非线性 LC 电路方程的显式精确行波解*

尚亚东[1)2)†] 黄勇[3)]

1) (广州大学数学与信息科学学院, 广州 510006)

2) (广东省高校数学与交叉科学重点实验室, 广州 510006)

3) (广州大学计算机科学与教育软件学院, 广州 510006)

(2012 年 9 月 26 日 收到; 2012 年 11 月 28 日 收到修改稿)

理论上考察了具有耗散的非线性 LC 电路中的行波. 借助于作者最近发展的精确求解非线性偏微分方程的扩展的双曲函数方法解析地研究了模拟非线性电路中冲击波的四阶耗散非线性波动方程. 一致地获得了丰富的显式精确解析行波解, 包括精确冲击波解和奇异的行波解, 和三角函数有理形式的周期波解.

关键词: 非线性 LC 电路, 非线性耗散波动方程, 冲击波, 周期波

PACS: 02.30.Jr, 03.65.Ge, 47.35.Fg, 52.35.Tc **DOI:** 10.7498/aps.62.070203

1 引 言

由以串联的线性传感器分支和以分流的非线性电容器分支组成的非线性 LC 电路作为实现 Toda 晶格的模拟电路已经被广泛的研究 [1−16]. 如果电阻器置入与非线性电容器串联, 将会是一个冲击波穿过电路传播而不是孤子穿过电路传播. Hietarinta 等在文献 [17] 中考虑了阻尼 Toda 晶格中冲击波的传播. 在忽略色散的情况下, 通过取连续逼近解析地获得了电路方程的稳定冲击波的存在性, 给出了冲击波速度和两相密度之间的显式关系. 并且进行了数值模拟, 运动晶格方程的数值模拟证明了: 如果初始速度趋向于较少稠密的相, 一个稳定的冲击波就会建立, 反之, 冲击波会逐渐扩散开. 数值模拟发现冲击波的平衡速度与解析公式非常好的一致. 在文献 [18, 19] 中, 分别解析地获得了非稳耗散非线性 LC 电路中冲击波的高阶逼近解. 文献 [20, 21] 用不同的分析方法从理论上考察了耗散非线性 LC 电路中的冲击波, 获得了以常速行进的稳定行波解及其高阶校正. 实验上已经证明了具常数波幅的冲击波在带有耗散的非线性 LC 电路中稳定地传播. 只要波的波幅足够小到与理论逼近一致, 则观察得冲击波的速度与宽度与理论预测一致. Malfliet, Rombouts[22] 用 tanh 方法结合约化摄动技巧, 获得了直到三阶的类 Burgers 的校正冲击波, 即所谓的装饰冲击波解.

文献 [20] 通过对电路方程中的 $u_{n\pm1}$ 围绕 u_n 进行连续近似, 对数函数围绕单位 1 展开, 得到下列四阶耗散非线性波动方程:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right) - v\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}\right)=0, \quad (1)$$

方程 (1) 可以看成是具耗散的四阶波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)-v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=0 \quad (2)$$

的非线性摄动或变形. 方程 (2) 可以用于模拟具横向色散效应的黏性弹性杆纵波的传播 [23], 具黏性阻尼的双向小振幅浅水波的传播 (见文献 [24]). 方程 (1) 也可认为是具耗散的非线性 Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)-v\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2} \quad (3)$$

的变形. 取方程 (3) 中黏性系数 $v=0$ 时, 方程即退

* 国家自然科学基金 (批准号: 40890150, 40890153, 11271090) 和广东省科技计划 (批准号: 2008B080701042) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: gzydshang@126.com

化为非线性 Boussinesq 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}. \tag{4}$$

闫振亚, 张鸿庆 [25] 讨论了方程 (3) 的相似约化, 获得了四种精确类孤立波解. 对于非线性 Boussinesq 方程 (4) 已经有许多文献用各种不同方法研究了精确解的存在性. 这方面的结果可见文献 [24]. 由于四阶波动方程 (1) 中含有未知变量 u 的三次多项式关于时间变量 t 的二阶导数以及 u^2 关于时间变量 t 和变量 x 的三阶混合导数, 是一个十分复杂的退化非线性高阶波动方程, 寻求其精确解析解十分困难. 迄今为止, 就作者所知, 只有一些渐近展开或约化摄动得到的低阶或高阶近似解, 而未见获得显式精确解析解的报道.

本文的目的是解析的考察四阶耗散非线性波动方程 (1) 的精确可解性, 利用作者最近提出的扩展双曲函数展开法 [26−30] 寻找四阶耗散非线性波动方程 (1) 的显式精确析解. 借助于计算机代数符号计算软件 Maple, 获得了方程 (1) 的含有多个任意参数的双曲函数有理分式型的显式精确解析解, 既包含有显式精确冲击波解, 也有奇异的行进波解, 还有许多三角函数有理分式型显式精确周期波解. 我们的方法可以一致地求出非线性发展偏微分方程的双曲函数有理分式型孤立波解、三角函数有理分式型周期波解. 不但适用于可积系统, 也可用于带耗散的非可积系统. 这里的方法和结果包含 tanh 展开法、扩展 tanh 方法, tanh-coth 方法、投射 Riccati 方程方法、双曲函数展开法、扩展双曲函数展开方法, G'/G 展开法, 齐次平衡法, LS 解法, 首次积分方法等 [31−45] 为特例.

