全矢量有限差分法分析任意截面波导模式*

乔海亮† 王玥 陈再高 张殿辉

(西北核技术研究所, 西安 710024)

(2012 年 10 月 10 日 收到; 2012 年 11 月 23 日 收到修改稿)

针对不规则端口模式加载的需求, 改进了全矢量有限差分法, 推导了边界条件, 建立了模式求解器, 解决了不规则端口任意模式加载的难题. 该求解器对计算资源要求较低, 可以求解任意形状的波导模式. 计算了不同形状波导的模式特性, 得到了与解析解和商用软件结果相一致的计算结果.

关键词: 全矢量有限差分法, 波导, 模式

PACS: 02.70.Bf, 02.70.−c, 03.50.De **DOI:** 10.7498/aps.62.070204

1 引言

全电磁粒子模拟软件广泛应用于不同类型高功率微波源器件的研制, 成为新型器件原理探索和验证、物理规律认识、实验现象分析及器件参数优化设计等研究的重要手段 [1]. 在利用粒子模拟软件进行高功率微波源器件分析设计时, 需要解决不同模式脉冲在注入端口的加载问题, 也就是说必须知道注入端口的场空间分布及其时间的变化. 以往针对高功率微波管的数值模拟中, 注入端口的结构都比较规则, 可以根据相应的解析公式, 加载特定模式的电压 [1,2]. 随着高功率微波技术的发展, 高功率微波源器件注入端口的物理结构日趋复杂, 随之带来了不规则端口模式加载的难题, 因为这些复杂端口的场分布通常无法用解析公式给出. 这个问题可以归结为波导本征值问题.

波导本征值问题是微波理论与技术中最基本的问题之一. 求解本征值的数学方法很多, 目前已经发展了包括有限元法和有限差分法在内的精确数值方法. 有限差分法是电磁场数值分析计算方法中应用最早的一种方法, 它以其简单、直观等特点广泛应用于工程和数学实践中. 这种方法能很好地处理不规则波导的本征值问题, 如脊波导、T 形波导等. 近年来又发展了一种全矢量有限差分法 (full-vectorial finite-difference, FVFD), 用来求解波导的本征值问题 [3−13], 这种方法是对传统有限差分法的一种发展, 可以一次求出所有横向电磁场分量. 这些报道多集中在不同形状光纤模式的计算, 研究对象大多为非金属材质, 并未涉及导电系数 σ, 因此求解的矩阵系数全部为实数. 而高功率微波源器件的注入端口多为中空的金属材质, 这必将导致对复矩阵的求解. 而相对实矩阵而言, 求解复矩阵的本征值和本征向量会更耗费计算资源.

本文改进了全矢量有限差分法, 将求解所有横向电磁场分量的计算方式转化为求解横向电场或横向磁场的计算方式, 极大地节省了计算资源, 并推导理想金属边界条件, 建立了适用于高功率微波源器件模拟的模式求解器, 给出了不同波导的模式分布.

2 全矢量有限差分法

FVFD 方法由微分形式的 Maxwell 旋度方程出发, 借用时域有限差分方法中的 Yee 网格, 进行差分离散. 将 Maxwell 方程写成矩阵形式, 经过几次变换, 最后转化成本征值问题 $\boldsymbol{AX} = \lambda\boldsymbol{X}$.

∗ 国家自然科学基金 (批准号: 61231003) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hailiangqiao@gmail.com

© 2013 中国物理学会 Chinese Physical Society http://wulixb.iphy.ac.cn

2.1 基本方程

波导中的电磁场满足 Maxwell 方程

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t},\ \nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t},\tag{1}$$

考虑到波导中的电磁场满足

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta z-\omega t)},\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}(x,y)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\beta z-\omega t)},\tag{2}$$

其中 ω 是角频率, β 是传播常数. 代入 (1) 式得到

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}E_z-\mathrm{i}\beta E_y=\mathrm{i}\omega\mu_0H_x,\\
&\frac{\partial}{\partial y}H_z-\mathrm{i}\beta H_y=(\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0)E_x,\\
&\mathrm{i}\beta E_x-\frac{\partial}{\partial x}E_z=\mathrm{i}\omega\mu_0H_y,\\
&\mathrm{i}\beta H_x-\frac{\partial}{\partial x}H_z=(\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0)E_y,\\
&\frac{\partial}{\partial x}E_y-\frac{\partial}{\partial y}E_x=\mathrm{i}\omega\mu_0H_z,\\
&\frac{\partial}{\partial x}H_y-\frac{\partial}{\partial y}H_x=(\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0)E_z.
\end{aligned}\tag{3}$$

