

## 双稳态系统中随机共振和相干共振的相关性\*

董小娟<sup>†</sup> 晏爱君

(西安电子科技大学理学院, 西安 710071)

(2012年10月28日收到; 2012年12月9日收到修改稿)

研究了加性噪声和乘性噪声共同驱动的双稳态系统中的随机共振和相干共振现象. 针对加性噪声和乘性噪声之间不存在关联性和存在关联性两种情形, 引入一种适当的能同时表征随机共振和相干共振的指标, 应用一阶欧拉方法, 通过数值模拟对系统的随机共振和相干共振现象进行研究. 结果表明在弱噪声驱动下, 随着加性噪声强度的增加, 当系统出现相干共振时, 如果给系统外加一个弱周期驱动力, 几乎在同一时刻, 系统也出现了随机共振现象; 但随着乘性噪声强度的增加, 仅当加性噪声和乘性噪声之间相关时, 此结论成立. 并且系统参数对相干共振和随机共振的影响是一致的.

**关键词:** 双稳态系统, 随机共振, 相干共振

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.070501

## 1 引言

随机共振、相干共振均为噪声诱导的某种意义下系统有序活动得到增强的奇特现象, 这两种现象之间有不少相似之处. 简言之, 随机共振 (stochastic resonance) 是由 Benzi 等<sup>[1]</sup> 和 Nicolis 等<sup>[2]</sup> 在上世纪 80 年代初研究古气候冰川问题时首次提出, 随机共振被解释为周期信号、非线性和噪声之间的一种协同现象, 表征随机共振的指标有功率谱振幅、信噪比、弛豫时间分布密度、互有信息和 Fisher 信息等<sup>[3]</sup>, 随机共振现象是指表征随机共振的指标随着噪声强度的增加, 会出现一个极大值. 相干共振 (也称一致共振) (coherence resonance) 首先由 Hu 等<sup>[4]</sup> 在研究生物系统时提出, 表征相干共振的量有功率谱、信噪比、相干系数等. 相干共振指的是在可激系统 (如双稳态系统或阈值系统) 中, 表征相干共振的指标随噪声强度的变化也不是单调的, 而是存在一个最优的噪声强度对应最强 (或最规则) 的相干运动<sup>[5]</sup>.

自从随机共振和相干共振被提出以来, 这两种现象一直作为不同的学科来发展. 近年来关于随

机共振和相干共振的研究不断涌现<sup>[6-19]</sup>, 2000 年, Lindner 等<sup>[6]</sup> 最先在一种 FitzHugh-Nagumo 模型中研究了随机共振和一致共振的关系, 他们的研究表明在该系统中出现一致共振, 同时若该系统加入周期外力, 则系统会出现随机共振现象; Hu 等<sup>[8]</sup> 以双稳系统为例研究了随机共振和一致共振的关系, 研究表明表征系统随机共振和相干共振的指标具有类似性质, 随系统参数 (如噪声强度) 改变它们的变化趋势类似, 即随机共振和一致共振之间存在某种相关性. 随着神经科学的发展, 人们发现分析这两者之间的关系越来越重要<sup>[6,7]</sup>. 研究表明在神经网络中, 神经元在强噪声背景下工作, 并且神经元通常都是以信号嵌入在噪声中的形式传输信息. 因此在神经元传输信号的过程中, 信号和噪声是天然存在的, 并且神经元系统一般均为阈值系统. 换言之, 在神经元系统中存在同时出现随机共振和相干共振的条件, 如果能够得到随机共振和相干共振的关系, 则人们就可以清楚在神经元工作过程中, 噪声和信号分别扮演什么角色, 对神经元传输信息的方式有更进一步的理解, 这对神经科学的发展是有益的. 另一方面人们感兴趣的是在系统出现相干共振时, 如果给对应的系统外加一个周期信号, 会不会

\* 西安电子科技大学基本科研业务费 (项目编号: K5051270001) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: xiaojuand@163.com

在对应时刻出现随机共振现象? 已有文献中, 在研究双稳态系统的随机共振现象时所采用信噪比表达式, 不管使用两态理论还是线性响应理论, 当系统输入信号的振幅为 0 时, 系统输出信噪比值均为 0, 因此用其来研究系统的相干共振不合适. 本文引入一种适当的能同时表征随机共振和相干共振的指标, 应用一阶欧拉方法, 通过数值模拟对系统的随机共振和相干共振现象进行研究.