2 四阶耗散非线性波动方程 (1) 的显式精确行波解

考虑方程 (1) 的行波解

$$u(x,t)=u(\xi),\xi=kx+\omega t+\xi_0, \tag{5}$$

其中 k,ω 为待定常数, 分别表示波数和圆频率, ξ_0 为任意常数. 在行波变换下, 方程 (1) 约化为四阶非线性常微分方程

$$\omega^2\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}\right)''-k^2\left(u+\frac{1}{12}k^2u''\right)''$$
$$-\nu\omega k^2\left(u-\frac{1}{2}u^2\right)'''=0. \tag{6}$$

根据扩展的双曲函数展开方法 [26−29], 首先假设非线性常微分方程 (6) 有如下形式的解:

$$u(\xi)=a_0+a_1f(\xi)+b_1g(\xi), \tag{7}$$

其中函数 f,g 满足一阶非线性常微分方程组

$$f'(\xi)=-f(\xi)g(\xi),$$
$$g'(\xi)=\varepsilon-r\varepsilon f(\xi)-g^2(\xi), \tag{8}$$

及其首次积分

$$g^2(\xi)=\varepsilon-2r\varepsilon f(\xi)+Cf^2(\xi), \tag{9}$$

这里 a_0,a_1,b_1 为待定常数, $\varepsilon=\pm1$, 而 C 为任意积分常数.

将方程 (7) 代入到方程 (6) 中, 并且反复利用方程 (8) 和方程 (9), 令方程中所有 f^ig^j 各项的系数为零, 得到关于这些常数 a_0,a_1,b_1,k,ω 的非线性代数方程组.

分二种情形来讨论.

情形1 $\varepsilon=1$, 非线性代数方程组为:

$$a_1(-2\omega^2a_1^2-6\omega^2b_1^2C+12\nu\omega k^2b_1C+Ck^4)=0,$$

$$6\nu\omega k^2b_1^2C+6\nu\omega k^2a_1^2-6\omega^2a_1^2b_1-2\omega^2b_1^3C+k^4b_1C=0,$$

$$12\omega^2a_0b_1a_1C+6\nu\omega k^2a_{1,1}C-6\nu\omega k^2a_0a_1C+3k^4b_1rC+21\nu\omega k^2b_1^2rC-9\omega^2b_1^3rC$$
$$+15\nu\omega k^2a_1^2r-15\omega^2a_1^2b_1r-6\omega^2a_1b_1C=0,$$

$$-7\omega^2a_1^3r+6\omega^2a_0a_1^2C+5k^4a_1rC+60\nu\omega k^2b_1a_1rC-33\omega^2b_1^2a_1rC+6\nu\omega k^2b_1C^2-3\omega^2a_1^2C$$
$$+6\omega^2a_0b_1^2C^2-6\nu\omega k^2a_0b_1C^2-3\omega^2b_1^2C^2=0,$$

$$\omega^2a_0^2a_1+\nu\omega k^2a_0b_{1,1}r-\nu\omega k^2b_1r-\nu\omega k^2b_1a_1-\omega^2a_0a_1+\omega^2b_1^2r+\omega^2b_1^2a_1-2\omega^2a_0b_1^2r$$
$$+\omega^2a_1-k^2a_1-1/12k^4a_1=0,$$

$-\omega^2 b_1 a_1-\omega^2 b_1^3 r+1/12k^4 b_1 r-\omega^2 b_1 r-\omega^2 a_0^2 b_1 r+k^2 b_1 r+\nu\omega k^2 b_1^2 r+\omega^2 a_0 b_1 r-\nu\omega k^2 a_0 a_1$

$+2\omega^2 a_0 b_1 a_1+\nu\omega k^2 a_1=0,$

$4\omega^2 {b_1}^3 r^2-6\nu\omega k^2 a_1 r+2\omega^2 b_1 C+2\omega^2 {b_1}^3 C-6\nu\omega k^2 {b_1}^2 r^2+4\omega^2 {a_1}^2 b_1-1/2k^4 b_1 r^2-12\omega^2 a_0 b_1 a_1 r-2\omega^2 a_0 b_1 C$

$+6\nu\omega k^2 a_0 a_1 r-2k^2 b_1 C-2/3k^4 b_1 C+2\omega^2 {a_0}^2 b_1 C-4\nu\omega k^2 {b_1}^2 C-4\nu\omega k^2 {a_1}^2+6\omega^2 b_1 a_1 r=0,$

$5\omega^2 {a_1}^2 r-20\nu\omega k^2 b_1 a_1 C-2\omega^2 a_0 a_1 C-5/2k^4 a_1 r^2-30\nu\omega k^2 b_1 r^2 a_1+2\omega^2 a_1 C+12\nu\omega k^2 a_0 b_1 rC$

$+2\omega^2 {a_0}^2 a_1 C-5/3k^4 a_1 C+20\omega^2 {b_1}^2 a_1 r^2-10\omega^2 a_0 {a_1}^2 r+3\omega^2 {a_1}^3-14\omega^2 a_0 {b_1}^2 rC+7\omega^2 {b_1}^2 rC$

