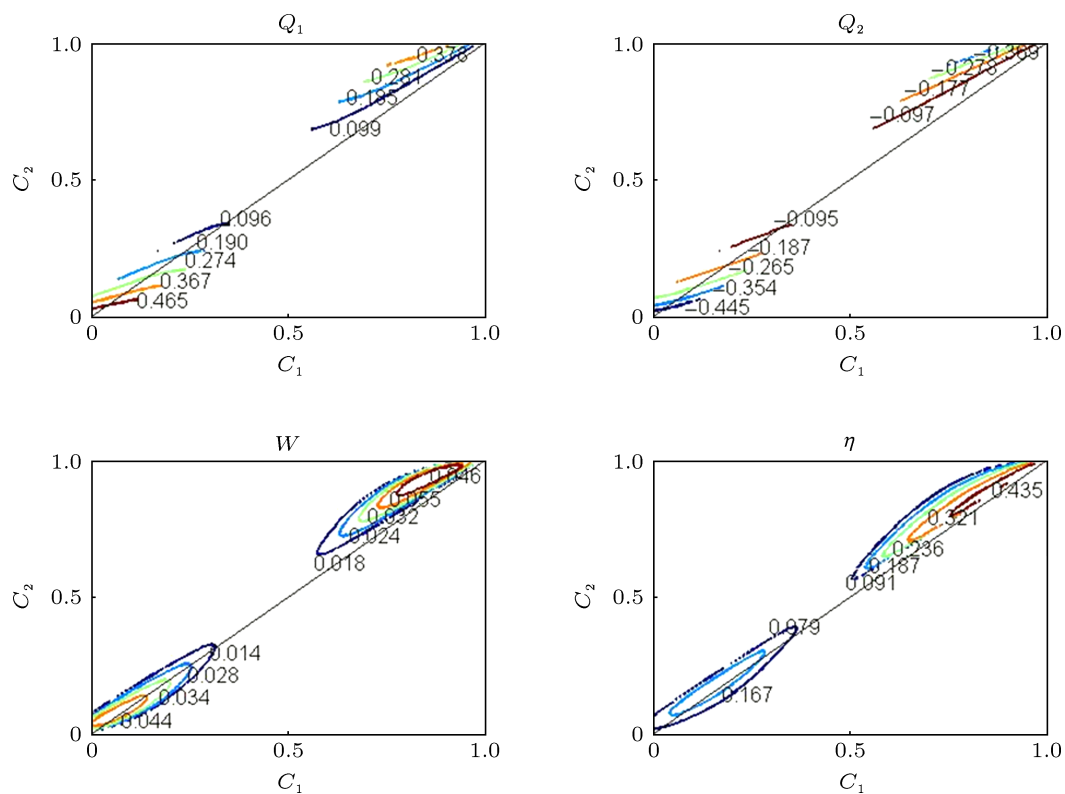


图 1 当 $B = 3kT_2, D = 1, \Delta = 0.01$ 时, Q_1, Q_2, W (以 kT_2 为单位) 和 η 随 C_1 和 C_2 变化的等值线图