2.2 离散化

在频域模式求解方法中, 采用二维 Yee 网格 (如图 1 所示) 离散计算区域, 得到

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\omega\mu_0H_x\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{(E_z(i,j+1)-E_z(i,j))}{\Delta y}-\mathrm{i}\beta E_y\left(i,j+\frac{1}{2}\right),\\
&\mathrm{i}\omega\mu_0H_y\left(i+\frac{1}{2},j\right)\\
&=\mathrm{i}\beta E_x\left(i+\frac{1}{2},j\right)-\frac{(E_z(i+1,j)-E_z(i,j))}{\Delta x},\\
&\mathrm{i}\omega\mu_0H_z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)\\
&=\frac{\left(E_y\left(i+1,j+\frac{1}{2}\right)-E_y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\right)}{\Delta x}\\
&\quad-\frac{\left(E_x\left(i+\frac{1}{2},j+1\right)-E_x\left(i+\frac{1}{2},j\right)\right)}{\Delta y},\\
&(\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0)E_x\left(i+\frac{1}{2},j\right)\\
&=\frac{\left(H_z\left(i+1/2,j+\frac{1}{2}\right)-H_z\left(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2}\right)\right)}{\Delta y}\\
&\quad-\mathrm{i}\beta H_y\left(i+\frac{1}{2},j\right),\\
&(\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0)E_y\left(i,j+\frac{1}{2}\right)=\mathrm{i}\beta H_x\left(i,j+\frac{1}{2}\right)\\
&\quad-\frac{\left(H_z\left(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}\right)-H_z\left(i-1/2,j+\frac{1}{2}\right)\right)}{\Delta x},\\
&(\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0)E_z(i,j)\\
&=\frac{\left(H_y\left(i+\frac{1}{2},j\right)-H_y\left(i-\frac{1}{2},j\right)\right)}{\Delta x}\\
&\quad-\frac{\left(H_x\left(i,j+\frac{1}{2}\right)-H_x\left(i,j-\frac{1}{2}\right)\right)}{\Delta y}.
\end{aligned}\tag{4}$$

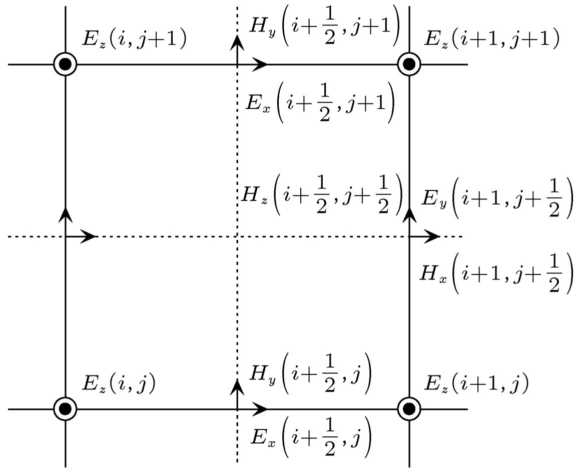

图 1 二维 Yee 网格

定义矩阵

$$\boldsymbol{U}=\begin{pmatrix}-1&1&&&\\&-1&1&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-1&1\\&&&&-1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{V}=\begin{pmatrix}1&&&&\\-1&1&&&\\&\ddots&\ddots&&\\&&-1&1&\\&&&-1&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1&&&&\\&1&&&\\&&\ddots&&\\&&&1&\\&&&&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_x=\frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix}\boldsymbol{U}&&&\\&\boldsymbol{U}&&\\&&\boldsymbol{U}&\\&&&\boldsymbol{U}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{U}_y=\frac{1}{\Delta y}\begin{pmatrix}-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}&&&\\&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}&&\\&&\ddots&\ddots&\\&&&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}\\&&&&-\boldsymbol{I}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{V}_x=\frac{1}{\Delta x}\begin{pmatrix}\boldsymbol{V}&&&&\\&\boldsymbol{V}&&&\\&&\ddots&&\\&&&\boldsymbol{V}&\\&&&&\boldsymbol{V}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{V}_y=\frac{1}{\Delta y}\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}&&&&\\-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}&&&\\&\ddots&\ddots&&\\&&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}&\\&&&-\boldsymbol{I}&\boldsymbol{I}\end{pmatrix}. \tag{5}$$