$+11\omega^2 {b_1}^2 a_1 C-12\nu\omega k^2 b_1 rC-2k^2 a_1 C=0,$

$15\nu\omega k^2 b_1 r a_1-3(\omega)^2 {b_1}^2 r^2-2\omega^2 {b_1}^2 C+6\omega^2 a_0 {b_1}^2 r^2-3\nu\omega k^2 a_0 b_1 r^2-11\omega^2 {b_1}^2 a_1 r+3\nu\omega k^2 b_{1,1} r^2+4\omega^2 a_0 {b_1}^2 C$

$+5/4k^4 a_1 r-3\omega^2 a_1 r+4\omega^2 a_0 {a_1}^2-2\omega^2 {a_1}^2+3k^2 a_1 r+3\omega^2 a_0 a_1 r-3\omega^2 {a_0}^2 a_1 r$

$$-4\nu\omega k^2 a_0 b_1 C+4\nu\omega k^2 b_1 C=0. \tag{10}$$

情形2 $\varepsilon=-1$, 非线性代数方程组为

$a_1(-2\omega^2 {a_1}^2+Ck^4-6\omega^2 {b_1}^2 C+12\omega\nu k^2 b_1 C)=0,$

$-6\omega^2 {a_1}^2 b_1+k^4 b_1 C+6\omega\nu k^2 {a_1}^2+6\omega\nu k^2 {b_{1,1}}^2 C-2\omega^2 {b_1}^3 C=0,$

$-3k^4 b_1 rC-15\omega\nu k^2 {a_1}^2 r-21\omega\nu k^2 {b_1}^2 rC+15\omega^2 {a_1}^2 b_1 r-6\omega^2 b_1 a_1 C-6\omega\nu k^2 a_{1,0} a_1 C+12\omega^2 a_0 a_1 b_1 C$

$+9\omega^2 {b_1}^3 rC+6\omega\nu k^2 a_1 C=0,$

$7\omega^2 {a_1}^3 r-5k^4 a_1 rC-6\omega\nu k^2 a_0 b_1 C^2+33\omega^2 {b_1}^2 a_1 rC+6\omega^2 a_0 {b_1}^2 C^2+6\omega\nu k^2 b_1 C^2-3\omega^2 {b_1}^2 C^2$

$+6\omega^2 a_0 {a_1}^2 C-60\omega\nu k^2 b_1 r a_1 C-3\omega^2 {a_1}^2 C=0,$

$\omega^2 a_0 a_1-1/12k^4 a_1-\omega\nu k^2 b_1 r-\omega\nu k^2 b_1 a_1-\omega^2 {a_{1,0}}^2 a_1+\omega^2 {b_1}^2 r-2\omega^2 a_{1,0} {b_1}^2 r+\omega^2 {b_1}^2 a_1$

$-\omega^2 a_1+\omega\nu k^2 a_0 b_1 r+k^2 a_1=0,$

$-\omega^2 a_0 b_1 r-k^2 b_1 r-\omega^2 {b_1}^3 r+\omega^2 b_1 r+\omega\nu k^2 {b_1}^2 r+1/12k^4 b_1 r-\omega\nu k^2 a_1+\omega\nu k^2 a_0 a_1$

$+\omega^2 {a_0}^2 b_1 r+\omega^2 b_1 a_1-2\omega^2 a_0 b_1 a_1=0,$

$2\omega^2 {a_0}^2 b_1 C-1/2k^4 b_1 r^2+6\omega\nu k^2 a_1 r-2\omega^2 a_0 b_1 C+4\omega\nu k^2 {a_1}^2+12\omega^2 a_0 b_1 a_1 r+4\omega^2 {b_1}^3 r^2-2k^2 b_1 C$

$-6\omega\nu k^2 a_0 a_1 r-6\omega^2 b_1 a_1 r-6\omega\nu k^2 {b_1}^2 r^2-2\omega^2 {b_1}^3 C+2/3k^4 b_1 C-4\omega^2 {a_1}^2 b_1+2\omega^2 b_1 C+4\omega\nu k^2 {b_1}^2 C=0,$

$2\omega^2 {b_1}^2 C-11\omega^2 {b_1}^2 a_1 r-3\omega\nu k^2 a_0 b_1 r^2-3\omega^2 {b_1}^2 r^2+3\omega^2 a_1 r-4\omega^2 a_0 {b_1}^2 C+3\omega^2 {a_0}^2 a_1 r-4\omega\nu k^2 b_1 C$

$+15\omega\nu k^2 b_1 r a_1-3\omega^2 a_0 a_1 r+4\omega\nu k^2 a_0 b_1 C-4\omega^2 a_0 {a_1}^2+6\omega^2 a_0 {b_1}^2 r^2$

$+5/4k^4 a_1 r+2\omega^2 {a_1}^2+3\omega\nu k^2 b_1 r^2-3k^2 a_1 r=0,$

$-2\omega^2 a_0 a_1 C-30\omega\nu k^2 b_1 r^2 a_1+5/3k^4 a_1 C+2\omega^2 {a_0}^2 a_{1,1} C+20\omega^2 {b_1}^2 a_1 r^2-7\omega^2 {b_1}^2 rC-5\omega^2 {a_1}^2 r+2\omega^2 a_1 C$

$-11\omega^2 {b_1}^2 a_1 C-3\omega^2 {a_1}^3+10\omega^2 a_0 {a_1}^2 r-5/2k^4 a_1 r^2+20\omega\nu k^2 b_1 a_1 C$

$$+12\omega\nu k^2 b_1 rC-12\omega\nu k^2 a_0 b_1 rC+14\omega^2 a_0 {b_1}^2 rC-2k^2 a_1 C=0. \tag{11}$$

