

# 二维线性与非线性光晶格中物质波孤立子的稳定性

陈海军<sup>†</sup> 李向富

(陇东学院电气工程学院, 庆阳 745000)

(2012年7月26日收到; 2012年11月21日收到修改稿)

利用变分法和数值计算方法研究了二维线性与非线性光晶格中二维玻色-爱因斯坦凝聚体系中物质波孤立子的存在及其稳定性. 利用定态变分原理及 Vakhitov-Kolokolov 判据总结了线性与非线性结合光晶格中几种参数组合下定态定域解的稳定性. 结果表明, 当存在二维非线性光晶格时, 在吸引和排斥相互作用的原子体系中均可以存在稳定的物质波孤立子. 另外, 利用含时变分法研究了线性与非线性光晶格中物质波孤立子随时间的传播特性, 使波包参数对时间的一阶导数等于零, 可以给出稳定状态对应的参数, 结论和定态变分法给出的结果一致. 最后用数值计算方法研究变分结果的正确性, 把变分结果作为初始条件代入 Gross-Pitaevskii 方程研究其随时间传播特征, 得到了稳定的传播过程, 所得到的结果和变分分析结果一致.

**关键词:** 线性非线性光晶格, 玻色-爱因斯坦凝聚, 孤立子, 稳定性

**PACS:** 03.75.Lm, 05.30.Jp

**DOI:** 10.7498/aps.62.070302

## 1 引言

弱相互作用原子气体中玻色-爱因斯坦凝聚 (Bose-Einstein condensations, BECs) 的实现为研究原子物质波的非线性性质提供了基础<sup>[1,2]</sup>. 由于 BECs 体系中原子之间相互作用的可调控性及非线性, 可以利用 BECs 体系研究其他凝聚体系中难以实现的宏观量子现象. 光晶格 (optical lattices, OLs) 中 BECs 的研究引起了实验和理论研究的关注<sup>[3,4]</sup>, 包括 Bolch 振荡<sup>[5]</sup>, Landau-Zener 隧穿<sup>[6]</sup>, 原子激光<sup>[7]</sup>, 物质波孤立子<sup>[8]</sup>等, 其中光晶格中物质波孤立子问题有大量的理论研究. 当有光晶格存在时, 在二维和三维 BECs 体系中, 原子之间存在相互吸引作用时, 能有稳定的物质波孤立子存在<sup>[9]</sup>. 另外, 利用低维光晶格可以稳定高维孤立子, 例如一维和二维光晶格中可以分别形成二维和三维稳定的孤立子<sup>[10,11]</sup>.

过去的几十年中, 原子之间相互作用 (非线性项) 的调控技术取得了很大进展<sup>[1,12]</sup>. 利用 Feshbach 共振技术 (Feshbach Resonance Technique), 可以实现原子之间相互作用随时间<sup>[13]</sup>, 空间变化<sup>[14]</sup>,

或者随时间和空间一起变化<sup>[15]</sup>. 习惯上, 把原子之间相互作用随空间的周期性变化称为非线性光晶格 (NOL), 而把形成周期性势阱的光晶格称为线性光晶格 (LOL)<sup>[16]</sup>. 一维非线性光晶格和一维线性与非线性相结合光晶格中孤立子的稳定性有详细的研究<sup>[17,18]</sup>. 在二维情况下, 一维 NOL 不能在吸引相互作用的原子体系中形成稳定的孤立子. 另外, 只存在二维 NOL, 在吸引和排斥相互作用的 BECs 体系中都不能形成稳定的孤立子, 但是, 当一个方向的 LOL 和另一个与之垂直方向的 NOL 结合时, 在吸引和排斥相互作用的原子体系中都能形成稳定的孤立子<sup>[16]</sup>. 除此之外, 原子之间相互作用随时空变化的双组分 BECs 体系中物质波的性质也有详细研究, 结果表明在这样的体系中, 出现了完全不同于单组分 BECs 体系中形成的稳定的孤立子<sup>[1]</sup>.

本文利用变分法和数值计算方法研究了二维线性与非线性相结合光晶格中二维 BECs 体系中孤立子的存在及稳定性. 线性光晶格和非线性光晶格都是二维的, 不同于文献 [16] 中的线性光晶格和非线性光晶格其实质都是一维的, 这种二维线性和非线性光晶格的结合, 使得体系的稳定性可以分别由线性和非线性光晶格相互垂直的两个方向的强度

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: ldxychj@163.com

以及原子之间的相互作用来决定. 变分分析结果表明, 当存在二维非线性光晶格时, 原子之间相互作用是吸引和排斥时, 都可以形成稳定的物质波孤子. 另外我们把变分计算的结果, 当做初始条件, 代入二维 Gross-Pitaevskii(GP) 方程, 利用数值计算的方法研究其稳定性, 所得到的结果和变分计算结果一致.

