

利用光晶格自旋链中磁振子的激发模拟有限温度下光子的动力学 Casimir 效应*

赵旭^{1)†} 赵兴东¹⁾²⁾ 景辉²⁾

1) (华东师范大学物理系, 精密光谱科学与技术国家重点实验室, 上海 200062)

2) (河南师范大学物理与电子工程学院, 新乡 453007)

(2012年10月25日收到; 2012年11月12日收到修改稿)

研究了在静磁场诱导的磁偶极-偶极相互作用和外部激光场诱导产生的偶极-偶极相互作用下光晶格自旋链中磁振子激发的动力学特征. 文中选取了蓝失谐光晶格, 提出了等效温度的概念, 并将系统中磁振子的激发过程与光学振动腔中光子的激发过程进行了类比. 研究表明, 通过选取适当的系统参数, 可以在磁振子系统中重现有限温度下光子的动力学 Casimir 效应.

关键词: 光晶格, 偶极-偶极相互作用, 磁振子, Casimir 效应

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Mn, 11.10.Wx, 32.80.QK **DOI:** 10.7498/aps.62.060302

1 引言

真实的物理系统大多是强相互作用的多体系统, 当用解析甚至数值方法求解这类系统的动力学演化过程很困难时, 可以采用量子模拟的方法进行研究. 1993年, Prentiss^[1] 提出了原子光学晶格的概念, 原子玻色-爱因斯坦凝聚体 (BEC) 成功制备后^[2], 利用光晶格中的 BEC 对固体晶格系统、凝聚态物理以及光学领域中一些复杂的现象进行模拟成为原子分子物理研究方向的热点课题之一.

光晶格中的 BEC 系统与固体晶格系统有很多相似之处, 但对于两个系统中均存在的自旋波而言, 其产生机制却各不相同. 在普通晶体中, 自旋波是原子中电子之间交换相互作用激发的结果^[3,4]; 而在光晶格中, 由于晶格尺度 ($\lambda_L/2$, λ_L 为驻波激光波长) 远远大于普通晶体的晶格常数, 电子与电子之间的交换相互作用完全可以忽略不计, 自旋波的产生来源于其他长程相互作用^[5-11]. 另外, 由于光晶格中每个格点上的原子数目很大 (一般大于 10^3),

玻色增强效应使得格点间的偶极-偶极相互作用得到极大的增强, 从而强烈地影响着原子基态的自旋取向, 进而诱导自旋波的产生. 如同用声子描述声波的激发一样, 量子化的自旋波通常用磁振子来描述. 本文利用光晶格中磁振子的激发过程来模拟有限温度下光子的动力学 Casimir 效应这一经典的量子光学现象^[12,13].

2 模型介绍

如图 1 所示, 我们考虑囚禁于准一维光晶格中自旋 $F=1$ 的磁原子 BEC. 光晶格由两束沿 y 轴相向传播的 π 偏振激光形成, 激光束的频率远远高于囚禁原子的跃迁频率, 即选取蓝失谐光晶格, 原子囚禁于光晶格中光强最弱处. 另外, 沿着 z 轴方向施加一个足够强的外部磁场 B , 使得原子链中各个格点上的自旋朝量子化轴 z . 我们假定光晶格势阱足够深, 以致于所有原子都处于 Mott 绝缘态, 每个格点上的原子数目相同且高度局域化. 从晶格整体来看, 所有格点上的 BEC 形成一个自旋链, 系

* 国家重点基础研究发展计划 (批准号: 2011CB921604)、国家自然科学基金 (批准号: 11004057, 10828408) 和上海市重点学科带头人项目 (批准号: B480) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: phyzxu@gmail.com

统的有效哈密顿量为

$$H_m = \sum_m \left[\lambda'_a \hat{S}_m^2 - \gamma_B \hat{S}_m \cdot \mathbf{B} - \sum_{n \neq m} J_{mn}^z \hat{S}_m \cdot \hat{S}_n \right], \quad (1)$$

上式中, $\lambda'_a = (1/2)\lambda_a \int d\mathbf{r} |\phi_m(\mathbf{r})|^4$, λ_a 是给定格点上原子间的 s 波散射长度; \hat{S}_m 是第 m 个格点的总自旋算符; 系数 $\gamma_B = -\mu_B g_F$ 是原子的旋磁比, 其中参数 μ_B 为玻尔磁子, g_F 是朗德 g 因子; 系数 J_{mn}^z 描述了静磁场诱导的磁偶极 - 偶极相互作用 (MDDI) 的强度, 其形式为 [5]

$$J_{mn}^z = \frac{\mu_0 \gamma_B^2}{8\pi \hbar^2} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' \frac{R_1}{|\mathbf{r}'|^5} |\phi_m(\mathbf{r})|^2 \times |\phi_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2, \quad (2)$$

其中 μ_0 是真空磁导率, $R_1 = |\mathbf{r}'|^2 - 3y'^2$.