利用符号计算软件包 PDESolver 解非线性代数方程组 (10), (11) 分别得到 4 组、3 组解, 把这些解代回方程 (7), 并注意到对应于 $\varepsilon=1$ 和 $\varepsilon=-1$, 非线性一阶常微分方程组 (8) 分别有解

$$f(\xi)=\frac{1}{a\cosh\xi+b\sinh\xi+r},\quad g(\xi)=\frac{a\sinh\xi+b\cosh\xi}{a\cosh\xi+b\sinh\xi+r}, \tag{12}$$

(注意此时有 $g^2(\xi)=1-2rf(\xi)+(b^2-a^2+r^2)f^2(\xi)$) 和

$$f(\xi)=\frac{1}{a\ \cos\xi+b\ \sin\xi+r},\quad g(\xi)=\frac{-a\ \sin\xi+b\ \cos\xi}{a\ \cos\xi+b\ \sin\xi+r},\tag{13}$$

(注意此时有 $g^2(\xi)=-1+2rf(\xi)+(b^2+a^2-r^2)f^2(\xi)$).

综合 (5), (7), (12) 和方程组 (10) 的解, 我们有

情形1　方程组 (10) 的解为

$$k=\frac{12v}{\sqrt{576v^4+240v^2+31}},\quad r=\frac{\sqrt{C(9v^2+2)}}{3v},\quad \omega=\frac{-72v(4v^2+1)}{576v^4+240v^2+31},$$
$$a_0=\frac{6v^2+1}{6(4v^2+1)},\quad a_1=\frac{\sqrt{C(9v^2+2)}v}{4v^2+1},\quad b_1=\frac{-3v^2}{4v^2+1}.$$

此时四阶耗散非线性波动方程 (1) 容许有下列双曲函数有理分式形式的显式精确行波解:

$$u_1(x,t)=\frac{6v^2+1}{6(4v^2+1)}+\frac{3v^2(\sqrt{C(1+2/(9v^2))}-a\sinh\xi-b\cosh\xi)}{(4v^2+1)\left(a\cosh\xi+b\sinh\xi+\sqrt{C(1+2/(9v^2))}\right)},\tag{14}$$

其中

$$\xi=\frac{12v}{\sqrt{576v^4+240v^2+31}}x-\frac{72v(4v^2+1)}{576v^4+240v^2+31}t+\xi_0,\quad C=b^2-a^2+r^2.$$

情形2　方程组 (10) 的解为

$$k=\frac{12v}{\sqrt{576v^4+240v^2+31}},\quad r=\frac{\sqrt{C(9v^2+2)}}{3v},\quad \omega=\frac{72v(4v^2+1)}{576v^4+240v^2+31},$$
$$a_0=\frac{6v^2+1}{6(4v^2+1)},\quad a_1=\frac{\sqrt{C(9v^2+2)}v}{4v^2+1},\quad b_1=\frac{3v^2}{4v^2+1}.$$

此时四阶耗散非线性波动方程 (1) 容许有下列双曲函数有理分式形式的显式精确行波解:

$$u_2(x,t)=\frac{6v^2+1}{6(4v^2+1)}+\frac{3v^2\left(\sqrt{C(1+2/(9v^2))}+a\sinh\xi+b\cosh\xi\right)}{(4v^2+1)\left(a\cosh\xi+b\sinh\xi+\sqrt{C(1+2/(9v^2))}\right)},\tag{15}$$

其中

$$\xi=\frac{12v}{\sqrt{576v^4+240v^2+31}}x+\frac{72v(4v^2+1)}{576v^4+240v^2+31}t+\xi_0,\quad C=b^2-a^2+r^2.$$

情形3　方程组 (10) 的解为

$$k=(8v^2+2)\sqrt{6\left(9v^2+1+3v\sqrt{9v^2+2}\right)/D}b_1,\quad r=0,\quad a_0=\frac{1+5v^2+v\sqrt{9v^2+2}}{2(4v^2+1)},$$
$$a_1=0,\quad b_1=b_1,\quad \omega=\frac{1152(v^2+1/4)^2\,b_1((-1/3v^2-1/6)\sqrt{9v^2+2}+v^3+1/6v)}{E}.$$

此时四阶耗散非线性波动方程 (1) 对应的有下列双曲函数有理分式形式的显式精确行波解:

$$u_3(x,t)=\frac{1+5v^2+\sqrt{2v^2+9v^4}}{2(4v^2+1)}+\frac{b_1(a\sinh\xi+b\cosh\xi)}{a\cosh\xi+b\sinh\xi},\tag{16}$$

其中

$$\begin{aligned}\xi=&(8v^2+2)\sqrt{6\left(9v^2+1+3v\sqrt{9v^2+2}\right)/D}b_1x\\&+\frac{1152(v^2+1/4)^2b_1\left((-1/3v^2-1/6)\sqrt{9v^2+2}+v^3+1/6v\right)}{E}t+\xi_0,\\C=&b^2-a^2+r^2,\quad D=(6v^3\sqrt{9v^2+2}+(174+64b_1^2)v^4+(78+32b_1^2)v^2+4b_1^2+9),\end{aligned}$$

$$E=\big(-88v^3b_1^2-320v^5b_1^2-384v^7b_1^2-8vb_1^2-204v^3-768v^5-936v^7-18v\big)\sqrt{9v^2+2}+(2808+1152b_1^2)v^8$$
$$+(1088b_1^2+2616)v^6+(936+392b_1^2)v^4+(150+64b_1^2)v^2+4b_1^2+9.$$