## 2 模型

在平均场近似下, 二维 BECs 体系用二维 GP 方程描述

$$\begin{aligned} & i\hbar \frac{\partial}{\partial t'} \varphi(x', y', t') \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla'^2 \varphi(x', y', t') + V(x', y') \varphi(x', y') \\ &+ g(x', y') |\varphi(x', y', t')|^2 \varphi(x', y', t'), \end{aligned} \quad (1)$$

其中  $\iint |\varphi(x', y', t')|^2 dx' dy' = \mathcal{N}$ ,  $\mathcal{N}$  是体系的原子数,  $\nabla'^2 \equiv \partial^2/\partial x'^2 + \partial^2/\partial y'^2$ ,  $m$  是单个原子的质量. 其中

$$V(x', y') = \varepsilon' \cos(\alpha k x') + \omega' \cos(\beta k y'), \quad (2)$$

表示二维线性光晶格,  $\varepsilon'$ ,  $\omega'$  分别表示其  $x'$  和  $y'$  方向 ( $x'$  和  $y'$  方向相互垂直) 的强度, 晶格常数分别为  $2\pi/(\alpha k)$  和  $2\pi/(\beta k)$ .

$$g(x', y') = \chi' + \rho' \cos(\alpha k x') + \gamma' \cos(\beta k y'), \quad (3)$$

表示二维非线性光晶格及原子之间相互作用部分, 可由 Feshbach 共振技术调控.  $\chi'$  表示和 s 波散射长度  $a_0$  有关的非线性部分,  $\rho' \cos(\alpha k x') + \gamma' \cos(\beta k y')$  表示非线性项的空间调制部分, 即非线性光晶格部分,  $x'$  和  $y'$  方向的周期分别是  $2\pi/(\alpha k)$  和  $2\pi/(\beta k)$ .

在变分分析和数值计算中, 引入无量纲变量

$$t \rightarrow \frac{E_r t'}{\hbar}, x \rightarrow k x', y \rightarrow k y', \psi \rightarrow \varphi/k, \quad (4)$$

其中  $E_r = \hbar^2 k^2 / 2m$  表示反冲能量. 则方程 (1) 具有下列无量纲形式:

$$\begin{aligned} & i \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, y, t) = -\nabla^2 \psi(x, y, t) \\ &+ V(x, y) \psi(x, y, t) \\ &+ g(x, y) |\psi(x, y, t)|^2 \psi(x, y, t), \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (6)$$

表示二维 Laplace 算符,

$$V(x, y) = \varepsilon \cos(\alpha x) + \omega \cos(\beta y), \quad (7)$$

表示二维线性光晶格部分,

$$g(x, y) = \chi + \rho \cos(\alpha x) + \gamma \cos(\beta y), \quad (8)$$

表示二维非线性光晶格部分. 控制系统稳定性的无量纲参数为  $\eta = \eta'/E_r$  ( $\eta = \varepsilon, \omega, \chi, \rho, \gamma$ ).

## 3 变分分析

我们求解在二维线性和非线性结合光晶格作用下方程 (5) 的定态解. 为了分析孤立子解的存在和稳定性, 采用如下的形式解

$$\psi(x, y, t) = u(x, y) \exp(-i\mu t), \quad (9)$$

其中  $\mu$  表示化学势,  $u(x, y)$  是实函数, 描述孤立子的外形. 由于二维线性和非线性光晶格在  $x$  和  $y$  方向的不对称性, 我们提出具有椭圆截面的孤立子试探解  $u(x, y)$ ,

$$u(x, y) = A \exp\left(-\frac{ax^2 + by^2}{2}\right), \quad (10)$$

$A$  表示孤立子的高度,  $a$  和  $b$  分别表示孤立子在  $x$  和  $y$  方向与宽度有关的参数. 代入方程 (5), 得到二维定态 GP 方程

$$\mu u + \nabla^2 u - V(x, y)u - g(x, y)u^3 = 0. \quad (11)$$

方程 (10) 满足归一化条件

$$\iint |u|^2 dx dy = \frac{A^2 \pi}{\sqrt{ab}} = N. \quad (12)$$

定态 GP 方程可以从下述 Lagrange 函数得到:

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L} = & \iint -\mu u^2 + (\nabla u)^2 + V(x, y)u^2 \\ & + \frac{g(x, y)}{2} u^4 dx dy. \end{aligned} \quad (13)$$