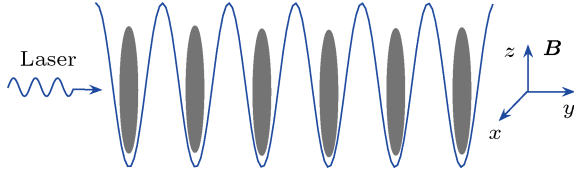


图1 囚禁于准一维蓝失谐光晶格中的薄饼状旋量原子 BEC 示意图沿光晶格方向施加的外部激光场引起格点间的 BEC 原子产生长程非线性偶极 - 偶极相互作用

实际上, 物理学家对如何在光晶格中操控冷原子更感兴趣, 通常的做法是对系统再加上一个磁场或者激光场. 这里, 我们选择对系统施加一个沿着光晶格方向传播的外部调制激光场, 该激光场的存在会诱导格点间原子产生长程非线性偶极 - 偶极相互作用 (LDDI), 其相应的哈密顿量为

$$H_{\text{opt}} = \sum_m \sum_{n \neq m} J_{mn}^{\text{opt}} (\hat{S}_m^- \hat{S}_n^+ + \hat{S}_m^+ \hat{S}_n^-). \quad (3)$$

系数 J_{mn}^{opt} 描述了格点间的 BEC 原子由外部激光场诱导产生的 LDDI 的强度, 其形式为 [5]

$$J_{mn}^{\text{opt}} = \frac{\gamma U_0}{12\Delta \hbar^2 k_L^3} \int d\mathbf{r} \int d\mathbf{r}' f_c(\mathbf{r}') \times \exp\left(-\frac{R_2}{W_L^2}\right) \cos(k_L y) \times \cos[k_L(y - y')] \mathbf{e}_{+1} \cdot \mathbf{W}(\mathbf{r}') \times \mathbf{e}_{-1} |\phi_m(\mathbf{r})|^2 |\phi_n(\mathbf{r} - \mathbf{r}')|^2, \quad (4)$$

其中, γ 表示原子的自发辐射率; $U_0 = \hbar|\Omega|^2/6\Delta$, Ω 是原子的拉比 (Rabi) 频率, Δ 为原子失谐量; $R_2 = r_\perp^2 + |\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|^2$, 横向坐标 $r_\perp = \sqrt{x^2 + z^2}$. 为了更好地描述 LDDI 的强度随格点的变化, 我们引入截断函数 $f_c(\mathbf{r}) = \exp(-r/L_c)$, 其中 L_c 是相

干长度; 驻波场激光束的波数 $k_L = 2\pi/\lambda_L$; W_L 是驻波场激光束的宽度; $\mathbf{e}_{\pm 1,0}$ 是球坐标系的单位矢量; 张量 $\mathbf{W}(\mathbf{r})$ 描述 LDDI 的空间形式, $\mathbf{W}(\mathbf{r}) = \frac{3}{4} \left[(\mathbf{1} - 3\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \left(\frac{\sin \xi}{\xi^2} + \frac{\cos \xi}{\xi^3} \right) - (\mathbf{1} - \hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}) \frac{\cos \xi}{\xi} \right]$, 其中, $\mathbf{1}$ 是单位矢量, $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{r}/|\mathbf{r}|$, $\xi = k_L |\mathbf{r}|$.

在 MDDI 和 LDDI 的共同作用下, 系统的哈密顿量可以表述为

$$H = H_m + H_{\text{opt}}. \quad (5)$$

(5) 式描述的哈密顿量与文献 [5] 中描述的哈密顿量形式相似, 但二者的物理意义却显著不同. 文献 [5] 中系统的 LDDI 是由形成光晶格的驻波激光场引起的, 而本文中系统的 LDDI 则是由外部激光场诱导产生, 这一差异对于后面的研究有着重要影响.

3 磁振子的理论描述

在本文中, 我们考虑铁磁凝聚体的情况. 对于由 (5) 式所描述的铁磁基态, 每个格点上原子的自旋方向指向量子化轴 z . 当外部磁场较强时, 每个格点上的自旋偏离量子化轴很小. 利用 HP 变换 [14], 哈密顿量 (5) 式转化为 [6]

$$H = E_0 + \gamma_B B_z \sum_m \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \frac{1}{2} \sum_m \sum_{n \neq m} \left[-2J_{mn}^z \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_n + J_{mn} (\hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \hat{a}_m + \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m \hat{a}_n + \hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n \hat{a}_m) \right] + S \sum_m \sum_{n \neq m} \left[J_{mn}^z (\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_m + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_n) - 2J_{mn} (\hat{a}_m^\dagger \hat{a}_n + \hat{a}_n^\dagger \hat{a}_m) \right], \quad (6)$$