Maxwell 方程进一步可以写成矩阵形式

$$\begin{aligned}
&\mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{H}_x=-\mathrm{i}\beta\boldsymbol{E}_y+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{E}_z,\\
&\mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{H}_y=\mathrm{i}\beta\boldsymbol{E}_x-\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{E}_z,\\
&\mathrm{i}\omega\mu_0\boldsymbol{H}_z=\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{E}_y-\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{E}_x,\\
&(\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_x=\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{H}_z-\mathrm{i}\beta\boldsymbol{H}_y,\\
&(\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_y=\mathrm{i}\beta\boldsymbol{H}_x-\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{H}_z,\\
&(\sigma-\mathrm{i}\omega\varepsilon_0)\boldsymbol{E}_z=\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{H}_y-\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{H}_x.
\end{aligned} \tag{6}$$

进一步消去 $\boldsymbol{H}_z$ 和 $\boldsymbol{E}_z$ 有

$$\begin{aligned}
&(\omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_y)\boldsymbol{H}_x-\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{H}_y\\
&=-(\beta\omega\varepsilon_0+\mathrm{i}\beta\sigma)\boldsymbol{E}_y,\\
&(\omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_x)\boldsymbol{H}_y-\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{H}_x\\
&=(\beta\omega\varepsilon_0+\mathrm{i}\beta\sigma)\boldsymbol{E}_x,\\
&(\omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_y)\boldsymbol{E}_x-\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{E}_y\\
&=\beta\omega\mu_0\boldsymbol{H}_y,\\
&(\omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_x)\boldsymbol{E}_y-\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{E}_x\\
&=-\beta\omega\mu_0\boldsymbol{H}_x.
\end{aligned} \tag{7}$$

(7) 式可以写为

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11}&\boldsymbol{A}_{12}&\boldsymbol{A}_{13}&\boldsymbol{A}_{14}\\\boldsymbol{A}_{21}&\boldsymbol{A}_{22}&\boldsymbol{A}_{23}&\boldsymbol{A}_{24}\\\boldsymbol{A}_{31}&\boldsymbol{A}_{32}&\boldsymbol{A}_{33}&\boldsymbol{A}_{34}\\\boldsymbol{A}_{41}&\boldsymbol{A}_{42}&\boldsymbol{A}_{43}&\boldsymbol{A}_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_x\\\boldsymbol{E}_y\\\boldsymbol{H}_x\\\boldsymbol{H}_y\end{pmatrix}
=\beta\omega\mu_0\varepsilon_0\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_x\\\boldsymbol{E}_y\\\boldsymbol{H}_x\\\boldsymbol{H}_y\end{pmatrix}, \tag{8}$$

这里的 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 定义如下:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}_{11}=-\mathrm{i}\beta\mu_0\sigma\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{A}_{12}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A}_{13}=-\mu_0\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_y,\\
&\boldsymbol{A}_{14}=\mu_0(\omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_x),\\
&\boldsymbol{A}_{21}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A}_{22}=-\mathrm{i}\beta\mu_0\sigma\boldsymbol{I},\\
&\boldsymbol{A}_{23}=-\mu_0(\omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_y),\\
&\boldsymbol{A}_{24}=\mu_0\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_x,\quad \boldsymbol{A}_{31}=\varepsilon_0\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_y,\\
&\boldsymbol{A}_{32}=-\varepsilon_0(\omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_x),\\
&\boldsymbol{A}_{33}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A}_{34}=\boldsymbol{0},\\
&\boldsymbol{A}_{41}=\varepsilon_0(\omega^2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_y),\\
&\boldsymbol{A}_{42}=-\varepsilon_0\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_x,\quad \boldsymbol{A}_{43}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{A}_{44}=\boldsymbol{0}.
\end{aligned} \tag{9}$$