把方程 (10) 代入方程 (13) 积分, 得到有效 Lagrange 函数

$$\begin{aligned} L = & \frac{A^2 \pi}{8\sqrt{ab}} [2(a+b) \\ & - A^2 (\rho e^{-\frac{\alpha^2}{8a}} + \gamma e^{-\frac{\beta^2}{8b}} + \chi) \\ & - 4(\varepsilon e^{-\frac{\alpha^2}{4a}} + \omega e^{-\frac{\beta^2}{4b}} + \mu)]. \end{aligned} \quad (14)$$

利用  $L$  求关于变分参数  $a$ ,  $b$  和  $A$  的 Euler-Lagrange 方程

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} = 0, \sigma = a, b, A, \quad (15)$$

得到

$$\begin{aligned}
 & 2(a-b) - A^2(\rho e^{-\frac{\alpha^2}{8a}} + \gamma e^{-\frac{\beta^2}{8b}} + \chi) \\
 & - 4(\varepsilon e^{-\frac{\alpha^2}{4a}} + \omega e^{-\frac{\beta^2}{4b}} - \mu) \\
 & + e^{-\frac{\alpha^2}{4a}} \alpha^2 (A^2 e^{\frac{\alpha^2}{8a}} \rho + 8\varepsilon) / (4a) = 0, \quad (16) \\
 & - 2(a-b) - A^2(\rho e^{-\frac{\alpha^2}{8a}} + \gamma e^{-\frac{\beta^2}{8b}} + \chi) \\
 & - 4(\varepsilon e^{-\frac{\alpha^2}{4a}} + \omega e^{-\frac{\beta^2}{4b}} - \mu)
 \end{aligned}$$

$$+ e^{-\frac{\beta^2}{4b}} \beta^2 (A^2 e^{\frac{\beta^2}{8b}} \gamma + 8\omega) / (4b) = 0, \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
 & a + b + A^2(\rho e^{-\frac{\alpha^2}{8a}} + \gamma e^{-\frac{\beta^2}{8b}} + \chi) \\
 & + 2(\varepsilon e^{-\frac{\alpha^2}{4a}} + \omega e^{-\frac{\beta^2}{4b}} - \mu) = 0. \quad (18)
 \end{aligned}$$

利用方程(16)—(18)可以求出体系的化学势和原子数与变分参数  $a$  和  $b$  的关系以及变分参数  $a$  和  $b$  之间的约束关系.

$$2\mu = a + b + 2(\varepsilon e^{-\frac{\alpha^2}{4a}} + \omega e^{-\frac{\beta^2}{4b}}) - \frac{8e^{-\frac{\alpha^2}{4a}}(2a^2 e^{\frac{\alpha^2}{4a}} + \alpha^2 \varepsilon)(\gamma e^{\frac{\alpha^2}{8a}} + \rho e^{\frac{\beta^2}{8b}} + \chi e^{\frac{\alpha^2}{8a} + \frac{\beta^2}{8b}})}{\alpha^2 \rho e^{\frac{\beta^2}{8b}} + 4a(\gamma e^{\frac{\alpha^2}{8a}} + \rho e^{\frac{\beta^2}{8b}} + \chi e^{\frac{\alpha^2}{8a} + \frac{\beta^2}{8b}})}, \quad (19)$$

$$N = -\frac{8\pi e^{-\frac{\alpha^2}{8a}}}{\sqrt{ab}} \frac{2a^2 e^{\frac{\alpha^2}{4a}} + \alpha^2 \varepsilon}{\alpha^2 \rho + 4a(\gamma e^{\frac{\alpha^2}{8a} - \frac{\beta^2}{8b}} + \rho + \chi e^{\frac{\alpha^2}{8a}})}, \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 & - 2\gamma\{2a e^{\frac{\alpha^2}{4a}}[4(a-b)b + a\beta^2] + \varepsilon\alpha^2(4b + \beta^2)\} e^{\frac{\alpha^2}{8a} + \frac{\beta^2}{4b}} + 8a\beta^2\gamma\omega e^{\frac{3\alpha^2}{8a}} + 4be^{\frac{3\beta^2}{8b}} \{-[4a(a-b) - b\alpha^2]\rho e^{\frac{\alpha^2}{4a}} \\
 & - 2\alpha^2\rho\varepsilon - 4a(a-b)\chi e^{\frac{3\alpha^2}{8a}} - 2\alpha^2\varepsilon\chi e^{\frac{\alpha^2}{8a}}\} + 2\beta^2\omega[\alpha^2\rho + 4a(\rho + \chi e^{\frac{\alpha^2}{8a}})] e^{\frac{\alpha^2}{4a} + \frac{\beta^2}{8b}} = 0. \quad (21)
 \end{aligned}$$

物质波孤立子的稳定性可以利用 Vakhitov-Kolokolov Necessary Criterion<sup>[19]</sup> (VK 判据) 分析, 在  $\mu-N$  参数图形中, 稳定解总是对应  $d\mu/dN < 0$  的部分.