本文第二部分和第三部分分别针对加性噪声和乘性噪声之间不存在关联性和存在关联性两种情形时对系统随机共振和相干共振的关系进行研究.

## 2 不关联噪声驱动的双稳态系统中随机共振和相干共振

考虑由如下的 Langevin 方程所确定的一维双稳态系统:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\partial U_0(x, x(t))}{\partial x} + x(t)\xi(t) + \eta(t) + A \cos(2\pi\Omega t), \quad (1)$$

$$U_0(x) = -\frac{a}{2}x^2 + \frac{b}{4}x^4, \quad (2)$$

其中  $U_0(x)$  表示对称的势函数, 本文中取  $a = 1$ ,  $b = 1$ .  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  分别为乘性和加性白噪声, 且这两个噪声之间相互独立, 它们的均值和 (协) 方差如下所示:

$$\begin{aligned} \langle \xi(t) \rangle &= \langle \eta(t) \rangle = 0, \\ \langle \xi(s)\xi(s') \rangle &= 2D\delta(s-s'), \\ \langle \eta(t)\eta(t') \rangle &= 2\alpha\delta(t-t'), \\ \langle \xi(t)\eta(s) \rangle &= \langle \xi(s)\eta(t) \rangle = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $D$  和  $\alpha$  分别为乘性和加性白噪声的噪声强度.  $A \cos(2\pi\Omega t)$  为外部的周期驱动力,  $A$  为振幅,  $\Omega$  为周期驱动力的频率.

相应于 (1)–(3) 式的概率密度函数  $P(x, t)$  满足下面的 Fokker-Planck 方程:

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} [ax - bx^3 + F(t) + Dx]P(x, t)$$

$$+ \frac{\partial^2}{\partial x^2} [Dx^2 + \alpha]P(x, t), \quad (4)$$

则方程 (4) 所对应的稳态概率密度函数  $P_{st}(x)$  为

$$P_{st}(x) = N|Dx^2 + \alpha|^{-1/2} \exp\left[-\frac{\tilde{U}(x)}{D}\right], \quad (5)$$

其中  $N$  是标准化的系数, 广义势函数  $\tilde{U}(x)$  为

$$\begin{aligned} \tilde{U}(x) &= \frac{b}{2}x^2 - \left(\frac{a+D}{2} + \frac{\alpha b}{2D}\right) \ln|Dx^2 + \alpha| \\ &\quad - \sqrt{\frac{D}{\alpha}} \arctan\left(\sqrt{D/\alpha}x\right) A \cos(2\pi\Omega t). \end{aligned} \quad (6)$$

图 1 给出了双稳态势函数  $U_0(x)$  和广义势函数  $\tilde{U}(x)$  的图形. 由图 1 可见, 模型中噪声不改变双稳态系统势函数的对称性, 甚至对势井的深度影响也不明显, 仅仅对势函数做了上下平移.

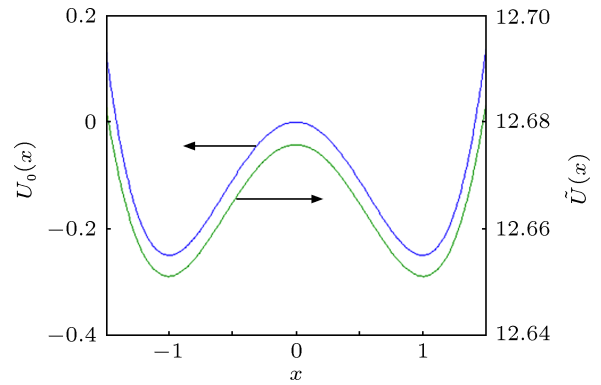


图 1 势函数  $U_0(x)$  和广义势函数  $\tilde{U}(x)$  图形 ( $D = 0.01$ ,  $\alpha = 0.1$ ,  $A = 0$ )

下面应用一阶欧拉方法, 通过数值模拟对双稳态系统中随机共振和相干共振现象进行研究, 进而讨论这两种现象之间的相关性. 在本文中采用描述随机共振和相干共振的指标为同一定义, 本文称其为信噪比, 其定义为系统输出总功率谱在输入信号频率对应处的峰值与噪声功率谱在输入信号频率处峰值的比值, 本文为了比较随机共振和相干共振方便, 将描述随机共振的信噪比记为 SNR, 而将表征相干共振的指标记为  $\eta$ . 其中信噪比的定义为

$$\text{SNR} = \frac{\text{系统输出信号功率谱密度在输入信号频率对应处的值}}{\text{噪声功率谱密度在输入信号频率处对应的值}}, \quad (7)$$

$$\eta = \frac{\text{系统输出信号功率谱密度在输入信号频率对应处的值}}{\text{噪声功率谱密度在输入信号频率处对应的值}} \Big|_{A=0}. \quad (8)$$