其中 $E_0 = \lambda'_a MS(S+1) - \gamma_B B_z MS - \sum_m \sum_{n \neq m} J_{mn}^z S^2$, M 表示格点的总数目. 哈密顿量 (6) 式描述了铁磁原子 BEC 自旋链中非线性自旋波的激发. 通过 HP 变换, 由自旋算符描述的系统哈密顿量转化为由格点上原子的产生和湮灭算符描述的形式. (6) 式中格点的产生与湮灭算符 \hat{a}_n^\dagger 和 \hat{a}_n 在坐标空间和动量空间的 Fourier 变换关系为

$$\hat{a}_n^\dagger = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n} \hat{a}_k^\dagger, \quad \hat{a}_n = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_k e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}_n} \hat{a}_k, \quad (7)$$

其中, 波矢 \mathbf{k} 限定在第一布里渊区, \mathbf{R}_n 表示第 n 个格点与第一个格点之间的矢量. 由 (7) 式以及关系

式 $\frac{1}{M} \sum_n \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{R}_n] = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}$, (6) 式在动量空间的有效形式为

$$H = \sum_{k>0} \hbar \left[\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} \right) + \chi_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger + \hat{a}_k \hat{a}_{-k} \right) \right], \quad (8)$$

上式即磁振子系统的双模压缩哈密顿量. 对于足够强的磁场, 零温时系统中的自旋几乎全部沿着量子化轴 z 排列, 这一完全磁化的量子态可以看作是铁磁真空态. 当系统处于有限温度时, 系统中会出现少数几个偏离 z 轴排列的自旋, 这便是自旋波的激发. 对于弱激发, 磁振子的频率 ω_k 可以近似为

$$\omega_k \approx \frac{1}{\hbar} \left[4S(J_0 - J_k) + \frac{N_0}{M} (4J_k - 2J_k^z) \right], \quad (9)$$

其中, $J_k^{(z)} = \sum_{n' \neq n} J_{nn'}^{(z)} \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{R}_n - \mathbf{R}_{n'})]$. (8) 式右边第二项代表了不同模式间的非线性相互作用, 系数 χ_k 的形式为

$$\chi_k = \frac{1}{\hbar} \left[\frac{2N_0}{M} (J_k + J_0 - J_k^z) \right]. \quad (10)$$

3.1 MDDI 作用下系统的磁振子激发

在系统初始时刻, 原子处于光晶格的波节位置, 此处光强值为零. 当外部调制激光场尚未施加时, LDDI 不存在. 此时, 不同格点上的原子之间只有静磁场诱导的 MDDI 起作用. 在没有其他外部操作对系统施加影响的情况下, 系统在 MDDI 的作用下自由演化, 其初态为

$$|\Psi(0)\rangle = \prod_{k>0} \hat{S}(\gamma_k) |0_{\mathbf{k}}, 0_{-\mathbf{k}}\rangle. \quad (11)$$

双模压缩算符 $\hat{S}(\gamma_k) = \exp \left[\gamma_k \left(\hat{a}_k \hat{a}_{-k} - \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \right) \right]$ [15], γ_k 表示压缩因子并满足球对称性: $\gamma_k = \gamma_{-k}$. (11) 式表明, 系统的初态不是磁振子的真空态, 而是磁振子的压缩真空态. $|\Psi(0)\rangle$ 满足: $\hat{c}_k |\Psi(0)\rangle = 0$, \hat{c}_k 为磁振子的准粒子的湮灭算符. 从初态 $|\Psi(0)\rangle$ 出发, 经过计算我们可以得到磁振子的激发数目, 即算符 $\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$ 在初态 $|\Psi(0)\rangle$ 下的平均值

$$N_{\text{mag}}(\mathbf{k}) = \sinh^2 \gamma_k. \quad (12)$$

N_{mag} 即系统初始时刻仅在 MDDI 作用下激发的磁振子数目, 其中 γ_k 只与 MDDI 有关, 只依赖于格点间的自旋耦合强度 J_{mn}^z .

磁振子属于玻色子已为理论和实验所证明 [16,17]. 由 MDDI 激发的磁振子数目遵循玻色 - 爱因斯坦分布 [18], 可近似表述为: $f(E_k) =$

$\frac{1}{\exp(E_k/k_B T_{\text{eff}}) - 1}$, 其中, E_k 表示第 k 个磁振子模式的能量值; k_B 是玻尔兹曼常数; T_{eff} 定义为等效温度, 用来定性的描述磁振子系统的温度, 其形式为

$$T_{\text{eff}} = \frac{\hbar \omega_k}{k_B} \ln^{-1}(\eta_+ / \eta_-), \quad (13)$$

其中, $\eta_{\pm} = \omega_k \pm \sqrt{\omega_k^2 - \chi_k^2}$. 研究表明, 通过调节系统的横向囚禁波包宽度大小可以很好地控制 MDDI 的强度 [19]. 图 2 给出了等效温度 T_{eff} 与横向囚禁波包宽度 w 之间的变化关系. 图中显示, 随着 w 的增加, T_{eff} 逐渐衰减. 这一结果与文献 [19] 中所得到的结果相符合, 我们对非线性相干自旋波的调制不稳定性进行了详细的分析. 研究发现: 当 w 比较小时, 蓝失谐光晶格中波长较大的非线性相干自旋波的调制不稳定性区域主要对较长波长的调制不稳定性起作用; 随着 w 的增加, 调制不稳定性区域逐渐收缩, k 比较小的自旋波模变得更加稳定, 也就是说, 获得 $k=0$ 的较长波长的自旋波激发更困难些. 通过调节横向囚禁波包宽度, 从而调节系统的等效温度, 我们可以制备具有不同激发数目的系统初态.

