

## 级联双稳 Duffing 系统的随机共振研究\*

赖志慧<sup>1)</sup> 冷永刚<sup>1)2)3)†</sup> 范胜波<sup>1)</sup>

1) (天津大学机械工程学院, 天津 300072)

2) (天津大学机构理论与装备设计教育部重点实验室, 天津 300072)

3) (天津市非线性动力学与混沌控制重点实验室, 天津 300072)

(2012年10月31日收到; 2012年12月15日收到修改稿)

研究了级联双稳 Duffing 系统的随机共振特性, 证明级联双稳 Duffing 系统变尺度系数、阻尼比和级数等参数的适当调节, 不仅可实现大参数信号的级联随机共振, 而且可优化单级双稳 Duffing 系统的随机共振特征, 即参数调节的级联双稳 Duffing 系统能实现比单级双稳 Duffing 系统更好的随机共振输出. 此外, 级联双稳 Duffing 系统对方波信号具有良好的滤波整形作用, 可用于实现含噪方波信号的波形恢复.

**关键词:** 级联双稳 Duffing 系统, 随机共振, 变尺度, 参数调节

**PACS:** 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

**DOI:** 10.7498/aps.62.070503

## 1 引言

随机共振 (stochastic resonance) 是 Benzi 和 Nicolis 等人在研究古气象冰川问题时首次提出的<sup>[1,2]</sup>, 用以解释过去 70 万年地球的冰川期和冷气候期周期交替出现的现象. 自那之后, 随机共振现象不仅得到进一步的实验验证<sup>[3,4]</sup>, 而且成为许多领域广泛研究的课题<sup>[5-7]</sup>. 随机共振利用非线性系统, 在输入信号和噪声的协同作用下, 系统输出的信噪比将会出现峰值, 产生类似力学中人们熟知的共振输出, 故称为随机共振. 此前相关学者对一维双稳 Langevin 方程的随机共振进行了较为深入的研究<sup>[8,9]</sup>, 而二维双稳 Duffing 方程同样能产生随机共振, 其研究正引起广泛的兴趣, 并取得逐渐深入的研究成果<sup>[10-13]</sup>.

本文在已有的双稳 Duffing 系统随机共振研究成果的基础上, 研究了级联双稳 Duffing 系统的随机共振特性. 研究表明, 在参数条件合适的情况下, 级联双稳 Duffing 系统不仅能实现随机共振, 而且比单级双稳 Duffing 系统具有更好的随机共振输出特性. 为便于应用, 本文进一步研究了级联双稳

Duffing 系统的大参数随机共振, 讨论得出了级联双稳 Duffing 系统随机共振优化的参数条件, 并说明了级联双稳 Duffing 系统的级数对随机共振输出特性的影响. 结果表明, 级联双稳 Duffing 系统参数 (变尺度系数、阻尼比、级数等) 的适当调节, 可得到比单级双稳 Duffing 系统更好的随机共振输出效果. 此外, 级联双稳 Duffing 系统对方波信号具有非常优良的滤波整形特性, 可用于实现含噪方波信号的波形恢复.

## 2 级联双稳 Duffing 系统的随机共振特性

考虑一个在势场中运动的单位布朗粒子<sup>[14]</sup>, 其运动方程为

$$\ddot{x} + k\dot{x} = -\frac{dU(x)}{dx} + s(t) + n(t), \quad (1)$$

其中  $k$  为阻尼比,  $U(x)$  为势函数,  $s(t)$  表示周期驱动力,  $n(t)$  表示强度为  $D$  的高斯白噪声, 且满足  $\langle n(t) \rangle = 0$ ,  $\langle n(t)n(t') \rangle = 2D\delta(t-t')$ . 取势函数  $U(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^4$  表示含两个稳定定态 ( $x = \pm 1$ )

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51275336) 和高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20120032110001) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: leng\_yg@tju.edu.cn

和一个不稳定定态 ( $x = 0$ ) 的非线性双稳势场, 形成被势垒分隔开的两个势阱, 如图 1 所示, 则方程 (1) 又可改写为由周期特征信号  $s(t)$  和噪声信号  $n(t)$  共同驱动的双稳 Duffing 系统 [15]

$$\ddot{x} + k\dot{x} - x + x^3 = s(t) + n(t). \quad (2)$$

方程 (2) 是能够产生随机共振的非线性双稳 Duffing 系统 [16]. 在信号、噪声和系统达到协同作用时, 噪声将产生积极作用, 使一部分噪声能量转移到信号身上, 信号能量得到加强, 系统输出会形成两个势阱间的大范围跃迁运动, 即系统达到随机共振.