至此, 模式求解问题归结为本征值问题. 给定波长以后, 就可以通过求解以上矩阵的本征值和本征向量得到不同的传播常数 β, 以及对应的场分布. 但是求解这样一个大型矩阵的本征值和本征向量对计算机的内存和 CPU 速度是有很高要求的. 仔细观察 (7) 式, 每一个电场分量总是可以由横向磁场分量表示, 每一个磁场分量总是可以由横向电场分量表示. 于是, 对 (7) 式, 消去 $\boldsymbol{H}_x$ 和 $\boldsymbol{H}_y$ 得到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{xx}&\boldsymbol{P}_{xy}\\\boldsymbol{P}_{yx}&\boldsymbol{P}_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_x\\\boldsymbol{E}_y\end{pmatrix}$$

$$=\beta^2(k_0^2+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma)\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_x\\ \boldsymbol{E}_y\end{pmatrix}, \tag{10}$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_{xx} =&(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_x)(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}\\
&+\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_y)-\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_y,\\
\boldsymbol{P}_{xy} =&\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_y(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_x)\\
&-(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_x)\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_x,\\
\boldsymbol{P}_{yx} =&\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_x(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_y)\\
&-(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_y)\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_y,\\
\boldsymbol{P}_{yy} =&(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_y)(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}\\
&+\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_x)-\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_x.
\end{aligned}\tag{11}$$

同样, 对 (7) 式, 消去 $\boldsymbol{E}_x$ 和 $\boldsymbol{E}_y$ 得到

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{xx} & \boldsymbol{Q}_{xy}\\ \boldsymbol{Q}_{yx} & \boldsymbol{Q}_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_x\\ \boldsymbol{H}_y\end{pmatrix}=\beta^2(k_0^2+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma)\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_x\\ \boldsymbol{H}_y\end{pmatrix}, \tag{12}$$

其中

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q}_{xx} =&(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_x)(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}\\
&+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_y)-\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_y,\\
\boldsymbol{Q}_{xy} =&\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_y(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_x)\\
&-(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_x)\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_x,\\
\boldsymbol{Q}_{yx} =&\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_x(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_y)\\
&-(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_y)\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_y,\\
\boldsymbol{Q}_{yy} =&(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_y)(k_0^2\boldsymbol{I}+\mathrm{i}\omega\mu_0\sigma\boldsymbol{I}\\
&+\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_x)-\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_x.
\end{aligned}\tag{13}$$

这样就进一步缩减了矩阵的规模. 求解本征方程 (10) 式或 (12) 式, 即可得到电磁场的横向分量. 一旦得到了横向电场 (或磁场), 就可以进一步通过 (6) 式得到其他所有的电磁场分量.

2.3 边界条件

对于任意截面的波导, 求解方程 (10) 或 (12) 已完全可以得到不同模式下的场分布. 但应该注意到, 这两个方程包含复矩阵, 而相对实矩阵而言, 求解复矩阵需要更多的内存, 而且是相当耗时的. 因此, 将复矩阵转化成实矩阵是非常有意义的. 第 (i,j) 网格为金属时, 根据电磁场理论有

$$\begin{aligned}
&E_x(i+1/2,j)=E_x(i+1/2,j+1)=0,\\
&E_y(i,j+1/2)=E_y(i+1,j+1/2)=0,\\
&E_z(i,j)=E_z(i+1,j)=E_z(i,j+1)\\
=&E_z(i+1,j+1)=0;
\end{aligned}\tag{14}$$

$$\begin{aligned}
&H_x(i,j-1/2)=H_x(i,j+1/2)=H_x(i,j+3/2),\\
&H_y(i-1/2,j)=H_y(i+1/2,j)=H_y(i+3/2,j),\\
&H_z(i-1/2,j+1/2)=H_z(i+1/2,j+1/2)\\
=&H_z(i+3/2,j+1/2),\\
&H_z(i+1/2,j-1/2)=H_z(i+1/2,j+1/2)\\
=&H_z(i+1/2,j+3/2).
\end{aligned}\tag{15}$$

应用到矩阵中, 有

(1) $\boldsymbol{U}_x$ 第 $jnX+i$, $jnX+i+1$ 列置零;

(2) $\boldsymbol{U}_y$ 第 $jnX+i$, $(j+1)nX+i$ 列置零;

(3) $\boldsymbol{V}_x$ 第 $jnX+i$, $jnX+i+1$ 行置零;

(4) $\boldsymbol{V}_y$ 第 $jnX+i$, $(j+1)nX+i$ 行置零.