下面求出两种特殊参数情况下给出的原子数和化学势的表达式.

1)  $\alpha = 2, \beta = 2, \omega = \varepsilon = -\varepsilon, \rho = 0, \gamma = 0, b = a, \chi = -\chi$ .

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{4\pi}{\chi} (1 - \frac{2\varepsilon}{a^2} e^{-1/a}), \\
 \mu &= \frac{2\varepsilon}{a} (2-a) e^{-1/a} - a. \quad (22)
 \end{aligned}$$

通过 VK 判据, 可以研究线性光晶格中多维孤立子的存在及其稳定性<sup>[10]</sup>.

2)  $\alpha = 2, \beta = \lambda, \omega = 0, \rho = 0, \varepsilon = -\varepsilon, \chi = -\chi, \gamma = -\gamma$ .

$$\begin{aligned}
 N &= \frac{4\pi}{a\sqrt{ab}} \frac{a^2 - 2\varepsilon e^{-1/a}}{\chi + \gamma e^{-\frac{\lambda^2}{8b}}}, \\
 \mu &= \frac{b-3a}{2} - \varepsilon \left(1 - \frac{4}{a}\right) e^{-1/a}, \\
 8\chi b e^{\frac{\lambda^2}{8b}} (a^2 e^{1/a} - a b e^{1/a} - 2\varepsilon) - 4\gamma\varepsilon(4b + \lambda^2) \\
 & + 8\gamma a e^{1/a} (a-b)b + 2\gamma a^2 e^{1/a} \lambda^2 = 0. \quad (23)
 \end{aligned}$$

和文献[16]中的结果一致, 研究了线性和非线性交叉光晶格中多维孤立子的稳定性.

表 1 几种参数组合下解的稳定性 (“T” 表示有稳定孤立子解存在 ( $d\mu/dN < 0$ ), “F” 表示没有稳定孤立子解存在 ( $d\mu/dN > 0$ ))

No.	$\varepsilon$	$\omega$	$\rho$	$\gamma$	稳定性	
					$\chi = 0.5$	$\chi = -0.5$
(1)	-2	0	0	0	F	T
(2)	-2	0	0	-1	T	T
(3)	-2	0	-1	-1	T	T
(4)	0	0	-1	0	F	F
(5)	0	0	-1	-1	F	F
(6)	-2	-2	0	0	F	T
(7)	-2	-2	-1	0	T	T
(8)	-2	-2	-1	-1	T	T

一般情况下, 利用数值计算求解方程(16)—(18), 得出  $N-\mu$  曲线, 根据 VK 判据判断解的稳定性. 表 1 中列出了一些特定参数 (其中  $\alpha = \beta = 2$ ) 组合下解的稳定性, 其中 “T” 表示在所对应的参数下,  $N-\mu$  曲线有负斜率部分, 即可以形成稳定孤立子. 而 “F” 表示在所对应的参数下,  $N-\mu$  曲线没有负斜率部分, 即没有稳定孤立子存在. (1) 表示在吸引作用的 BECs 体系中一维线性光晶格中可以形成二维稳定物质波孤立子. (2) 表示一维线性光晶格和一维非线性光晶格结合, 在吸引和排斥作用的 BECs 体系中均可以形成稳定的物质波孤立子. (3) 表示一维线性光晶格和二维非线性光晶格结合, 在吸引和排斥作用的 BECs 体系中也可以形成稳

定的物质波孤立子. (4) 和 (5) 表示只存在非线性光晶格时, 不能形成稳定的物质波孤立子. (6) 表示二维线性光晶格中, 在吸引作用的 BECs 体系中可以形成稳定的物质波孤立子. (7) 和 (8) 表示, 二维线性光晶格和一维或二维非线性光晶格结合, 都能形成稳定的物质波孤立子, 尽管只存在二维线性光晶格时, 在排斥作用的 BECs 体系中并不能形成稳定的孤立子, 可见非线性光晶格确实有稳定孤立子的作用.

前七种情况在其他文献中已有详细的研究, 下面研究第 (8) 种情况下, 即二维线性光晶格和二维非线性光晶格的结合时, 物质波孤立子的存在及其稳定性.