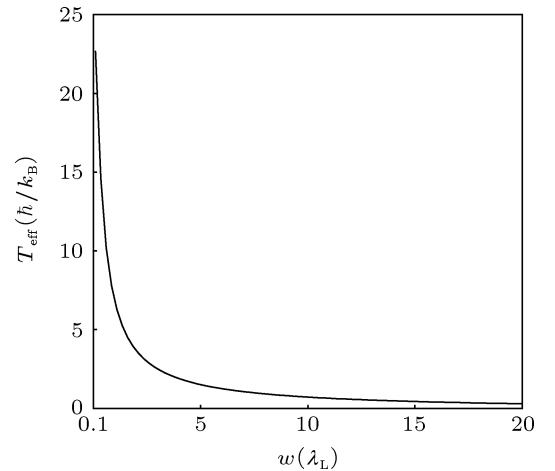


图 2 等效温度 T_{eff} 随横向囚禁波包宽度 w 变化的示意图. 参数: 选取 ^{87}Rb 原子的电子基态, 旋磁比 $\gamma_B = -\mu_B/2$; 形成光晶格的激光波长 $\lambda_L = 1 \mu\text{m}$; 格点数目取为 50 个, 每个格点上的原子数目为 1000 个.

实际上, 系统中磁振子的激发特点与光学振动腔系统中光子的动力学 Casimir 效应相似. 近年来, 关于后者的相关研究已引起众多物理学家的关注 [20-27]. 对于磁振子系统, 当横向囚禁波包宽度 w 值很大时, 系统的等效温度 T_{eff} 趋向于零, 这与光学振动腔系统中温度 $T=0$ 相对应. 受此启发, 我们可以尝试在磁振子系统中类比研究光子在 $T=0$ 时的真空量子效应, 通过调节 T_{eff} , 我们也可以类比分析有限温度下光子系统的动力学 Casimir 效应.

接下来,我们先来分析一下外部调制激光场诱导的 LDDI 对系统中磁振子激发的影响.

3.2 MDDI 和 LDDI 共同作用下系统的磁振子激发

当系统初态制备好以后,我们沿着光晶格方向施加一束频率远高于囚禁原子跃迁频率的调制激光.该激光场诱导格点间原子产生各向异性长程非线性 LDDI,此时系统的哈密顿量由(8)式所描述,记

$$H_k^0 = \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} \right), \quad (14)$$

$$S_k = \hbar\chi_k \left(\hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_k^\dagger + \hat{a}_{-k} \hat{a}_k \right), \quad (15)$$

在相互作用表象下, $S_I = e^{\frac{iH_k^0}{\hbar}t} S_k e^{-\frac{iH_k^0}{\hbar}t}$. 利用玻色算符对易关系以及公式

$$e^A B e^{-A} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} [A^{(i)}, B], \quad (16)$$

容易求得

$$S_I = \hbar\chi_k \left[\exp(-2i\omega_k t) \hat{a}_{-k} \hat{a}_k + \exp(2i\omega_k t) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger \right]. \quad (17)$$

对于相互作用项 S_I , 其态的演化方程为

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi(t)\rangle_I = S_I |\Psi(t)\rangle_I. \quad (18)$$

假定在初始时刻, $|\Psi(0)\rangle_I = |\Psi(0)\rangle$, 则

$$|\Psi(t)\rangle_I = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t S_I d\tau\right) |\Psi(0)\rangle. \quad (19)$$

利用薛定谔表象和相互作用表象之间的变换关系:

$|\Psi(t)\rangle_s = \exp(-iH_k^0 t/\hbar) |\Psi(t)\rangle_I$, 得

$$|\Psi(t)\rangle_s = \exp(-iH_k^0 t/\hbar) \times \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t S_I d\tau\right) |\Psi(0)\rangle. \quad (20)$$

将(14)式和(17)式带入(20)式,我们可以得到系统在任意时刻 t 的态

$$|\Psi(t)\rangle = \prod_{k>0} \exp\left[-i\omega_k t \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} \right)\right] \times \hat{S}(\xi_k) \hat{S}(\gamma_k) |0_k, 0_{-k}\rangle. \quad (21)$$

其中,双模压缩算符

$$\hat{S}(\xi_k) = \exp\left(\xi_k^* \hat{a}_{-k} \hat{a}_k - \xi_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger\right),$$

压缩因子 $\xi_k = i\lambda_k e^{i\omega_k t}$, $\lambda_k = \frac{\chi_k}{\omega_k} |\sin \omega_k t|$. 需要说明的是, $\hat{S}(\gamma_k)$ 是施加调制激光之前的双模压缩算

符,是对磁振子真空态 $|0_k, 0_{-k}\rangle$ 的压缩,压缩因子 γ_k 只与 MDDI 的大小有关;而 $\hat{S}(\xi_k)$ 是施加调制激光之后的双模压缩算符,是对双模压缩真空态 $\hat{S}(\gamma_k) |0_k, 0_{-k}\rangle$ (即初态)的进一步压缩,因此,压缩因子 ξ_k 与 MDDI 和 LDDI 的大小均有关.