此时, 有

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\boldsymbol{P}_{xx} & \boldsymbol{P}_{xy}\\ \boldsymbol{P}_{yx} & \boldsymbol{P}_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_x\\ \boldsymbol{E}_y\end{pmatrix}=\beta^2k_0^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_x\\ \boldsymbol{E}_y\end{pmatrix},\\
&\boldsymbol{P}_{xx}=(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_x)(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_y)-\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_y,\\
&\boldsymbol{P}_{xy}=\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_y(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_x)-(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_x)\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_x,\\
&\boldsymbol{P}_{yx}=\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_x(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_y)-(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_y)\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_y,\\
&\boldsymbol{P}_{yy}=(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_y)(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_x)-\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_x,
\end{aligned}\tag{16}$$

或

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix}\boldsymbol{Q}_{xx} & \boldsymbol{Q}_{xy}\\ \boldsymbol{Q}_{yx} & \boldsymbol{Q}_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_x\\ \boldsymbol{H}_y\end{pmatrix}=\beta^2k_0^2\begin{pmatrix}\boldsymbol{H}_x\\ \boldsymbol{H}_y\end{pmatrix},\\
&\boldsymbol{Q}_{xx}=(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_x)(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_y)-\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_y,\\
&\boldsymbol{Q}_{xy}=\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_y(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_x)-(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_x\boldsymbol{U}_x)\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_x,\\
&\boldsymbol{Q}_{yx}=\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_x(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_y)-(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_y)\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_y,\\
&\boldsymbol{Q}_{yy}=(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_y)(k_0^2\boldsymbol{I}+\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{V}_x)-\boldsymbol{V}_y\boldsymbol{U}_x\boldsymbol{U}_y\boldsymbol{V}_x.
\end{aligned}\tag{17}$$

至此, 复矩阵转化为实矩阵.

3 算 例

3.1 矩形波导

矩形波导中传播的模式有解析解, 为了验证本文的数值方法, 首先数值求解矩形波导中的模式. 矩形波导中传播常数与波长的关系如下:

$$k_0^2 = k_x^2 + k_y^2 + \beta^2. \tag{18}$$

计算中, 波导沿 z 轴, 截面长 40 mm, 宽 30 mm, 入射波长 10 mm. 计算结果如图 2 所示.