情形4 方程组 (10) 的解为

$$k=4(4v^2+1)\sqrt{6\big(9v^2+1+3v\sqrt{9v^2+2}\big)/D}b_1,\quad r=r,\quad a_0=\frac{1+5v^2+v\sqrt{9v^2+2}}{2(4v^2+1)},$$
$$a_1=\sqrt{C}b_1,\quad b_1=b_1,\quad \omega=\frac{-24(4v^2+1)^2b_1\big(v+\sqrt{9v^2+2}\big)}{E}.$$

此时四阶耗散非线性波动方程 (1) 对应的有下列双曲函数有理分式形式的显式精确行波解:

$$u_4(x,t)=\frac{1+5v^2+\sqrt{2v^2+9v^4}}{2(4v^2+1)}+\frac{b_1\big(\sqrt{C}+a\sinh\xi+b\cosh\xi\big)}{a\cosh\xi+b\sinh\xi+r},\tag{17}$$

其中

$$\xi=4(4v^2+1)\sqrt{6\big(9v^2+1+3v\sqrt{9v^2+2}\big)/D}b_1x+\frac{-24(4v^2+1)^2b_1\big(v+\sqrt{9v^2+2}\big)}{E}t+\xi_0,$$
$$C=b^2-a^2+r^2,\quad D=\big(78v^2+174v^4+6v^3\sqrt{9v^2+2}+64v^4b_1^2+32v^2b_1^2+4b_1^2+9\big),$$
$$E=(-4vb_1{}^2-32v^3b_1{}^2-9v-72v^3-156v^5-64v^5b_1{}^2)\sqrt{9v^2+2}+(468+192b_1{}^2)v^6$$
$$+(160b_1{}^2+396)v^4+(44b_1^2+105)v^2+9+4b_1^2.$$

结合 (5), (7), (13) 和方程组 (11) 的解, 我们有

情形1 方程组 (11) 的解为

$$k=\frac{12\sqrt{576v^4+240v^2+31}v}{576v^4+240v^2+31}i,\quad r=\frac{\sqrt{C(9v^2+2)}}{3v}i,\quad \omega=\frac{72(4v^2+1)v}{576v^4+240v^2+31}i,$$
$$a_0=\frac{6v^2+1}{6(4v^2+1)},\quad a_1=\frac{\sqrt{C(9v^2+2)}v}{4v^2+1}i,\quad b_1=\frac{3v^2}{4v^2+1}i.$$

此时四阶耗散非线性波动方程 (1) 有复形式的双曲函数有理分式型显式精确行波解

$$u_5(x,t)=\frac{6v^2+1}{6(4v^2+1)}+i\frac{3v^2\big(\sqrt{C(1+2/(9v^2))}-ai\sinh\xi+b\cosh\xi\big)}{(4v^2+1)(a\cosh\xi+bi\sinh\xi+\sqrt{-C(1+2/(9v^2))})},\tag{18}$$

其中

$$\xi=\frac{12\sqrt{576v^4+240v^2+31}v}{576v^4+240v^2+31}x+\frac{72(4v^2+1)v}{576v^4+240v^2+31}+\xi_0,\quad C=b^2+a^2-r^2.$$

情形2 方程组 (11) 的解为

$$k=8\sqrt{6\big(9v^2+1+3v\sqrt{9v^2+2}\big)/D}(v^2+1/4)b_1,\quad r=0,\quad a_0=\frac{1+5v^2+v\sqrt{9v^2+2}}{8v^2+2},$$
$$a_1=0,\quad b_1=b_1,\quad \omega=\frac{1152b_1\big((1/3v^2+1/6)\sqrt{9v^2+2}-v^3-1/6v\big)(v^2+1/4)^2}{E}.$$

此时四阶耗散非线性波动方程 (1) 有对应的三角函数有理分式形式的显式精确周期行波解

$$u_6(x,t)=\frac{1+5v^2+\sqrt{2v^2+9v^4}}{2(4v^2+1)}+\frac{b_1(-a\sin\xi+b\cos\xi)}{a\cos\xi+b\sin\xi},\tag{19}$$

其中

$$\xi=8\sqrt{6(9v^2+1+3v\sqrt{9v^2+2})/D}(v^2+1/4)b_1x$$
$$+\frac{1152b_1\big((1/3v^2+1/6)\sqrt{9v^2+2}-v^3-1/6v\big)(v^2+1/4)^2}{E}t+\xi_0,$$

$$C = b^2+a^2-r^2,\quad D = 6v^3\sqrt{9v^2+2}+(64b_1{}^2-174)v^4+(-78+32b_1{}^2)v^2-9+4b_1{}^2,$$

$$E = \big(768v^5+936v^7+204v^3-8vb_1{}^2-88v^3b_1{}^2-320v^5b_1{}^2-384v^7b_1{}^2+18v\big)\sqrt{9v^2+2}$$
$$+(-2808+1152b_1{}^2)v^8+(-2616+1088b_1{}^2)v^6+(-936+392b_1{}^2)v^4+(64b_{1,1}{}^2-150)v^2-9+4b_1{}^2.$$