从(21)式出发,第 k 个模式的磁振子激发数目可以表述为

$$\begin{aligned} N_k(t) &= \langle \Psi(t) | \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) | \Psi(t) \rangle \\ &= \langle \Psi(0) | \hat{S}^\dagger(\xi_k) \exp\left[i\omega_k t \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} \right)\right] \\ &\quad \times \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \exp\left[-i\omega_k t \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} \right)\right] \\ &\quad \times \hat{S}(\xi_k) | \Psi(0) \rangle. \end{aligned} \quad (22)$$

记 $\alpha = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$, $\beta = \exp\left[i\omega_k t \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} \right)\right]$, 利用玻色算符对易关系容易得到: $[\alpha, \beta] = 0$. 再由公式(16),容易证明

$$\begin{aligned} &\exp\left[i\omega_k t \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} \right)\right] \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \\ &\quad \times \exp\left[-i\omega_k t \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_{-k} \right)\right] \\ &= \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k. \end{aligned} \quad (23)$$

代入(22)式中得

$$N_k(t) = \langle \Psi(0) | \left[\hat{S}^\dagger(\xi_k) \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{S}(\xi_k) \right] | \Psi(0) \rangle. \quad (24)$$

记 $A = \xi_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger - \xi_k^* \hat{a}_{-k} \hat{a}_k$, $B = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k$, $t_1 = -\xi_k \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_k^\dagger - \xi_k^* \hat{a}_{-k} \hat{a}_k$, $t_2 = \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k} \hat{a}_{-k}^\dagger$, 可以求得如下递推关系: $[A^{2n-1}, B] = 2^{2n-2} |\xi_k|^{2n-2} t_1$, $[A^{2n}, B] = 2^{2n-1} |\xi_k|^{2n} t_2$ ($n \geq 1$). 利用(16)式,(24)式中的 $\hat{S}^\dagger(\xi_k) \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \hat{S}(\xi_k)$ 项可以化简为

$$\begin{aligned} &\exp\left(\xi_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger - \xi_k^* \hat{a}_{-k} \hat{a}_k\right) \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right) \\ &\quad \times \exp\left(\xi_k^* \hat{a}_{-k} \hat{a}_k - \xi_k \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_{-k}^\dagger\right) \\ &= \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2|\xi_k|} \left(\frac{e^{2|\xi_k|} - e^{-2|\xi_k|}}{2} \right) t_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \times \left(\frac{e^{2|\xi_k|} + e^{-2|\xi_k|}}{2} - 1 \right) t_2 \\ &= \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{\sinh(2|\xi_k|)}{2|\xi_k|} t_1 + \frac{\cosh(2|\xi_k|) - 1}{2} t_2. \end{aligned} \quad (25)$$

将(25)式带入(24)式得

$$\begin{aligned} N_k(t) &= \langle \Psi(0) | \left[\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \right. \\ &\quad + \frac{\sinh(2|\xi_k|)}{2|\xi_k|} \left(-\xi_k \hat{a}_{-k}^\dagger \hat{a}_k^\dagger - \xi_k^* \hat{a}_{-k} \hat{a}_k \right) \\ &\quad \left. + \sinh^2 |\xi_k| \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \hat{a}_{-k} \hat{a}_{-k}^\dagger \right) \right] | \Psi(0) \rangle. \end{aligned} \quad (26)$$

上式中 $[\dots]$ 中的各项在初态 $|\Psi(0)\rangle$ 下可分别求得

$$\begin{aligned} N_1 &= \langle \Psi(0) | \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} | \Psi(0) \rangle \\ &= N_{\text{mag}}(\mathbf{k}) = \sinh^2 \gamma_{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} N_2 &= \langle \Psi(0) | \left[\frac{\sinh(2|\xi_{\mathbf{k}}|)}{2|\xi_{\mathbf{k}}|} \left(-\xi_{\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger - \xi_{\mathbf{k}}^* \hat{a}_{-\mathbf{k}} \hat{a}_{\mathbf{k}} \right) \right] \\ &\quad \times |\Psi(0)\rangle \\ &= -\frac{1}{2} \sinh(2\gamma_{\mathbf{k}}) \sinh(2\lambda_{\mathbf{k}}) |\sin \omega_{\mathbf{k}} t|, \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} N_3 &= \langle \Psi(0) | \left[\sinh^2 |\xi_{\mathbf{k}}| \left(\hat{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \hat{a}_{\mathbf{k}} + \hat{a}_{-\mathbf{k}} \hat{a}_{-\mathbf{k}}^\dagger \right) \right] | \Psi(0) \rangle \\ &= (1 + 2 \sinh^2 \gamma_{\mathbf{k}}) \sinh^2 \lambda_{\mathbf{k}}. \end{aligned} \quad (29)$$