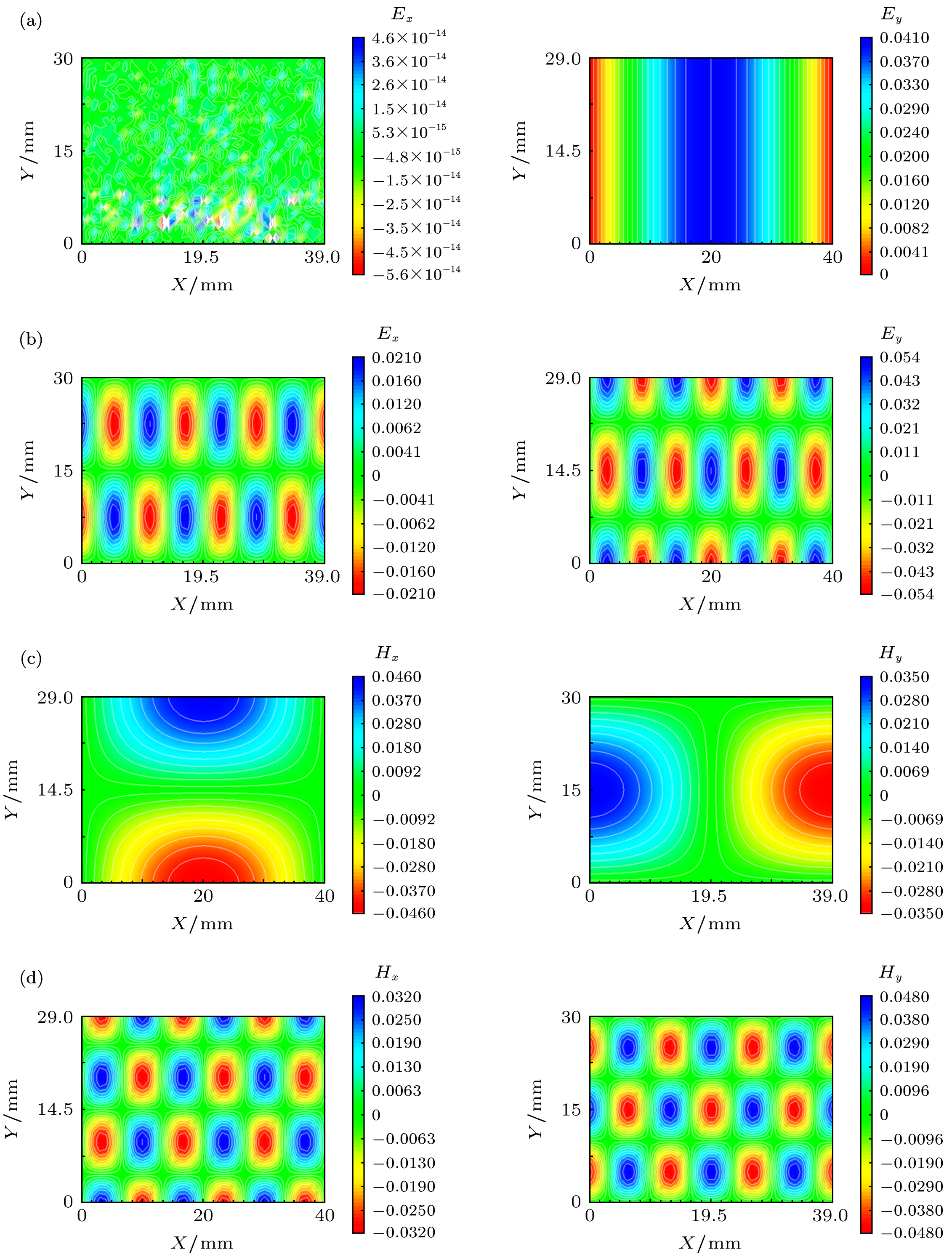

图 2 矩形波导模式等值线图 (a) TE_{10}; (b) TE_{72}; (c) TM_{11}; (d) TM_{63}

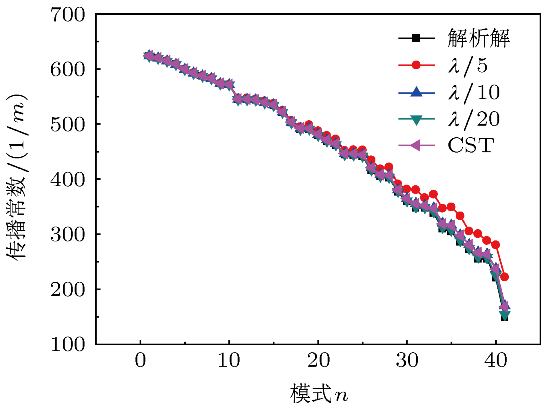

图 3　矩形波导不同模式的传播常数

为了比较本文方法的精度, 同时还使用商用软件 CST 进行了计算, 图 3 给出了网格分别设为 $\lambda/5$, $\lambda/10$ 和 $\lambda/20$ 时不同模式的计算结果与解析解以及 CST 计算结果的比较. 由计算结果可以看出, 采用全矢量有限差分法可以给出正确的场分布; 低阶模式的计算结果与解析解十分接近, 但是高阶模式的结果与解析解出现了一定偏差, 模式越高偏差越大, 这主要是因为模式越高网格分辨率就越低, 此时采用较细网格得到的结果更加接近解析解; 当网格选取 $\lambda/10$ 时, 得到了与 CST 十分接近的结果.