情形3　方程组 (11) 的解为

$$k = (16v^2-4)b_1\sqrt{6\big(9v^2+1+3v\sqrt{9v^2+2}\big)/D},\quad r=r,\quad a_0=\frac{1+5v^2+v\sqrt{9v^2+2}}{8v^2+2},$$

$$a_1=\sqrt{C}b_1,\quad b_1=b_1,\quad \omega=\frac{384\big(v+\sqrt{9v^2+2}\big)b_1(v^2+1/4)^2}{E},$$

此时四阶耗散非线性波动方程 (1) 对应的三角函数有理分式形式的显式精确周期行波解为

$$u_7(x,t)=\frac{1+5v^2+\sqrt{2v^2+9v^4}}{2(4v^2+1)}+\frac{b_1\big(\sqrt{C}-a\sin\xi+b\cos\xi\big)}{a\cos\xi+b\sin\xi+r},\tag{20}$$

其中

$$\xi = (16v^2-4)b_1\sqrt{6\big(9v^2+1+3v\sqrt{9v^2+2}\big)/D}x+\frac{384\big(v+\sqrt{9v^2+2}\big)b_1(v^2+1/4)^2}{E}t+\xi_0,$$

$$C = b^2+a^2-r^2,\quad D=\big(6v^3\sqrt{9v^2+2}+(-64b_1{}^2+174)v^4+(78-32b_1{}^2)v^2+9-4b_1{}^2\big),$$

$$E = \big(156v^5+9v+72v^3-4vb_1{}^2-32v^3b_1{}^2-64v^5b_1{}^2\big)\sqrt{9v^2+2}+(-468+192b_1{}^2)v^6$$
$$+(160b_1{}^2-396)v^4+(-105+44b_1{}^2)v^2-9+4b_1{}^2.$$

其次, 假设非线性常微分方程 (6) 有如下形式的解

$$u(\xi)=a_0+a_1g(\xi),\tag{21}$$

其中 $g(\xi)$ 满足非线性常微分方程

$$g'(\xi)=-g^2(\xi),\tag{22}$$

将方程 (21) 代入方程 (6), 并且反复利用 (22), 然后令结果方程中所有 g^i 各项的系数等于零, 可得到关于 a_0,a_1,k,ω,r 的非线性代数方程组

$$\begin{aligned}&-2a_1(-2a_1{}^2\omega^2+6va_1k^2\omega+k^4)=0,\\&-2a_1(-\omega^2a_0{}^2+\omega^2a_0+k^2-\omega^2)=0,\\&-3a_1\omega(a_1\omega-2a_1\omega a_0-2vk^2+2vk^2a_0)=0.\end{aligned}\tag{23}$$

求解得

$$k=\sqrt{\frac{8\big((156v^5+76v^3+9v)\sqrt{2+9v^2}+468v^6+280v^4+3+53v^2\big)}{(208v^4+84v^2+9)}a_1},$$

$$\omega=\frac{-64(v^2+1/4)^2\big(v+\sqrt{2+9v^2}\big)a_1}{(-52v^5-24v^3-3v)\sqrt{2+9v^2}+132v^4+156v^6+35v^2+3},\quad r=r,$$

$$a_0=\frac{1+5v^2+v\sqrt{2+9v^2}}{8v^2+2},\quad a_1=a_1.$$

注意到非线性常微分方程 (22) 有解

$$g(\xi)=\frac{1}{\xi},\tag{24}$$

于是结合 (4), (7) 和 (24), 四阶耗散非线性波动方程 (1) 有对应的有理分式形式的显式精确行波解

$$u_8(x,t)=\frac{1+5\,v^2+\sqrt{2\,v^2+9\,v^4}}{2(4\,v^2+1)}+\frac{1}{\xi},\tag{25}$$

其中行波变量这时约化为

$$\xi=\sqrt{\frac{E}{(208v^4+84v^2+9)}}x+\frac{-64(v^2+1/4)^2(v+\sqrt{2+9v^2})}{(-52v^5-24v^3-3v)\sqrt{2+9v^2}+132v^4+156v^6+35v^2+3}t+\xi_0.$$

其中 $E=8((156v^5+76v^3+9v)\sqrt{2+9v^2}+468v^6+280v^4+3+53v^2)$.

当 $v=0$ 时, 方程 (1) 变成无耗散的四阶非线性波动方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(u-\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}\right)-\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1}{12}\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)=0. \tag{26}$$

按照前面同样的方法实施计算, 容易知道四阶非线性波动方程 (26) 有显式精确解析行波解

$$u_1(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{b_1(a\sinh\xi+b\cosh\xi)}{a\cosh\xi+b\sinh\xi}, \tag{27}$$

其中 $\xi=\dfrac{2\sqrt{6}b_1}{\sqrt{4{b_1}^2+9}}x+\dfrac{12\sqrt{2}b_1}{4{b_1}^2+9}t+\xi_0$.

$$u_2(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{b_1\left(\sqrt{b^2-a^2+r^2}+a\sinh\xi+b\cosh\xi\right)}{a\cosh\xi+b\sinh\xi+r}, \tag{28}$$

其中 $\xi=\dfrac{4\sqrt{6}b_1}{\sqrt{4{b_1}^2+9}}x+\dfrac{24\sqrt{2}b_1}{4{b_1}^2+9}t+\xi_0$.