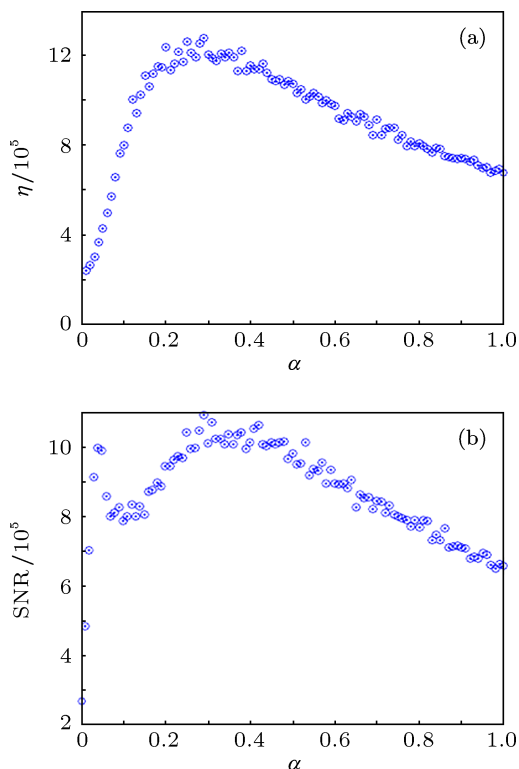


图2  $\eta$  和 SNR 作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数的曲线 ( $D = 0.01$ ,  $\Omega = 0.01$ )

图 2 是描述一致共振的指标  $\eta$ (A) 和描述随机共振的指标 SNR(B) 作为系统加性噪声强度  $\alpha$  的函数的曲线. 由图 2(a) 可见, 在  $\eta$ - $\alpha$  曲线上出现了一个极大值, 即系统出现了相干共振现象, 并且峰的位置在  $\alpha = 0.3$  附近. 在图 2(b) 中, 随着噪声强度  $\alpha$  的增加, 在  $\alpha = 0.01$  附近系统的输出信噪比曲线上出现了一个极大值, 这是因为  $\Omega = 0.01$  对应的是外部周期驱动的频率, 这也说明了本文所采用的描述随机共振的指标是正确的. 随后随着加性噪声强度的增加, 在  $\alpha = 0.1$  附近, SNR- $\alpha$  曲线上出现了一个极小值, 当加性噪声强度  $\alpha$  更进一步增加时, 在  $\alpha = 0.3$  附近 SNR- $\alpha$  曲线上再次出现了随机共振现象. 由图 2 可见, 在采用上述指标描述系统的随机共振和相干共振现象时, 当系统出现相干共振的时刻, 如果给系统外加一个弱周期驱动力, 几乎在同一时刻, 系统也出现了随机共振现象. 这就表明, 系统的随机共振和一致共振在弱噪声强度和弱周期力条件下是一致的, 均是本文所给指标增强的一种奇特现象.

图 3 是描述一致共振的指标  $\eta$ (A) 和描述随机共振的指标 SNR(B) 作为系统的乘性噪声强度  $D$  的函数的曲线. 由图 3(a) 可见, 在  $\eta$ - $D$  曲线上出现了一个极大值, 即系统出现了相干共振现象, 并且

峰的位置在  $D = 0.2$  附近. 但在图 3(b) 中, 随着噪声强度  $D$  的增加, SNR- $D$  曲线是单调递减的. 由图 3 可见, 在本文所采用的描述随机共振和相干共振的指标下, 随着乘性噪声强度的增加, 系统会出现一致共振现象, 但不会出现随机共振现象.