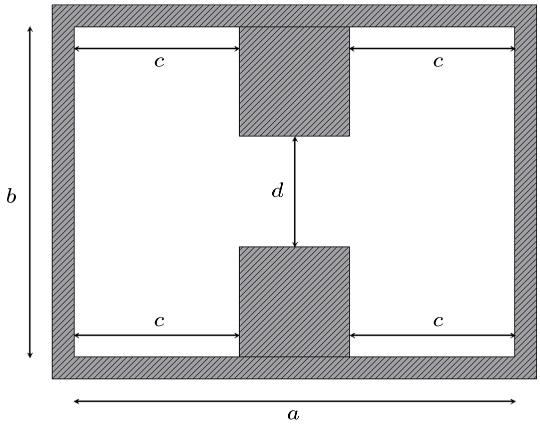

图 4　脊波导

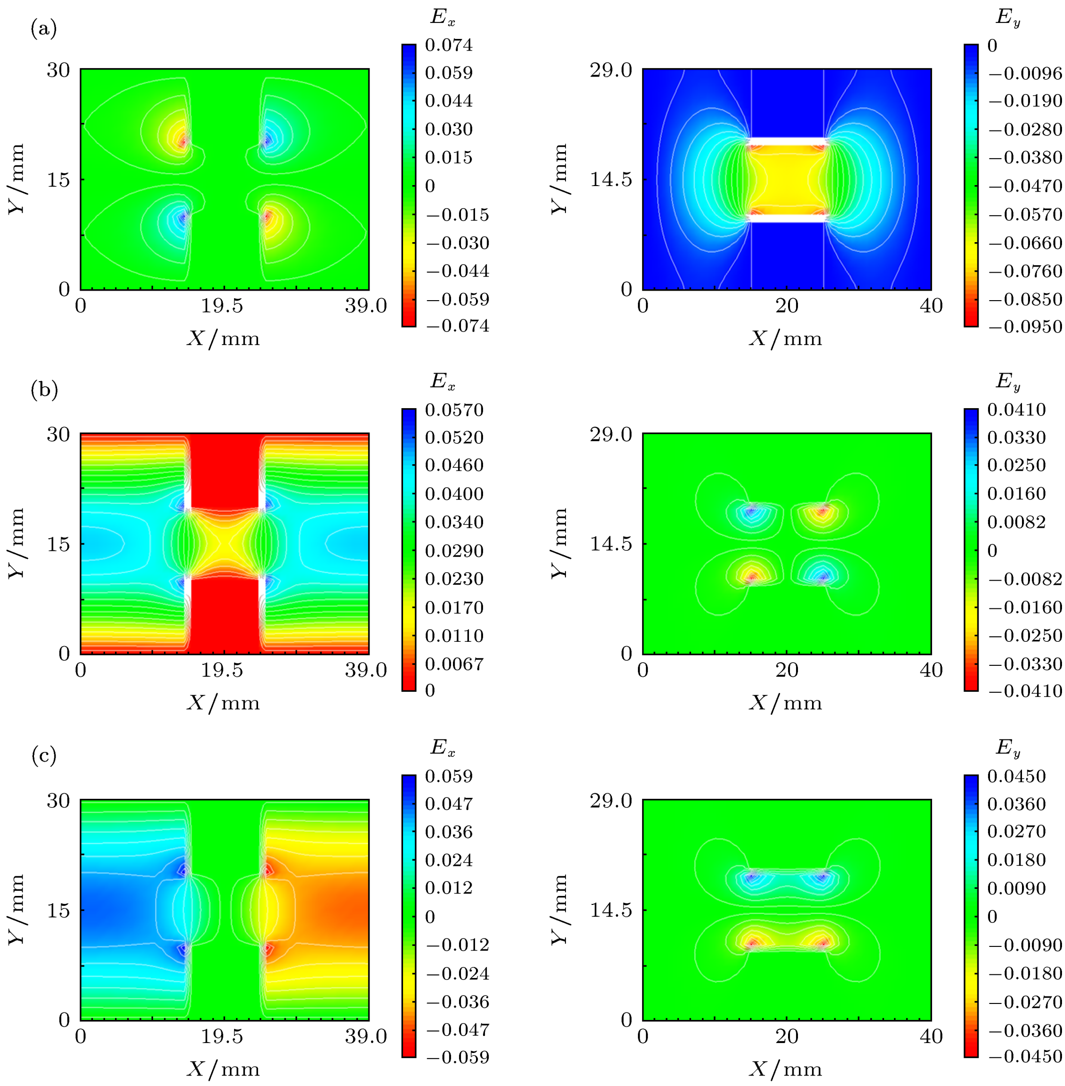

图 5　脊波导模式等值线图　(a) 主模; (b) 次高模; (c) 第三高模

3.2 脊波导

由于脊波导具有较低的截止频率, 较宽的工作带宽, 低阻抗等优点, 使得脊波导在微波和毫米波器件中被广泛应用[14], 如宽带脊波导滤波器、宽带定向耦合器、双工器、变频器、移相器、脊波导缝隙天线阵等. 计算中, 波导沿 z 轴, $a = 40$ mm, $b = 30$ mm, $c = 15$ mm, $d = 10$ mm, 入射波长 10 mm, 网格设为 1 mm.

图 5 给出了几个模式的场分布. 图 6 给出了不同模式的传播常数与 CST 计算结果的比较. 可以看出两者符合较好.