#### 4 含时变分分析

采用含时变分原理, 研究定态解的时间传播特性, 采用如下含时形式的试探解,

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) = & \sqrt{\frac{N\sqrt{ab}}{\pi}} \\ & \times \exp\left[-\frac{a(x-x_0)^2 + b(y-y_0)^2}{2}\right] \\ & \times \exp\{i[\beta_1(x-x_0)^2 + \beta_2(y-y_0)^2 \\ & + \gamma_1(x-x_0) + \gamma_2(y-y_0) + \phi]\}, \quad (24) \end{aligned}$$

其中  $\phi, x_0, y_0, \gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2, a, b$  是含时变分参数,  $\phi$  表示相,  $x_0, y_0$  分别表示定态解在  $x, y$  方向的中心位置,  $\gamma_1, \gamma_2$  分别表示  $x, y$  方向的线性相系数,  $\beta_1, \beta_2$  分别表示  $x, y$  方向的 Chirp,  $a, b$  分别表示与  $x, y$  方向定态解的空间宽度有关的参数 [20].

含时 Lagrange 函数为

$$\begin{aligned} L(t) = & \iint_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{i}{2} \left( \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} - \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} \right) \right. \\ & + \left( \left| \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi}{\partial y} \right|^2 \right) + V(x, y) |\psi|^2 \\ & \left. + \frac{1}{2} g(x, y) |\psi|^4 \right] dx dy \\ = & N \left( \frac{\dot{\beta}_1}{2a} + \frac{\dot{\beta}_2}{2b} - \gamma_1 \dot{x}_0 - \gamma_2 \dot{y}_0 + \dot{\phi} \right) \\ & + N \left( \frac{a+b}{2} + \frac{2\beta_1^2}{a} + \frac{2\beta_2^2}{b} + \gamma_1^2 + \gamma_2^2 \right) \\ & + \frac{\sqrt{ab}N^2}{4\pi} \left[ \rho \cos(\alpha x_0) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8a}\right) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. + \gamma \cos(\beta y_0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{8b}\right) + \chi \right] \\ & + N \left[ \varepsilon \cos(\alpha x_0) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a}\right) \right. \\ & \left. + \omega \cos(\beta y_0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{4b}\right) \right]. \quad (25) \end{aligned}$$

利用 Euler-Lagrange 方程, 得到含时变分参数的时间变化规律,

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\sigma}} = 0, \quad (26)$$

其中  $\sigma = \phi, x_0, y_0, \gamma_1, \gamma_2, \beta_1, \beta_2, a, b$ .

$$\dot{N} = 0,$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_1 = & \varepsilon \alpha \sin(\alpha x_0) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a}\right) \\ & + \frac{\sqrt{ab}N}{4\pi} \rho \alpha \sin(\alpha x_0) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8a}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\gamma}_2 = & \omega \beta \sin(\beta y_0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{4b}\right) \\ & + \frac{\sqrt{ab}N}{4\pi} \gamma \beta \sin(\beta y_0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{8b}\right), \end{aligned}$$

$$\dot{x}_0 = 2\gamma_1,$$

$$\dot{y}_0 = 2\gamma_2,$$

$$\dot{a} = -8\beta_1 a,$$

$$\dot{b} = -8\beta_2 b,$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_1 = & a^2 - 4\beta_1^2 + \frac{1}{2} \varepsilon \alpha^2 \cos(\alpha x_0) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a}\right) \\ & + \frac{\sqrt{ab}N}{16\pi} \rho \alpha^2 \cos(\alpha x_0) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8a}\right) \\ & + \frac{a\sqrt{ab}N}{4\pi} \left[ \rho \cos(\alpha x_0) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8a}\right) \right. \\ & \left. + \gamma \cos(\beta y_0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{8b}\right) + \chi \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{\beta}_2 = & b^2 - 4\beta_2^2 + \frac{1}{2} \omega \beta^2 \cos(\beta y_0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{4b}\right) \\ & + \frac{\sqrt{ab}N}{16\pi} \gamma \beta^2 \cos(\beta y_0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{8b}\right) \\ & + \frac{b\sqrt{ab}N}{4\pi} \left[ \rho \cos(\alpha x_0) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8a}\right) \right. \end{aligned}$$

$$+ \gamma \cos(\beta y_0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{8b}\right) + \chi \Big], \quad (27)$$

$x_0, y_0$  满足的方程可以看作一个经典粒子在位势中的运动, 位势满足牛顿力学方程,

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0 = 2\dot{\gamma}_1 &= -\frac{\partial V}{\partial x_0}, \\ \ddot{y}_0 = 2\dot{\gamma}_2 &= -\frac{\partial V}{\partial y_0}, \\ V &= 2 \left[ \varepsilon \cos(\alpha x_0) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4a}\right) \right. \\ &+ \omega \cos(\beta y_0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{4b}\right) \Big] \\ &+ \frac{\sqrt{ab}N}{2\pi} \left[ \rho \cos(\alpha x_0) \exp\left(-\frac{\alpha^2}{8a}\right) \right. \\ &+ \left. \gamma \cos(\beta y_0) \exp\left(-\frac{\beta^2}{8b}\right) \right]. \quad (28) \end{aligned}$$