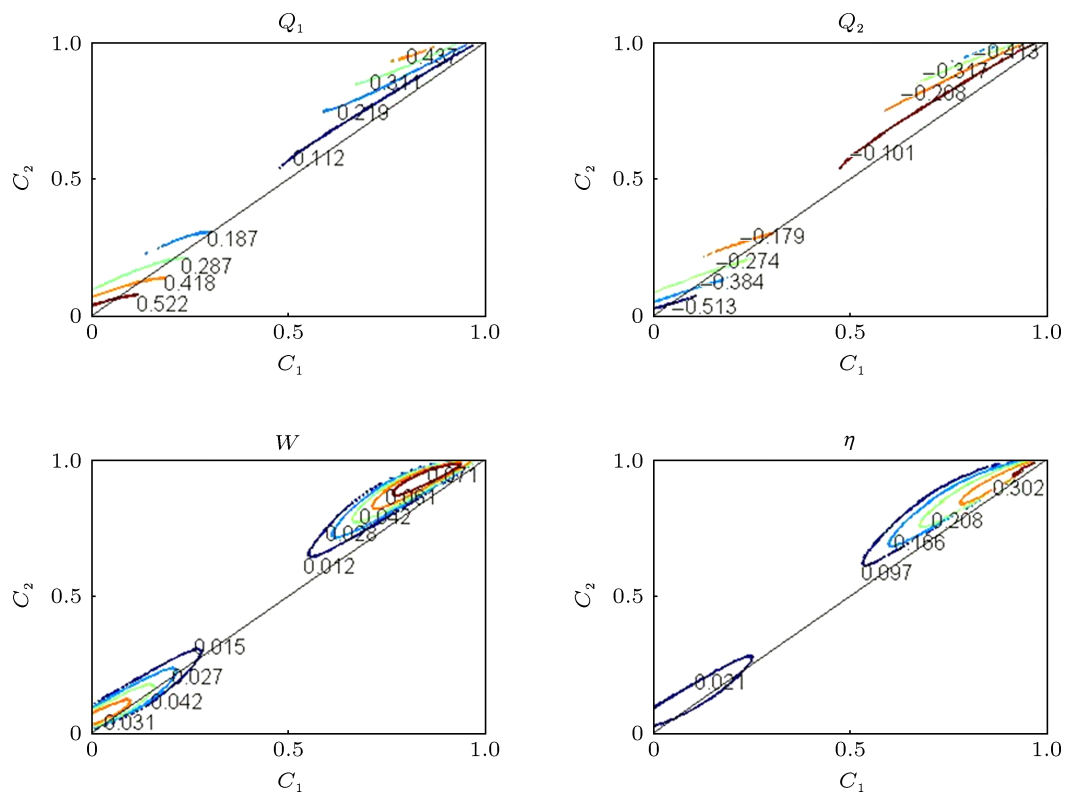


图 2 当 $B = 3kT_2, D = 1, \Delta = 1$ 时, Q_1, Q_2, W (以 kT_2 为单位) 和 η 随 C_1 和 C_2 变化的等值线图

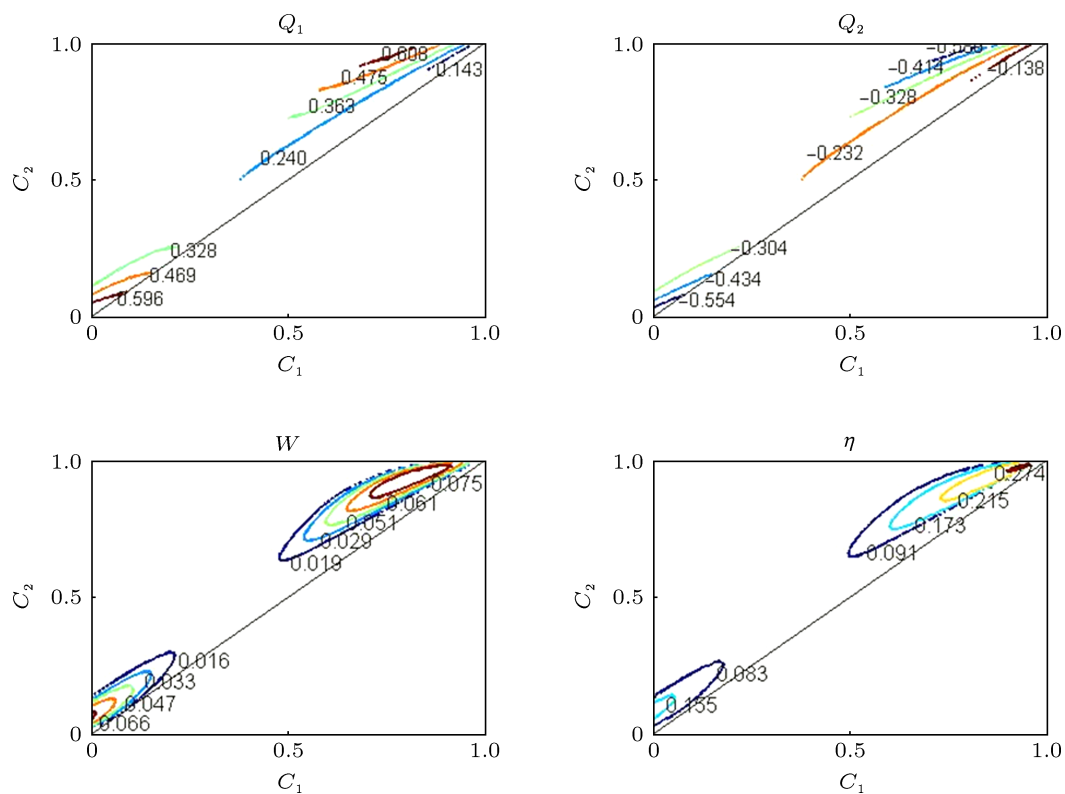


图3 当 $B = 3kT_2, D = 1, \Delta = 3$ 时, Q_1, Q_2, W (以 kT_2 为单位) 和 η 随 C_1 和 C_2 变化的等值线图