4 结 论

将全矢量有限差分法引入三维粒子模拟软件中, 可以解决三维粒子模拟中不规则端口模式加载的难题. 本文改进了全矢量有限差分法, 将求解所有横向电磁场分量的计算方式转化为只求解横向电场或横向磁场的计算方式, 将复矩阵本征值问题转化为实矩阵本征值问题, 缩减了对计算资源的需求. 采用该方法对矩形波导和脊波导的模式特性进行了分析, 得到特定频率下不同模式的场分布及对应的传播常数. 所得数值结果与解析解和采用 CST 仿真软件得出的结果相一致.

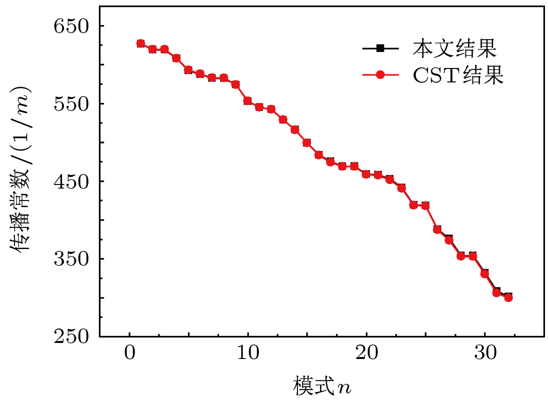

图 6 脊波导不同模式的传播常数

[1] Wang J G, Zhang D H, Liu C L, Li Y D, Wang Y, Wang H G, Qiao H L, Li X Z 2009 *Physics of Plasmas* **16** 033108

[2] Chen Z G, Wang J G, Zhang D H, Wang Y, Liu C L, Li Y D, Wang H G, Qiao H L, Yuan Y 2010 *High Power Laser and Particle Beams* **22** 2103 (in Chinese) [陈再高, 王建国, 张殿辉, 王玥, 刘纯亮, 李永东, 王洪广, 乔海亮, 袁媛 2010 强激光与粒子束 **22** 2103]

[3] Chen M, Hsu S, Chang H C 2009 *Opt. Express* **17** 5965

[4] Prkna L, Hubalek M, Ctyroky J 2004 *IEEE Photon. Technol. Lett.* **16** 2057

[5] Chiang Y C, Chiou Y P, Chang H C 2002 *Journal of Lightwave Technology* **20** 1609

[6] Cai X L, Huang D X, Zhang X L 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2268 (in Chinese) [蔡鑫伦, 黄德修, 张新亮 2007 物理学报 **56** 2268]

[7] Xia J S, Yu J Z 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 515 (in Chinese) [夏金松, 余金中 2003 物理学报 **52** 515]

[8] Xiao J B, Sun X H 2010 *Optics Communications* **283** 2835

[9] Feng N N, Zhou G R, Xu C L 2002 *J. Lightwave Technol.* **20** 1976

[10] Xiao J B, Zhang M D, Sun X H 2006 *Chin. Phys.* **15** 1

[11] Pascher W 2001 *Opt. Quantum Electron.* **33** 433

[12] Hiremath K, Hammer M, Stof fer R 2005 *Opt. Quantum Electron.* **37** 37

[13] Hadley G R, 2002 *J. Lightwave Technol.* **20** 1210

[14] Bai N F, Liu X, Xiao J B, Zhang M D, Sun X H 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4933 (in Chinese) [柏宁丰, 刘旭, 肖金标, 张明德, 孙小菡 2005 物理学报 **54** 4933]

Full-vectorial finite-difference analysis of modes in waveguide with arbitrary shape*

Qiao Hai-Liang† Wang Yue Chen Zai-Gao Zhang Dian-Hui

(*Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an* 710024, *China*)

(Received 10 October 2012; revised manuscript received 23 November 2012)

Abstract

The full-vectorial finite-difference method has been improved for solving mode loading problem on irregular ports, and the boundary conditions are derived. The new mode solver reduces the demand for computing resources: it can solve waveguide mode with arbitrary shape. The mode characteristics of waveguide with different shape are calculated; the results are compared to analytical solutions and those obtained from commercial software, they agree well with one another.

Keywords: full-vectorial finite-difference, waveguide, mode

PACS: 02.70.Bf, 02.70.−c, 03.50.De **DOI:** 10.7498/aps.62.070204

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61231003).

† Corresponding author. E-mail: hailiangqiao@gmail.com