为了求出稳定的定态解, 可以使含时变分参数对时间的一阶导数等于零, 即

$$\dot{\sigma} = 0. \quad (29)$$

取简单的形式,  $N = \text{常数}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ ,  $\alpha = \beta = 2$ ,  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ ,  $x_0 = y_0 = 0$ ,  $a$  和  $b$  所满足的方程

$$\begin{aligned} a^2 + \frac{a\sqrt{ab}N}{4\pi} \left[ \chi + \rho \exp\left(-\frac{1}{2a}\right) \right. \\ \left. + \gamma \exp\left(-\frac{1}{2b}\right) \right] + 2\varepsilon \exp\left(-\frac{1}{a}\right) \\ + \frac{\sqrt{ab}N}{4\pi} \rho \exp\left(-\frac{1}{2a}\right) = 0, \\ b^2 + \frac{b\sqrt{ab}N}{4\pi} \left[ \chi + \rho \exp\left(-\frac{1}{2a}\right) \right. \\ \left. + \gamma \exp\left(-\frac{1}{2b}\right) \right] + 2\omega \exp\left(-\frac{1}{b}\right) \\ + \frac{\sqrt{ab}N}{4\pi} \gamma \exp\left(-\frac{1}{2b}\right) = 0. \quad (30) \end{aligned}$$

此时, 可以在给定线性和非线性光晶格的强度, 原子之间的相互作用以及原子数的情况下, 数值计算求出描述稳定定态解波包的参数  $a, b, A$ . 含时变分方法得到的结果可以和 VK 判据的结果进行对比. 具体操作是, 给定相同的系统参数, 在  $N-\mu$  图中按照 VK 判据找出稳定解所对应的点, 由于  $N, \mu$  都是  $a, b$  的函数, 所以相图上的一点一定和一对  $a, b$

对应, 再根据归一化条件, 求出  $A$ , 进而和含时变分方法的结果进行对比.

### 5 稳定性验证

我们验证表 1 中的第 (8) 种情况, 即  $\varepsilon = -2$ ,  $\omega = -2$ ,  $\rho = -1$ ,  $\gamma = -1$ ,  $\chi = -0.5$ . 图 1 是根据方程 (16)—(18) 计算出所对应参数下体系的  $N-\mu$  图形, 按照 VK 判据, 当有  $d\mu/dN < 0$  的部分存在时, 说明体系有稳定的局域态解存在, 我们在图上选择一点, 这点对应的参数标在图上, 尤其注意原子数  $N \approx 4$ . 把  $N \approx 4$  代入含时变分得到的方程 (30), 可以求出稳定解对应的宽度参数是  $a = 3.839$ ,  $b = 3.839$ , 再利用归一化条件得到  $A = 2.21089$ , 这和 VK 判据得到的结果是一致的.

我们利用有限差分法求解无量纲 GP 方程 (5), 研究变分法给出结果的稳定性, 图 2 是把图 1 中的结果作为初始条件计算得到的波包随时间传播的特性. 数值计算过程中, 空间步长和时间步长分别是  $h = 0.05$  和  $\tau = 0.001$ . 图 2(a) 是波包振幅随时间的变化, 可以看出, 振幅随时间有规律地振荡, 说明孤立子随时间的演化是稳定的, 说明非线性光晶格确实可以稳定孤立子. 图 2(b), (c) 分别是波包在  $t = 0$  和  $t = 500$  时的形状, 可以看出定态解有良好的定域性, 初始波包和终了波包的振幅是不同的, 由初始变分法给出的结果演化到最后一个稳定的呼吸状的孤立子. 图 2(d), (e) 分别是波包传播过程中每一时刻  $x = 0$  和  $y = 0$  的截面图形随时间的演化, 同样可以看出稳定振荡的结果, 说明了波包随时间演化的细节. 因此, 数值计算的结果和变分计算的结果是完全一致的, 证明了我们的理论分析.