$$u_3(x,t)=\frac{1}{2}-\frac{a_1 r}{2(b^2-a^2+r^2)}+\frac{a_1}{a\cosh\xi+b\sinh\xi+r}, \tag{29}$$

其中 $\xi=\dfrac{2\sqrt{6C}a_1}{\sqrt{9C^2+3{a_1}^2r^2-2{a_1}^2C}}x+\frac{12\sqrt{2}C\sqrt{C}a_1}{9C^2+3{a_1}^2r^2-2{a_1}^2C}t+\xi_0, C=b^2-a^2+r^2$.

$$u_4(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{b_1(-a\sin\xi+b\cos\xi)}{a\cos\xi+b\sin\xi}, \tag{30}$$

其中 $\xi=\dfrac{2\sqrt{6}\sqrt{-4{b_1}^2+9}\,b_1}{4{b_1}^2-9}x+\dfrac{12\sqrt{2}b_1}{(2b_1+3)(2b_1-3)}t+\xi_0$.

$$u_5(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{b_1\left(\sqrt{a^2+b^2-r^2}-a\sin\xi+b\cos\xi\right)}{a\cos\xi+b\sin\xi+r}, \tag{31}$$

其中 $\xi=\dfrac{4\sqrt{6}\sqrt{-4{b_1}^2+9}b_1}{4{b_1}^2-9}x+\dfrac{24\sqrt{2}b_1}{(2b_1+3)(2b_1-3)}t+\xi_0$.

$$u_6(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{a_1 r}{2C}+\frac{a_1}{a\cos\xi+b\sin\xi+r}, \tag{32}$$

其中 $\xi=\dfrac{2\sqrt{6C}'a_1}{\sqrt{9C^2+3{a_1}^2r^2+2{a_1}^2C}}x+\dfrac{12C\sqrt{2C}\,a_1}{9C^2+3{a_1}^2r^2+2{a_1}^2C}t+\xi_0, C=a^2+b^2-r^2$.

$$u_7(x,t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\xi}, \tag{33}$$

其中 $\xi=2\sqrt{\dfrac{2}{3}}x-\dfrac{4\sqrt{2}}{3}t+\xi_0$.

3 结 论

利用非线性 *LC* 电路模拟实现 Toda 晶格已经有广泛的研究. 对于非线性 *LC* 电路中孤子或冲击波的解析或数值模拟研究也有不少文献. 理论研究主要是通过对电路的连续逼近得到的非线性偏微分方程进行约化摄动, 在耗散、色散的不同假设下构造冲击波的低阶或所谓高阶近似解. 由于模拟非线性 *LC* 电路的非线性偏微分方程为复杂的高阶耗散非线性退化波动方程, 对于其精确解的研究迄今

没有文献论及. 本文借助于计算机符号代数系统, 利用作者近来提出的扩展双曲函数展开方法解析的研究了模拟非线性 *LC* 电路的高阶耗散非线性退化波动方程 (1) 的精确可解性, 获得了丰富的显式精确解析行进波解, 这些解含有多个可任意取值的参数, 既有双曲函数有理分式形式的显式精确行波解, 也有三角函数有理分式形式的精确周期行波解, 还有有理分式型精确孤立波解. 而且有些行波解的波数和圆频率是任意可变的, 既可以是右行波, 也可以为左行波, 并且波的振幅与波数成正比, 波的宽度与波数成反比. 尤其是我们还得到了一组复形式的双曲函数有理分式型显式精确行波解. 特别在参数的某些特殊情况下, 这些行波解退化为冲击波解. 相信这些显式精确行波解有助于分析电路实现 Toda 晶格的非线性 *LC* 电路中孤立子或冲击波的传播.

本文是作者在南开大学陈省身数学研究所访问期间完成的, 作者感谢陈省身数学研究所提供的支持和良好的学术环境.