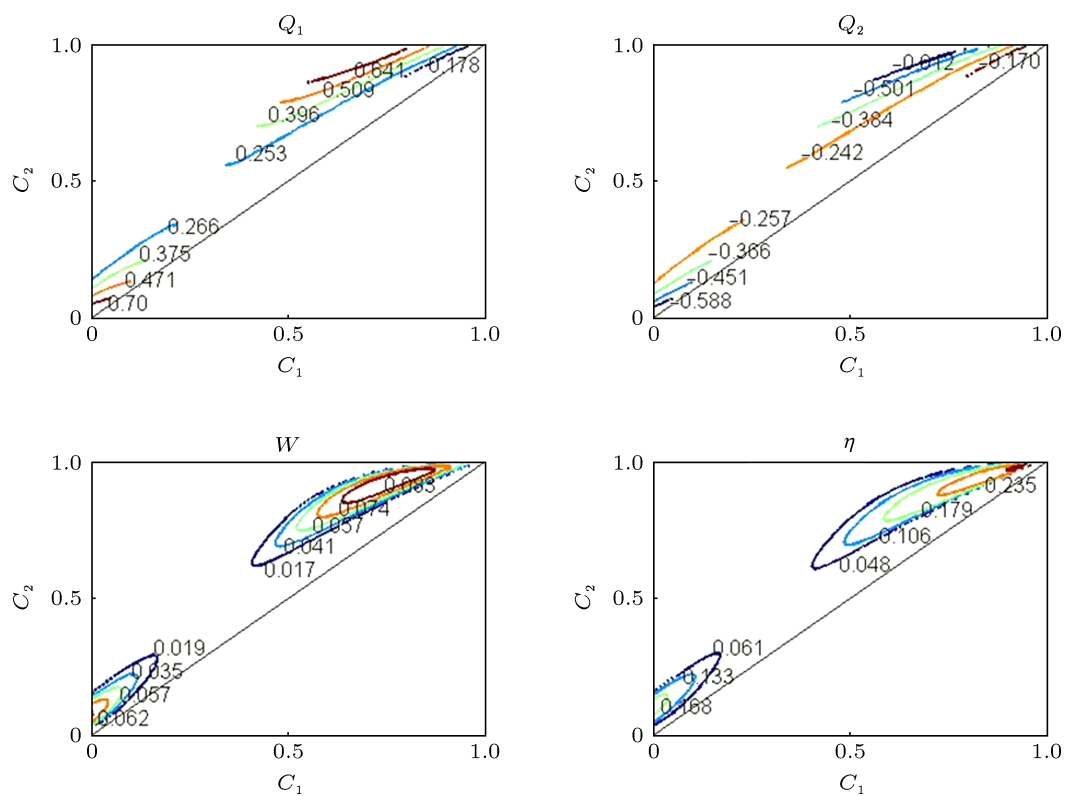


图4 当 $B = 3kT_2, D = 1, \Delta = 5$ 时, Q_1, Q_2, W (以 kT_2 为单位) 和 η 随 C_1 和 C_2 变化的等值线图

4 结论

本文以含有 DM 相互作用的两比特 XXZ 模型为工作物质, 构建四能级纠缠量子热机, 该热机的循环过程包含了两个量子等容过程和两个量子绝热过程, 我们利用并发度和热力学第一定律的概念, 在热力学平衡态下推导出 Q_1 , Q_2 , W 和 η 随 C_1 和

C_2 变化的函数, 并对该热机的基本热力学量进行了数值运算. 探究了在有限磁场中不同的各向异性参数下纠缠对这个热机的热传递 (Q_1, Q_2)、功 W 和效率 η 的影响. 结果表明: 当各向异性参数 Δ 值较小时, 量子热机在 $C_1 > C_2$ 和 $C_1 < C_2$ 两区域运行, 当增大 Δ 值时, 量子热机只在 $C_1 > C_2$ 区间运行.