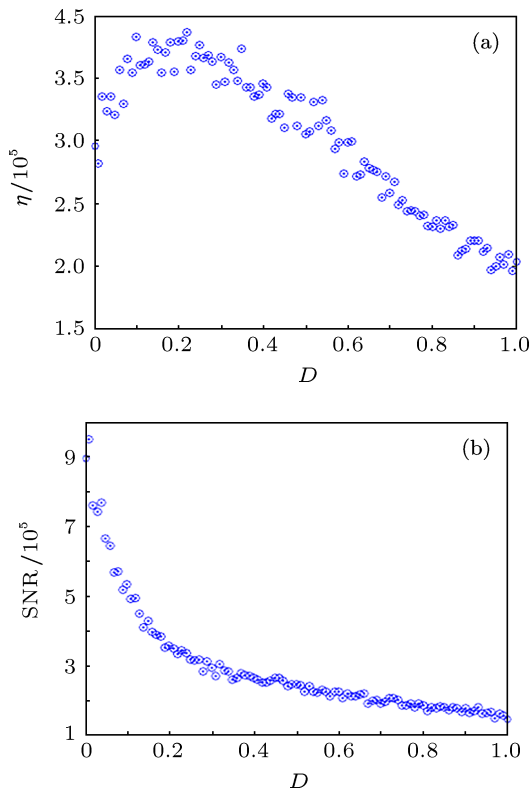


图3  $\eta$  和 SNR 作为加乘性噪声强度  $D$  的函数 ( $\alpha = 0.03$ ,  $\Omega = 0.01$ )

### 3 关联噪声驱动的双稳态系统中随机共振和相干共振

在模型 (1)–(3) 中考虑噪声之间的关联性:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\partial U_0(x, x(t))}{\partial x} + x(t)\sqrt{1-c}\xi(t) + \sqrt{c}\eta(t) + A \cos(2\pi\Omega t), \quad (9)$$

其中  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  为关联的乘性和加性白噪声, 其性质如 (3) 式所示,  $c(0 < c < 1)$  为噪声关联系数, 上述系统中噪声之间的关联是一类空间关联形式, 如下图是一种在白鲟鱼头部外围壶腹状的电接受器中发现的两个不直接耦合的有区别的振子,  $\xi(t)$  和  $\eta(t)$  分别代表两个自激振子, 可以用不同的噪声模拟, 这两个振子通过不直接耦合的方式对神经元的放电模式都会产生影响. 若设  $s(t)$  是外部对神经元的刺激, 它会通过不同的比例刺激两个振子

$\xi(t)$  和  $\eta(t)$ , 因而产生了文中的噪声关联形式, 详见文献 [15, 16] 对其描述.

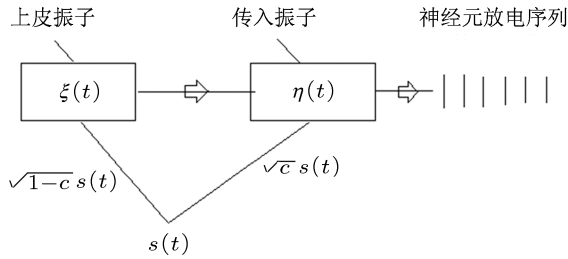


图 4 电传感器示意图 [17]

相应于 (9) 式, (2), (3) 的概率密度函数  $P_1(x, t)$  满足下面的 Fokker-Planck 方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_1(x, t)}{\partial t} = & -\frac{\partial}{\partial x}[(a + D(1 - c))x - bx^3 \\ & + F(t)]P(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}[D(1 - c)x^2 \\ & + c\alpha]P(x, t), \end{aligned} \quad (10)$$

由 (10) 式可得准稳态概率密度  $P_{st}(x)$  为

$$P_{st}(x) = N_1 [D(1 - c)x^2 + c\alpha]^{-1/2} \exp\left[-\frac{\tilde{U}_c(x)}{D}\right],$$

其中  $N_1$  为归一化常数, 广义势函数  $\tilde{U}_c(x)$  为

$$\begin{aligned} \tilde{U}_c(x) = & \frac{bx^2}{2(1 - c)} - \frac{1}{2} \left[ \frac{a + D(1 - c)}{1 - c} + \frac{c\alpha b}{D(1 - c)^2} \right] \\ & \times \ln(c\alpha + D(1 - c)x^2) - \sqrt{\frac{D}{\alpha c(1 - c)}} \\ & \times \arctan \sqrt{\frac{D(1 - c)}{\alpha c}} x F(t). \end{aligned} \quad (11)$$

图 5 给出了双稳态势函数  $U_0(x)$  和广义势函数  $\tilde{U}_c(x)$  的图形. 由图可见, 外部周期驱动力会改变双稳态系统势井的对称性, 当外部周期驱动力不为零时, 系统的对称性被打破. 当外部周期力的振幅很小时, 系统的非对称改变量很小.