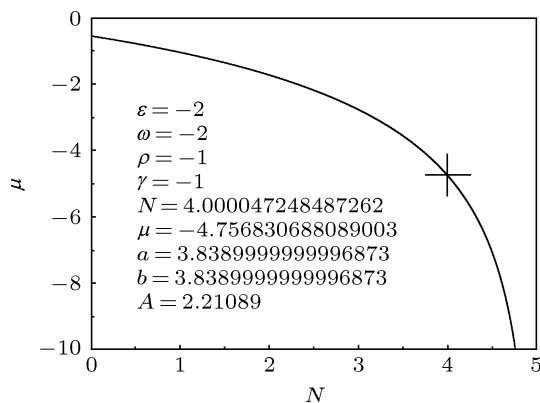


图 1 变分计算得到的  $N-\mu$  相图

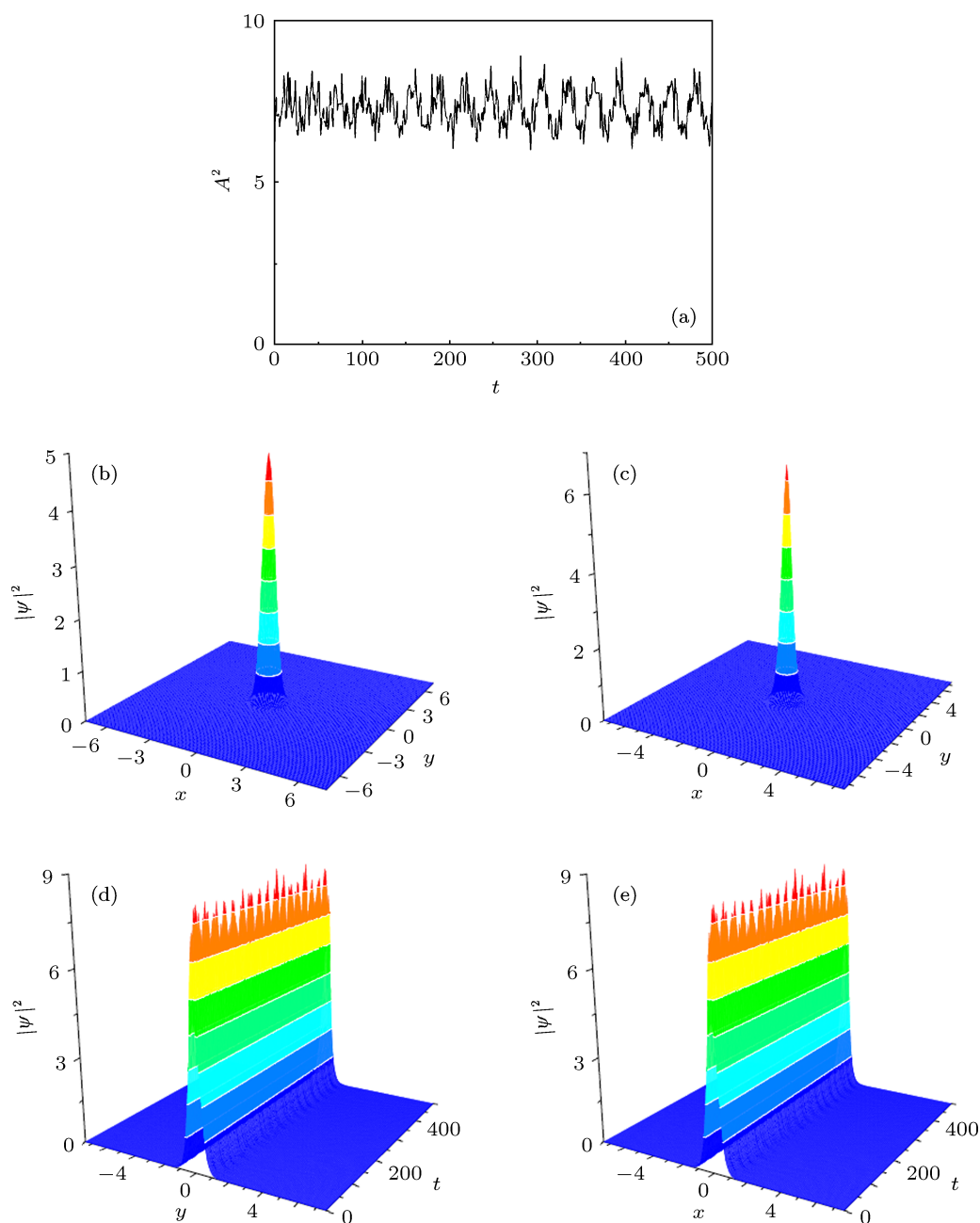


图2 定态解随时间传播特征

## 6 结论

利用变分法和数值模拟的方法研究了二维线性和非线性结合光晶格中二维 BECs 体系中物质波孤子的存在及其稳定性. 变分法和 GP 方程是研究光晶格中 BECs 的理论基础, 利用定态变分法及 VK 判据确定了二维线性光晶格和非线性光晶格可以在吸引和排斥作用的原子体系中维持稳定的孤