联立 (27)–(29) 式, 得

$$\begin{aligned} N_{\mathbf{k}}(t) &= \sinh^2 \gamma_{\mathbf{k}} + \sinh^2 \lambda_{\mathbf{k}} + 2 \sinh^2 \gamma_{\mathbf{k}} \sinh^2 \lambda_{\mathbf{k}} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sinh(2\gamma_{\mathbf{k}}) \sinh(2\lambda_{\mathbf{k}}) |\sin \omega_{\mathbf{k}} t|, \end{aligned} \quad (30)$$

(30) 式即 t 时刻磁振子的第 \mathbf{k} 个模式在 MDDI 和 LDDI 共同作用下的激发数目. 其中, 右边第一项代表 MDDI 对磁振子激发数目的贡献. 当调制激光足够强时, 系统中的 LDDI 起主导作用, 右边第二项可以近似看作是 LDDI 对激发数目的贡献. 最后两项代表 MDDI 和 LDDI 之间相互干涉所产生的激发数目, 对这两项中的所有模式 \mathbf{k} 求和, 结果大于零则表明相互干涉导致总激发数目出现增益效应, 反之则表明出现抑制效应.

4 模拟有限温度下光子的动力学 Casimir 效应

本节, 我们利用上节阐述的磁振子激发过程来模拟有限温度下光学共振腔中光子的动力学 Casimir 效应. 对于光学振动腔系统, 通常, 初态时系统中电场分量和磁场分量的平均值为零, 即 $\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle = \langle \hat{\mathbf{H}} \rangle = 0$. 在 t 时刻, 二者满足海森伯运动方程^[28]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t), \quad (31)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{H}}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \times \varepsilon(\mathbf{r}, t) \hat{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t), \quad (32)$$

其中, $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ 是介电常数; 电场分量满足边界条件, 在紧靠镜子处 $\hat{\mathbf{E}}$ 的强度为零. 从 (31) 式和 (32) 式可以看出, 即使镜子的位置和介电常数 $\varepsilon(\mathbf{r}, t)$ 发生变化, 电场分量和磁场分量的平均值仍然满足关系: $\langle \hat{\mathbf{E}} \rangle \equiv \langle \hat{\mathbf{H}} \rangle \equiv 0$. 在镜子振荡的过程中, 电磁场的

真空量子涨落被放大, 同时系统中有光子被激发出来^[29–32]. 相关研究表明, 要在某个系统中获得类似于光子的动力学 Casimir 效应, 需要满足两个条件: 第一, 在外部驱动场随时间变化的过程中, 系统中相关的量子场平均值保持不变; 第二, 系统的量子涨落被放大很多倍 (通常是 10^3 的量级以上). 对比我们所研究的磁振子系统可以发现, 它满足第一个条件. 在磁振子系统中, 当调制激光场存在时, 系统中会产生新的磁振子, 而且激发数目会随时间变化, 但在磁振子激发的过程中, 自旋分量的平均值保持不变, 即 $\langle \hat{S}_x \rangle = \langle \hat{S}_y \rangle = 0$. 特别地, 由于等效温度 T_{eff} 可以通过改变系统参数加以调节, 这为在磁振子系统中类比有限温度下光子的动力学 Casimir 效应提供了可能.

对于磁振子系统, 当施加了外部调制激光场以后, 系统在任意时刻 t 的态如 (21) 式所示. 该式从形式上表明 $|\Psi(t)\rangle$ 是一个双模压缩磁振子真空态, 其形式类似于有限温度下光学振动腔系统在 t 时刻的态^[12,13]. 这里我们对二者做一类比: 对于光学振动腔系统, 当镜子静止不动时, 系统初态 $|\Psi'(0)\rangle$ 是光子的双模压缩热力学真空态, 记作 $|\Psi'(0)\rangle = \hat{S}(\gamma'_{\mathbf{k}}) |0_{\mathbf{k}}, 0_{-\mathbf{k}}\rangle_p$, 其中压缩算符 $\hat{S}(\gamma'_{\mathbf{k}})$ 只依赖于振动腔的温度, 这对应于磁振子系统中的压缩算符 $\hat{S}(\gamma_{\mathbf{k}})$, 后者仅依赖于 MDDI 的强度 (J_{mn}^z); 当振动腔中的镜子来回振动时, 腔中的热-动力学过程产生第二个压缩算符, 记作 $\hat{S}(\xi'_{\mathbf{k}})$, 该压缩算符既依赖于系统的温度, 同时也与镜子的振动情况有关, 这对应于磁振子系统中的压缩算符 $\hat{S}(\xi_{\mathbf{k}})$, 后者既依赖于 MDDI 的强度 (J_{mn}^z), 也依赖于 LDDI 的强度 (J_{mn}^{opt}). 对于振动腔系统, 当镜子振动时, 激发的光子数目出现类似于“雪崩”现象的效应, 即产生的光子数目与真空态相比可以放大 10^3 倍以上^[12,13]. 为了清楚地表明磁振子激发也具有类似的现象, 我们定义

$$\bar{N}(T) = \frac{1}{T} \sum_{\mathbf{k}} \int_0^T N_{\mathbf{k}}(t) dt, \quad (33)$$

$\bar{N}(T)$ 表示在时间 T 范围内磁振子的平均激发数目.