- [1] Scovil H E D, Schulz-DuBois E O 1959 *Phys. Rev. Lett.* **2** 262
- [2] Geva E, Kosloff R 1992 *J. Chem. Phys.* **97** 4398
- [3] Lloyd S 1997 *Phys. Rev. A* **56** 3374
- [4] Kosloff R, Geva E, Gordon J 2000 *J. Appl. Phys.* **87** 8093
- [5] Feldmann T, Kosloff R 2000 *Phys. Rev. E* **61** 4774
- [6] He J Z, Chen J C, Hua B 2002 *Phys. Rev. E* **65** 036145
- [7] Wu F, Chen L G, Sun F R, Wu C, Li Q 2006 *Phys. Rev. E* **73** 016103
- [8] Wang J H, He J Z, Xin Y 2007 *Phys. Scr.* **75** 227
- [9] Rezek Y, Kosloff R 2006 *New J. Phys.* **8** 83
- [10] Bender C M, Brody D C, Meister B K 2000 *J. Phys. A* **33** 4427
- [11] Quan H T, Liu Y X, Sun C P, Nori F 2007 *Phys. Rev. E* **76** 031105
- [12] Quan H T, Zhang P, Sun C P 2006 *Phys. Rev. E* **73** 036122
- [13] Henrich M J, Mahler G, Michel M 2007 *Phys. Rev. E* **75** 051118
- [14] Abe S, Okuyama S 2011 *Phys. Rev. E* **83** 021121
- [15] Wang J H, He J Z, He X 2011 *Phys. Rev. E* **84** 041127
- [16] Wang J H, He J Z 2012 *J. Appl. Phys.* **11** 043505
- [17] Wang J H, Xiong S Q, He J Z, Liu J T 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080509 (in Chinese) [王建辉, 熊双泉, 何济洲, 刘江涛 2012 物理学报 **61** 080509]
- [18] Scully M O, Zubairy M S, Agarwal G S, Walther H 2003 *Science* **299** 862
- [19] Scully M O 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 207701
- [20] Dorfman K E, Kim M B, Svidzinsky A A 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053829
- [21] Scully M O, Chapin K R, Dorfman K E, Kim M B, Svidzinsky A A 2011 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **108** 15097
- [22] Quan H T 2009 *Phys. Rev. E* **79** 041129
- [23] Perrot P 1998 *A to Z of Thermodynamics* (New York: Oxford university press) p26, 103
- [24] Kieu T D 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 140403
- [25] Kieu T D 2006 *Eur. Phys. J. D* **39** 115
- [26] Chen J, Yan Z 1998 *J. Appl. Phys.* **84** 1791
- [27] Amico L, Fazio R, Osterloh A, Vedral V 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 517
- [28] Guo Z, Yan L S, Pan W, Luo B, Xu M F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 060301 (in Chinese) [郭振, 闫连山, 潘伟, 罗斌, 徐明峰 2011 物理学报 **60** 060301]
- [29] Lu D M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 090302 (in Chinese) [卢道明 2011 物理学报 **60** 090302]
- [30] Zhang T, Liu W T, Chen P X, Li C Z 2007 *Phys. Rev. A* **75** 062102
- [31] Zhang Y L, Zhou B 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 120301 (in Chinese) [张英丽, 周斌 2011 物理学报 **60** 120301]
- [32] He J Z, He X, Zheng J 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050303
- [33] Xie L J, Zhang D Y, Tang S Q, Zhan X G, Gao F 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3203
- [34] Wang H, Liu S Q, He J Z 2009 *Phys. Rev. E* **79** 041113
- [35] Zhang G F 2008 *Eur. Phys. J. D* **49** 123
- [36] Dzyaloshkii I 1958 *J. Phys. Chem. Sol.* **4** 241
- [37] Moriya T 1960 *Phys. Rev. Lett.* **4** 228
- [38] Arnesen M C, Bose S, Vedral V 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 017901
- [39] Wootters W K 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 2245
- [40] Tong D M 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 12401
- [41] Zeng J Y 2007 *Quantum Mechanics* (Vol. 2) (Beijing: Science Press) p203 (in Chinese) [曾谨言 2007 量子力学 (卷 II) (北京: 科学出版社) 第 203 页]
- [42] Marzlin P K, Sanders B C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 160408
- [43] Tong D M, Singh K, Kwek L C, Oh C H 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 110407
- [44] Tong D M, Singh K, Kwek L C, Oh C H 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 150402
- [45] Rigolin G, Ortiz G 2012 *Phys. Rev. A* **85** 062111

Entangled quantum heat engines based on two-qubit XXZ model with Dzyaloshinski-Mariya interaction*

Wang Tao Huang Xiao-Li[†] Liu Yang Xu Huan

(School of Physics and Electronic Technology, Liaoning Normal University, Dalian 116029, China)

(Received 24 October 2012; revised manuscript received 7 November 2012)

Abstract

We construct an entangled quantum heat engine based on two-coupled-qubit XXZ model with Dzyaloshinski-Mariya interaction. The work done and the heat transfer are discussed according to the definition first given by Kieu. The relations between the entanglement and heat transfer, work output and efficiency are analyzed for different anisotropic parameters. The results show that the second law of thermodynamics holds in entangled systems and the isolines for the efficiency are looped curves. When the anisotropic parameter Δ is small enough, the heat engine can operate in both $C_1 > C_2$ and $C_1 < C_2$, however, when Δ is large, the heat engine operates in $C_1 > C_2$ only.

Keywords: quantum heat engine, concurrence, efficiency

PACS: 03.65.Ud, 05.70.-a, 07.20.Pe

DOI: 10.7498/aps.62.060301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11105064).

[†] Corresponding author. E-mail: huangxiaoli1982@foxmail.com