立子. 由于线性和非线性光晶格的结合, 以及原子之间相互作用的存在, 使得体系的稳定性由五个参数控制, 即晶格强度和原子之间相互作用的非线性项, 给出了这些参数的各种组合下系统是否存在稳定的孤立子, 对类似的问题进行了总结. 含时变分法是研究孤立子随时间变化的基础, 我们利用含时变分法, 给出了稳定孤立子存在的波包参数, 这个结果和定态变分法给出的结果是一致的. 最后利用

数值方法直接求解 GP 方程, 把变分法得到的结果作为初始条件, 得到了稳定的呼吸型孤立子, 证明了变分的结果是正确的. 本文一方面总结了二维线性和非线性光晶格中各种参数组合下孤立子的存

在及其稳定性, 另一方面总结了研究类似问题的基本研究方法, 即理论分析和数值模拟相结合, 在其它问题中可以直接应用.

- 
- [1] Wang D S, Hu X H, Liu W M 2010 *Phys. Rev. A* **82** 023612
- [2] Zhao W L, Dou F Q, Wang J Z 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 220503 (in Chinese) [赵文垒, 豆福全, 王建忠 2012 物理学报 **61** 220503]
- [3] Xi Y D, Wang D L, She Y C, Wang F J, Ding J W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3720 (in Chinese) [奚玉东, 王登龙, 余彦超, 王凤姣, 丁建文 2010 物理学报 **59** 3720]
- [4] Chen H F, Huang J S, Xie Z W 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3435 (in Chinese) [陈海峰, 黄劲松, 谢征微 2008 物理学报 **57** 3435]
- [5] Salerno M, Konotop V V, Bludov Y V 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 030405
- [6] Wimberger S, Mannella R, Morsch O, Arimondo E, Kolovsky A R, Buchleitner A 2005 *Phys. Rev. A* **72** 063610
- [7] Anderson B P, Kasevich M A 1998 *Science* **282** 1686
- [8] Xie Y D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210305 (in Chinese) [谢元栋 2012 物理学报 **61** 210305]
- [9] Baizakov B B, Malomed B A, Salerno M 2003 *Europhys. Lett.* **63** 642
- [10] Baizakov B B, Malomed B A, Salerno M 2004 *Phys. Rev. A* **70** 053613
- [11] Mihalache D, Mazilu D, Lederer F, Kartashov Y V, Crasovan L C, Torner L 2004 *Phys. Rev. E* **70** 055603(R)
- [12] Yang L Y, Fang Y C, Yang Z A 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 661 (in Chinese) [杨丽云, 房永翠, 杨志安 2008 物理学报 **57** 661]
- [13] Abdullaev F K, Kamchatnov A M, Konotop V V, Brazhnyi V A 2003 *Phys. Rev. Lett.* **90** 230402
- [14] Belmonte-Beitia J, Perez-Garcia V M, Vekslerchik V, Torres P J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 064102
- [15] Belmonte-Beitia J, Perez-Garcia V M, Vekslerchik V, Konotop V V 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 164102
- [16] da Luz H L F, Abdullaev F K, Gammal A, Salerno M, Tomio L 2010 *Phys. Rev. A* **82** 043618
- [17] Sakaguchi H, Malomed B A 2005 *Phys. Rev. E* **72** 046610
- [18] Sakaguchi H, Malomed B A 2010 *Phys. Rev. A* **81** 013624
- [19] Vakhitov N G, Kolokolov A A 1973 *Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Radiofiz.* **16** 1020
- [20] Cheng Y S, Adhikari S K 2011 *Phys. Rev. A* **83** 023620

# The stability of matter-wave solitons in 2D linear and nonlinear optical lattices

Chen Hai-Jun<sup>†</sup> Li Xiang-Fu

(*Electrical Engineering College, Longdong University, Gansu 745000, China*)

(Received 26 July 2012; revised manuscript received 21 November 2012)

## Abstract

By means of variational solution and direct numerical simulation of the Gross-Pitaevskii equation (GPE), we have studied the stability of matter-wave solitons in two-dimensional (2D) Bose-Einstein condensations (BECs), with 2D linear and nonlinear optical lattices (OLs). Using the static variational approach and Vakhitov-Kolokolov criterion necessary for stability, we obtain the stability condition for solitons in different combinations of OL's parameters. We show that the 2D linear and nonlinear optical lattices allow us to stabilize 2D solitons for both attractive and repulsive interactions. We also study the time-evolution problems of 2D BECs, using the time-dependent variational approach and numerical solution of GPE for 2D linear and nonlinear OLs. Very good agreement between the results corresponding to both treatments is observed.

**Keywords:** linear and nonlinear optical lattices, Bose-Einstein condensates, solitons, stability

**PACS:** 03.75.Lm, 05.30.Jp

**DOI:** 10.7498/aps.62.070302

---

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: ldxyhj@163.com