图 3 给出了磁振子激发数目的放大倍数随等效温度的变化关系. 其中, \bar{N}_0 表示等效温度 $T_{\text{eff}} = 0$ 时系统中磁振子的激发数目. 我们选取了三组不同的激光强度值, 结果显示, 磁振子激发数目的放大倍数与调制激光强度有关, 其放大倍数可以达到 10^3 的量级. 该结果表明, 我们得到了与有限温度下

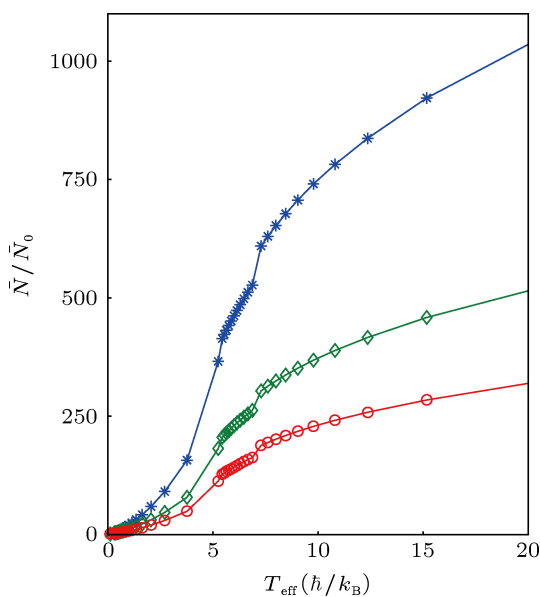


图3 磁振子激发数目的放大倍数随等效温度 T_{eff} 的变化关系上、中、下三条线分别对应光强 $Q = 1.5 \times 10^2, 2.5 \times 10^2, 3.0 \times 10^3$, 其他参数的选取与图2相同

光学振动腔系统中光子的动力学 Casimir 效应类似的现象. 实际上, 二者的物理过程非常相似, 区别仅在于观测对象从光子变成了磁振子. 数值计算表明, 当 LDDI 与 MDDI 的强度近似相等时, 放大倍数取得最大值. 该结论可以从 (30) 式中定性地看出: 该式中最后两项代表 MDDI 和 LDDI 之间干涉的结果, 当其中的任意一项比另外一项大很多倍时, 该项在系统的动力学演化过程中将会起主导作用, 而较弱的另外一项可以近似地忽略不计, 这样二者之

间的干涉效果势必会较弱, 只有当二者的强度相差不多时, 干涉增强效应才会显现出来.

尽管物理学家提出了许多理论方案, 但截至目前, 尚未在实验中真正地观察到有限温度下光学振动腔中光子的动力学 Casimir 效应. 鉴于磁振子系统具有非常好的可控性, 这为具体实验提供了可能性. 在具体操作中, 外部激光场可以采用脉冲激光的形式. 目前, 光晶格中每个格点上装载的原子数目可以达到 10^3 的量级, 以此计算, 磁振子的激发频率约为 10—100 kHz, 以目前的实验技术可以达到相应的测量要求 [33,34].

5 结论

本文研究了准一维蓝失谐光晶格自旋链中的非线性磁振子激发现象. 文中详细地阐述了在静磁场诱导的磁偶极-偶极相互作用和外部调制激光场诱导的偶极-偶极相互作用下系统中磁振子激发的动力学特征. 特别地, 我们提出了等效温度的概念, 并将该系统中磁振子的激发过程与光学振动腔中光子的激发过程做了类比. 研究表明, 通过调节系统参数, 如外部调制激光场的强度和横向囚禁波包宽度的大小, 可以在磁振子系统中重现有限温度下光子的动力学 Casimir 效应这一经典的量子光学现象. 对于该系统, 还有许多值得研究的地方, 比如磁振子的压缩特性以及磁振子的统计分布特征等.