该部分所采用的方法和指标与第二节研究不关联噪声驱动的双稳态系统中随机共振和相干共振的方法和指标相同.

图 6(a) 所示为关闭外部周期驱动力时表征系统一致共振现象的指标  $\eta$  作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随不同噪声关联参数  $c$  变化的曲线. 由图可见, 随着加性噪声强度  $\alpha$  的增加,  $\eta$ - $\alpha$  曲线上出现了一个极大值, 即表明系统出现了相干共振现象. 并且随着噪声关联系数  $c$  的增加, 峰的高度几乎不变,

峰的位置向噪声强度减小的方向偏移, 且峰的宽度变窄.

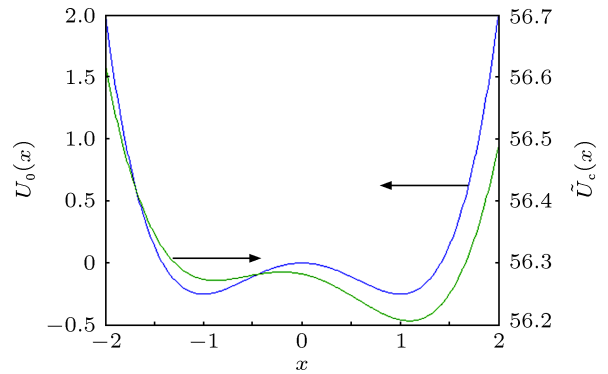


图 5 势函数  $U_0(x)$  和广义势函数  $\tilde{U}_c(x)$  图形 ( $c = 0.6, D = 0.01, \alpha = 0.1, A = 0.2$ )

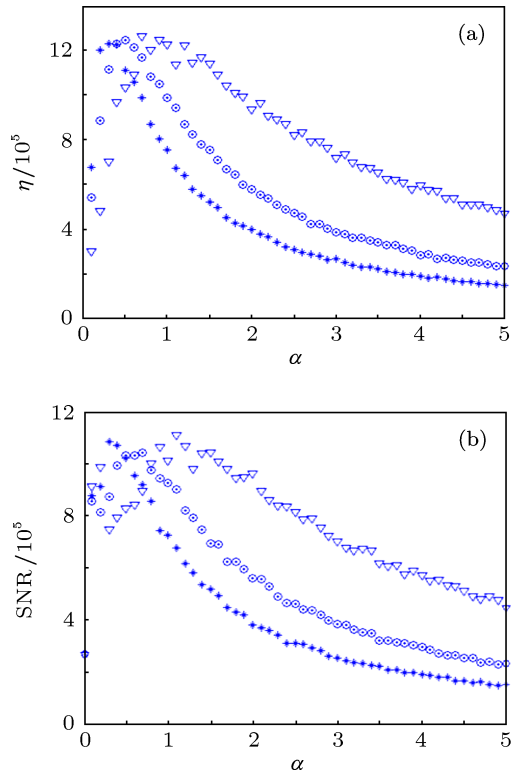


图 6  $\eta$  和 SNR 作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随不同参数  $c$  变化的曲线 ( $\nabla (c = 0.3), \odot (c = 0.6), * (c = 0.9), D = 0.01, \Omega = 0.01$ )

图 6(b) 所示为存在外部周期驱动力时系统的输出信噪比 SNR 作为加性噪声强度  $\alpha$  的函数随不同的噪声关联参数  $c$  变化的曲线. 由图可见, 随着加性噪声强度  $\alpha$  的变化, 系统的输出信噪比曲线上出现了一个极大值, 这是我们很熟悉的随机共振现象. 并且随着噪声关联系数  $c$  的增加, 峰的高度有微小提高, 峰的位置向噪声强度减小的方向偏移, 且峰

的宽度变窄. 由图 6 可见, 对关联噪声驱动的双稳态系统来说, 在采用上述指标描述随机共振和相干共振的前提下, 当系统出现相干共振的时刻, 如果给系统外加一个弱周期驱动力的话, 几乎在同一时刻, 系统也出现了随机共振现象. 并且噪声和噪声关联参数  $c$  对相干共振和一致共振的影响是一致的. 这就表明, 系统的相干共振和一致共振在弱噪声和弱周期力驱动下是一致的.