[1] Watanabe S, Miyakawa M, Tada M 1978 *J. Phys. Soc. Jpn.* **45** 2030
[2] Watanabe S, Miyakawa M, Muroya K 1980 *J. Phys. Soc. Jpn.* **49** 825
[3] Saitoh N , Watanabe S 1981 *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** 1774
[4] Muroya K, Watanabe S 1981 *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** 2762
[5] Muroya K, Watanabe S 1981 *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** 3159
[6] Watanabe S, Muroya K 1981 *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** 3166
[7] Watanabe S, Tada M 1981 *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** 3436
[8] Watanabe S, Tada M 1981 *J. Phys. Soc. Jpn.* **50** 3443
[9] Muroya K, Saitoh N, Watanabe S 1982 *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** 1024
[10] Watanabe S 1982 *J. Phys. Soc. Jpn.* **51** 1030
[11] Kako F, Miyakawa M, Watanabe S 1986 *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** 2919
[12] Kako F, Miyakawa M, Watanabe S 1986 *J. Phys. Soc. Jpn.* **55** 2928
[13] Matsukawa M, Watanabe S, Tanaca H 1989 *J. Phys. Soc. Jpn.* **58** 3081
[14] Ishiwata S, Watanabe S, Tanaca H 1990 *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** 1163
[15] Okada Y, Watanabe S, Tanaca H 1990 *J. Phys. Soc. Jpn.* **59** 2647
[16] Kawamura K, Watanabe S 1991 *J. Phys. Soc. Jpn.* **60** 82
[17] Hietarinta J, Kuusela T, Malomed B A 1995 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **28** 3015
[18] Oh H G, Watanabe S 1997 *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** 979
[19] Watanabe S, Ishiwata S, Kawamura K, Oh H G 1997 *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** 984
[20] Watanabe S, Kawaguchi M, Kawamura K, Ishiwata S, Ohta Y, Oh H G 1997 *J. Phys. Soc. Jpn.* **66** 1231
[21] Asano H, Kakei S, Ishiwata S, Watanabe S 1999 *J. Phys. Soc. Jpn.* **68** 3208
[22] Malfliet W, Rombouts B 2001 *Math. Comput. Simulation* **55** 541
[23] Zhu W Q 1980 *Acta Solid Mechanics Sinica* **1** 247 (in Chinese) [朱位秋 1980 固体力学学报 **1** 247]
[24] Taogetusang 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 010202(in Chinese) [套格图桑 2011 物理学报 **60** 010202]
[25] Yan Z Y, Zhang H Q 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 2113 (in Chinese) [闫振亚, 张鸿庆 2000 物理学报 **49** 2113]
[26] Shang Y D, Qin J H, Huang Y, Yuan W J 2008 *Appl. Math. Comput* **202** 532
[27] Shang Y D, Huang Y, Yuan W J 2008 *Appl. Math. Comput* **200** 110
[28] Shang Y D, Huang Y, Yuan W J 2008 *Chaos Solitons Fractals* **36** 762
[29] Shang Y D, Huang Y, Yuan W J 2008 *Comput Math. Appl.* **56** 1441
[30] Huang Y, Shang Y D 2012 *J. Appl. Math* **2012** 769843
[31] Zhang G X, Li Z B, Duan Y S 2000 *Science in China* (Series A) **30**1103(in Chinese) [张桂戌, 李志斌, 段一士 2000 中国科学 A **30** 1103]
[32] Huang D J, Zhang H Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2434 (in Chinese) [黄定江, 张鸿庆 2004 物理学报 **53** 2434]
[33] Wang Q, Chen Y, Li B, Zahng H Q 2005 *Appl. Math. Comput* **160** 77
[34] Yan Z Y 2003 *Chaos Solitons Fractals* **16** 759
[35] Chen Y, Li B 2004 *Commun. Theor. Phys.* **41** 1
[36] Chen Y Z, Ding X W 2005 *Nonlinear Analysis* **61** 1005
[37] Lu K P, Shi Y R, Duan W S 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 2074 (in Chinese) [吕克璞, 石玉仁, 段文山等 2001 物理学报 **50** 2074]
[38] Guo G P, Zhang J F 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 1159 (in Chinese) [郭冠平, 张解放 2002 物理学报 **51** 1159]
[39] Shi Y R, Zhang J, Yang H J, Duan W S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 7564 (in Chinese) [石玉仁, 张娟, 杨文娟, 段文山 2010 物理学报 **59** 7564]
[40] Shi Y R, Zhang J, Yang H J, Duan W S 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020401 (in Chinese) [石玉仁, 张娟, 杨文娟, 段文山 2011 物理学报 **60** 020402]
[41] Wang M L, Li X Z, Zhang J L 2008 *Phys. Lett.* A **372** 417
[42] Ye C E, Zhang W G 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 5229 (in Chinese) [叶采儿, 张卫国 2010 物理学报 **59** 5229]
[43] Li X Z, Zhang W G, Yuan S L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 0744 (in Chinese) [李向正, 张卫国, 原三领 2010 物理学报 **59** 0744]
[44] Feng Z S, Li Y 2006 *Physica* A **366** 115
[45] Feng Z S 2008 *Chaos Solitons Fractals* **38** 481

Explicit and exact traveling wave solutions to the nonlinear *LC* circuit equation*

Shang Ya-Dong[1)2)†] Huang Yong[3)]

1) (*School of Mathematics and Information Science, Guangzhou University, Guangzhou* 510006*, China*)

2) (*Key Laboratory of Mathematics and Interdisciplinary Sciences of Guangdong Higher Education Institutes, Guangzhou University, Guangzhou* 510006*, China*)

3) (*School of Computer Science and Educational Software, Guangzhou University, Guangzhou* 510006*, China*)

(Received 26 September 2012; revised manuscript received 28 November 2012)

Abstract

Traveling wave in a nonlinear *LC* circuit with dissipation have been investigated theoretically. With the aid of the extended hyperbolic function method,developed by the authors in recent works to solve nonlinear partial differential equations exactly, the fourth order nonlinear wave equation with dissipation, which models shock wave propagation in a nonlinear *LC* circuit, have been analytically studied. Abundant explicit and exact traveling wave solutions to the fourth order nonlinear wave equation with dissipation are obtained. These solutions include exact shock wave solutions, singular traveling wave solutions, and periodic wave solutions in a rational form of trigonometric functions.

Keywords: nonlinear *LC* circuit, nonlinear dissipation wave equation, shock wave, periodic wave

PACS: 02.30.Jr, 03.65.Ge, 47.35.Fg, 52.35.Tc **DOI:** 10.7498/aps.62.070203

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 40890150, 40890153, 11271090) and the Scientific Program of Guangdong Province, China (Grant No. 2008B080701042).

† Corresponding author. E-mail: gzydshang@126.com