- [1] Prentiss M G 1993 *Science* **260** 1078
- [2] Anderson M H, Ensher J R, Matthews M R, Wieman C E, Cornell E A 1995 *Science* **269** 198
- [3] Huang K, Han R Q 1988 *Solid-State Physics* (Beijing: Higher Education Press) p417 (in Chinese) [黄昆, 韩汝琦 1988 固体物理学 (北京: 高等教育出版社) 第 417 页]
- [4] Wang Y Q, Xiong Y S, Yi L 1995 *Chin. Phys.* **4** 505
- [5] Zhang W P, Pu H, Search C, Meystre P 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 060401
- [6] Xie Z W, Zhang W P, Chui S T, Liu W M 2004 *Phys. Rev. A* **69** 053609
- [7] Xie Z W, Cao Z X, Kats E I, Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **71** 025601
- [8] Li Z D, He P B, Li L, Liang J Q, Liu W M 2005 *Phys. Rev. A* **71** 053611
- [9] Zang X F, Li J P, Tan L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 4348 (in Chinese) [臧小飞, 李菊萍, 谭磊 2007 物理学报 **56** 4348]
- [10] Chen H F, Huang J S, Xie Z W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3435 (in Chinese) [陈海峰, 黄劲松, 谢征微 2008 物理学报 **57** 3435]
- [11] Li Z D, Li Q Y, He P B, Liang J Q, Liu W M, Fu G S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 015602
- [12] Plunien G, Schützhold R, Soff G 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 1882
- [13] Jing H, Shi Q J, Wu J S 2000 *Phys. Lett. A* **268** 174501
- [14] Holstein T, Primakoff H 1940 *Phys. Rev.* **58** 1098
- [15] Schumaker B L, Caves C M 1985 *Phys. Rev. A* **31** 3093
- [16] Nolting W, Brewer W D 2009 *Fundamentals of Many-Body Physics: Principles and Methods* (Berlin: Springer-Verlag) p97
- [17] Nikuni T, Oshikawa M, Oosawa A, Tanaka H 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 5868
- [18] Demokritov S O, Demidov V E, Dzyapko O, Melkov G A, Serga A A, Hillebrands B, Slavin A N 2006 *Nature* **443** 430
- [19] Zhao X D, Xie Z W, Zhang W P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6358 (in Chinese) [赵兴东, 谢征微, 张卫平 2007 物理学报 **56** 6358]
- [20] Golestanian R, Kardar M 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 3421
- [21] Kardar M, Golestanian R 1999 *Rev. Mod. Phys.* **71** 1233
- [22] Emig T 2003 *Europhys. Lett.* **62** 466
- [23] Liu S T, Zeng R, Xu J P, Yang Y P 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6446 (in Chinese) [刘树田, 曾然, 许静平, 羊亚平 2007 物理学报 **56** 6446]
- [24] Klimchitskaya G L, Mohideen U, Mostepanenko V M 2009 *Rev. Mod. Phys.* **81** 1827
- [25] Agnesi A, Braggio C, Bressi G, Carugno G, Della V F, Galeazzi G, Messineo G, Pirzio F, Reali G, Ruoso G, Scarpa D, Zanello D 2009 *J.*

- Phys.: Conf. Ser.* **161** 012028
- [26] Dodonov V V 2010 *Phys. Scr.* **82** 038105
- [27] Wilson C M, Johansson G, Pourkabirian A, Simoen M, Johansson J R, Duty T, Nori F, Delsing P 2011 *Nature* **479** 376
- [28] Saito H, Hyuga H 2008 *Phys. Rev. A* **78** 033605
- [29] Schaller G, Schützhold R, Plunien G, Soff G 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023812
- [30] Srivastava Y N, Widom A, Sivasubramanian S, Ganesh P M 2006 *Phys. Rev. A* **74** 032101
- [31] Yampol'skii V A, Savel'ev S, Mayselis Z A, Apostolov S S, Nori F 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 096803
- [32] Alves D T, Granhen E R, Silva H O, Lima M G 2010 *Phys. Rev. D* **81** 025016
- [33] Zhang W P 2003 *Physica* **32** 76 (in Chinese) [张卫平 2003 物理 **32** 76]
- [34] Li Z W, Ma X M, Pang H, Li F S 2012 *Chin. Phys. B* **21** 047601

Simulating dynamical Casimir effect at finite temperature with magnons in spin chain within an optical lattice*

Zhao Xu^{1)†} Zhao Xing-Dong¹⁾²⁾ Jing Hui²⁾

1) (State Key Laboratory of Precision Spectroscopy, Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

2) (College of Physics and Electronic Engineering, Henan Normal University, Xixiang 453007, China)

(Received 25 October 2012; revised manuscript received 12 November 2012)

Abstract

In this paper, we study the dynamical characteristics of magnons generated by the static magnetic dipole-dipole interaction and the external-laser induced dipole-dipole interaction in spin chain within an optical lattice. Specially, we choose a blue-detuned optical lattice and define an effective temperature for the system. We make a comparison between the generation process of magnons and that of photons in an optical vibration cavity. The results show that by suitably choosing the system parameters, the dynamical Casimir effect at finite temperature in the magnon system can be reproduced.

Keywords: optical lattice, dipole-dipole interaction, magnon, Casimir effect

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Mn, 11.10.Wx, 32.80.QK

DOI: 10.7498/aps.62.060302

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB921604), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11004057, 10828408), and the Program of Shanghai Subject Chief Scientist, China (Grant No. B480).

† Corresponding author. E-mail: phyzxu@gmail.com