振和相干共振的前提下, 随着乘性噪声强度  $D$  的增加, 当系统出现相干共振的时刻, 如果给系统外加一个弱周期驱动力的话, 几乎在同一时刻, 系统也出现了随机共振现象, 并且系统噪声关联系数对相干共振和一致共振的影响相同, 这就表明, 系统的随机共振和一致共振在弱噪声和弱周期力驱动下是一致的.

#### 4 结论与分析

从以上的数值模拟结果可以得到结论: 在弱噪声和弱周期力驱动的双稳态系统中, 相干共振和随机共振现象是一致的. 为了解释它们的一致性, 我们不妨从随机共振产生的机理来分析. 众所周知, 经典的解释随机共振产生的机理是假设过阻尼粒子在双稳态势井中做跃迁运动, 当噪声诱导的这种势井间的跃迁运动和外部弱周期驱动达到一种统计意义上的同步时, 随机共振现象出现. 图 1 给出对称势函数  $U_0(x)$  和仅受加性与乘性噪声驱动时双稳态系统的广义势函数  $\tilde{U}(x)$  的曲线. 由图可见, 模型中噪声仅对原对称势函数  $U_0(x)$  曲线做了上下平移, 不改变势井的形状, 因而当噪声强度增加到某一合适值时, 帮助过阻尼粒子克服势垒高度, 在两个势井间有规律的跃迁, 即产生了相干共振现象. 同时由图 5 可见, 外部周期驱动力会改变双稳态势井的对称性, 在弱外部周期力下, 虽然系统的非对称改变量很小, 但双稳态势井的非对称性却使粒子穿过势垒的跃迁更容易. 既然绝热近似理论要求双稳态系统中出现随机共振的条件是外部周期驱动力很小, 那么当外部周期驱动力关闭, 而系统的噪声可以在某种程度上弥补弱周期驱动力对势井的改变, 进而使系统出现“随机共振”现象, 因为此时的外部周期驱动力为 0, 则系统出现了一致共振现象.

随机共振和相干共振是随机动力系统两个有趣现象, 这两个现象一直被当做不同的学科来研究. 但分析研究随机共振和相干共振的文献, 人们不难发现, 由于随机动力系统的多样性, 尽管研究随机共振和相干共振的方法灵活多样, 表征这两种现象的指标也很灵活, 但它们之间的共性很多, 如这两者同为噪声诱导的系统某方面的有序性质提高的现象, 并且它们的研究思路是类似的. 如果将研究这两种现象的方法以及表征它们的指标之间异同能够清楚地找出, 使得这两者之间能关联起

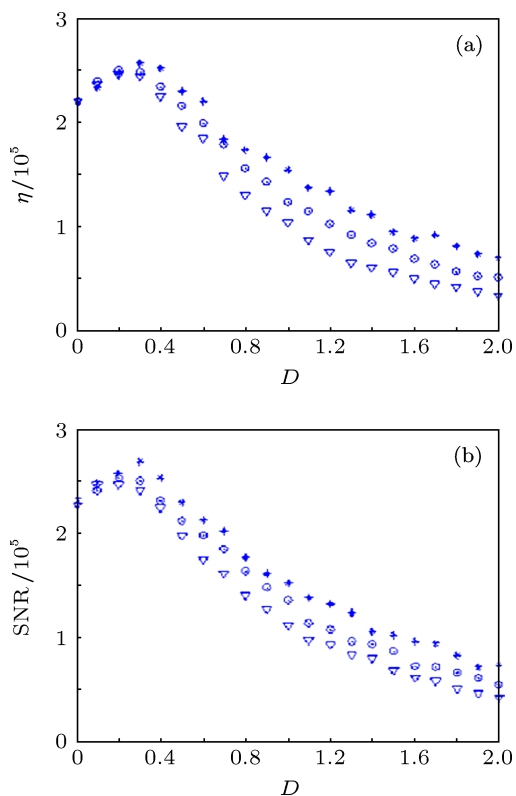


图 7  $\eta$  和 SNR 作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同参数  $c$  变化的曲线 ( $\nabla$  ( $c = 0.3$ ),  $\odot$  ( $c = 0.6$ ),  $*$  ( $c = 0.9$ ),  $D = 0.01$ ,  $\Omega = 0.01$ )

图 7(a) 为关闭外部周期驱动力时表征系统一致共振的指标  $\eta$  作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同噪声关联参数  $c$  变化的曲线. 由图可见, 随着乘性噪声强度  $D$  的增加,  $\eta$ - $D$  曲线上出现了一个极大值, 即系统出现了相干共振现象. 并且随着噪声关联系数  $c$  的增加, 曲线的形状和位置几乎不变.

图 7(b) 所示为存在外部周期驱动力时系统输出信噪比 SNR 作为乘性噪声强度  $D$  的函数随不同噪声关联参数  $c$  变化的曲线. 由图可见, 随着乘性噪声强度  $D$  的变化, 系统的输出信噪比曲线上出现了一个极大值, 即系统出现了随机共振现象. 并且随着噪声关联系数  $c$  的增加, 曲线的形状和位置几乎不变. 由图 7 可见, 在采用上述指标描述随机共

来, 则理论上对噪声诱导的同步现象更加完善, 实际上利用这两者关联性可以更好的优化系统的输出, 使得随机共振、相干共振和相同步之间建立起定量的关系, 可以从物理的角度互相解释, 进而互

相促进. 这是以后我们努力研究的一个方面.

作者董小娟感谢 Ohio University 物理与天文学院 Alexander B. Neiman 教授对其在数值计算方面的帮助和有益讨论.

- 
- [1] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *Phys. Rev. A* **14** L453
  - [2] Nicolis C 1981 *Solar Physics* **74** 473
  - [3] Anishchenko V S, Neiman A B, Moss F, Schimansky-Geier L 1999 *Phys. Uspekhi* **42** 7
  - [4] Hu G, Ditzinger T, Ning C Z, Haken H 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 807
  - [5] Chen J X 2006 *Journal of Hulunbeir Collrge* **14** 85 (in Chinese) [陈进兴 2006 呼伦贝尔学院学报 **14** 85]
  - [6] Lindner B, Schimansky-Geier L 2000 *Phys. Rev. E* **61** 6103
  - [7] Zhou X R, Luo X S 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2849 (in Chinese) [周小荣, 罗晓曙 2008 物理学报 **57** 2849]
  - [8] Cao Z J, Li P F, Hu G 2007 *Chin. Phys. Lett.* **24** 882
  - [9] Dumas J, Marcus J 2012 *Physica B* **407** 1750
  - [10] Fischer M, Stefani F, Gerbeth G 2008 *Eur. Phys. J. B* **65** 547
  - [11] Jin Y F, Hu Y F 2007 *Physica A* **382** 423
  - [12] Werner J P, Benner H, Florio B J, Stemle T 2011 *Physica D* **240** 1863
  - [13] Pikovsky A S, Kurths J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 775
  - [14] Badzey R L, Mohanty P 2005 *Nature* **437** 995
  - [15] Doiron B, Lindner B, Longtin A, Maler L, Bastian J 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 048101
  - [16] Neiman A B, Russell D F 2004 *Journal of Neurophysiology* **92** 492
  - [17] Zhang X Y, Xu W, Zhou B C 2011 *Acta Phys. Sin.* **6** 60514 (in Chinese) [张晓燕, 徐伟, 周丙常 2012 物理学报 **60** 60514]
  - [18] Zhang X Y, Xu W, Zhou B C 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 030501 (in Chinese) [张晓燕, 徐伟, 周丙常 2012 物理学报 **61** 030501]
  - [19] Li J L, Zeng L Z 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010503

# The relationship between stochastic resonance and coherence resonance in a bi-stable system\*

Dong Xiao-Juan<sup>†</sup> Yan Ai-Jun

(Department of Mathematics, Xidian University Xi'an 710071, China)

(Received 28 October 2012; revised manuscript received 9 December 2012)

## Abstract

The phenomenon of stochastic resonance (SR) and coherence resonance (CR) in a bi-stable system driven by additive and multiplicative noises has been investigated. For the case that the system has uncorrelated or correlated additive and multiplicative noises, we introduce an appropriate index that can characterize both SR and CR at the same time. Applying the first-order Euler numerical computation to study the SR and CR, We can show that for small noise density, with the increase of additive noise density, and the appearance of CR, if we add a small periodic force to the bi-stable system, SR will occur almost at the same time. However, with increasing multiplicative noise density, the above conclusion may be satisfied only for correlated additive and multiplicative noises. Moreover, the effects of other parameters on CR and SR can be shown to be the same.

**Keywords:** bi-stable system ,stochastic resonance, coherence resonance

**PACS:** 05.40.-a, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.070501

---

\* Project supported by the Xidian University Basic Science and Research Foundation (Grant No. K5051270001).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: xiaojuand@163.com