现在考虑将多个这样的系统进行串联相连 (级联), 如图 2, 并保持各级系统参数  $k$  一致, 则当系统输入周期特征信号为谐波信号  $A \cos(2\pi f_0 t)$  时, 该级联双稳 Duffing 系统可表示为

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + k\dot{x}_1 - x_1 + x_1^3 &= A \cos(2\pi f_0 t) + n(t), \\ \ddot{x}_2 + k\dot{x}_2 - x_2 + x_2^3 &= x_1, \\ \dots\dots\dots \\ \ddot{x}_n + k\dot{x}_n - x_n + x_n^3 &= x_{n-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

其中  $n \geq 2$  时,  $x_n(t)$  既是上一级双稳 Duffing 系统的输出, 又是该级双稳 Duffing 系统的输入. 我们把方程组 (3) 中第  $i$  个方程所表示的系统称为第  $i$  级

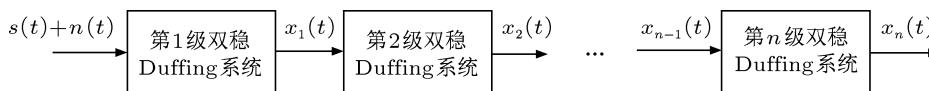


图 2 级联双稳 Duffing 系统

观察图 3, 输入信号  $sn(t)$  中特征信号  $s(t)$  幅值很小, 其频谱特征不太明显. 经过单级双稳 Duffing 系统作用后, 其频谱中  $f = 0.01$  Hz 处的谱峰值 (0.553) 得到明显增大, 容易从频谱中得到识别. 而经过第 2 级双稳 Duffing 系统的作用后, 该谱峰值 (0.731) 得到进一步增大, 特征频率的可识别性也进一步增强. 这说明在参数条件合适的情况下, 级联双稳 Duffing 系统不仅能实现随机共振, 而且能够获得比单级双稳 Duffing 系统更好的随机共振输出特性.

保持图 3 其他参数不变, 改变输入的噪声强度, 对 20000 点数据进行计算, 可以得到第 2 级双稳 Duffing 系统输出在频率  $f = f_0$  处的幅值  $A_m$  随噪声强度  $D$  的变化规律, 如图 4. 图 4 表明, 信号

双稳 Duffing 系统.

以方程组 (3) 为模型研究级联双稳 Duffing 系统的随机共振特性, 取系统参数  $k = 0.5$ , 信号参数  $A = 0.1$ ,  $f_0 = 0.01$  Hz,  $D = 0.4$ , 采样频率  $f_s = 5$  Hz, 此时单级双稳 Duffing 系统的输出达到随机共振, 如图 3(c) 和 (d) 所示, 其中非线性微分方程采用 4 阶 Runge-Kutta 法进行数值求解, 计算点数  $N = 4096$ , 输出频谱平均 10 次 (以下同). 若将单级双稳 Duffing 系统的输出  $x_1(t)$  输入到第 2 级双稳 Duffing 系统中, 可得到第 2 级双稳 Duffing 系统的输出  $x_2(t)$ , 其波形图和频谱图如图 3(e) 和 (f) 所示. 作为对比, 原始输入信号  $sn(t) = s(t) + n(t)$  的波形图和频谱图显示在图 3(a) 和 (b) 中.

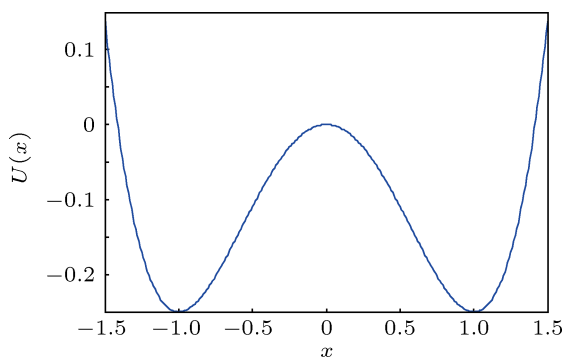


图 1 双稳 Duffing 系统的势函数

经过 Duffing 系统处理后, 特征信号频率处的谱峰值随噪声强度  $D$  的增加呈现先增后减的规律, 并在某一噪声强度时达到最优, 这是典型的随机共振特征.

### 3 讨论

上节以一组参数说明了级联双稳 Duffing 系统所具有的随机共振特性, 下面对其进一步研究和讨论.

#### 3.1 级联双稳 Duffing 系统的大参数随机共振

基于绝热近似理论 [17] 的随机共振仅适用于小

参数条件 (信号幅值、频率和噪声强度均很小), 而实际工程信号往往不满足小参数条件, 此时绝热近似理论已不适应实际工程需要. 对于大幅值  $A$ , 通常只需要做一个简单的线性变换即可使其符合小参数条件. 文献 [16] 以单级双稳 Duffing 系统为模型, 对信号频率  $f_0$  和噪声强度  $D$  为大参数的情况进行了研究. 对于信号频率  $f_0$  为大参数的情况, 引入变尺度系数  $R$ , 采用变尺度 (或二次采样)<sup>[18-20]</sup> 的方法, 先对输入信号进行频率/时间尺度变换, 经过尺度  $R$  变换之后的信号输入双稳 Duffing 系统进行处

理, 可使系统实现随机共振, 获取特征频率值, 之后再按尺度  $R$  进行信号的还原恢复即可得到实际信号的特征频率值; 对于噪声强度  $D$  为大参数的情况, 可适当增大阻尼比参数  $k$  的取值, 使双稳 Duffing 系统能够实现随机共振的最优噪声值也随之增大, 从而实现一定大噪声强度参数下双稳 Duffing 系统的随机共振; 而对于信号频率  $f_0$  和噪声强度  $D$  同为大参数的情况, 只需同时进行频率/时间尺度变换和阻尼比参数  $k$  的调整, 亦可实现随机共振<sup>[16]</sup>.

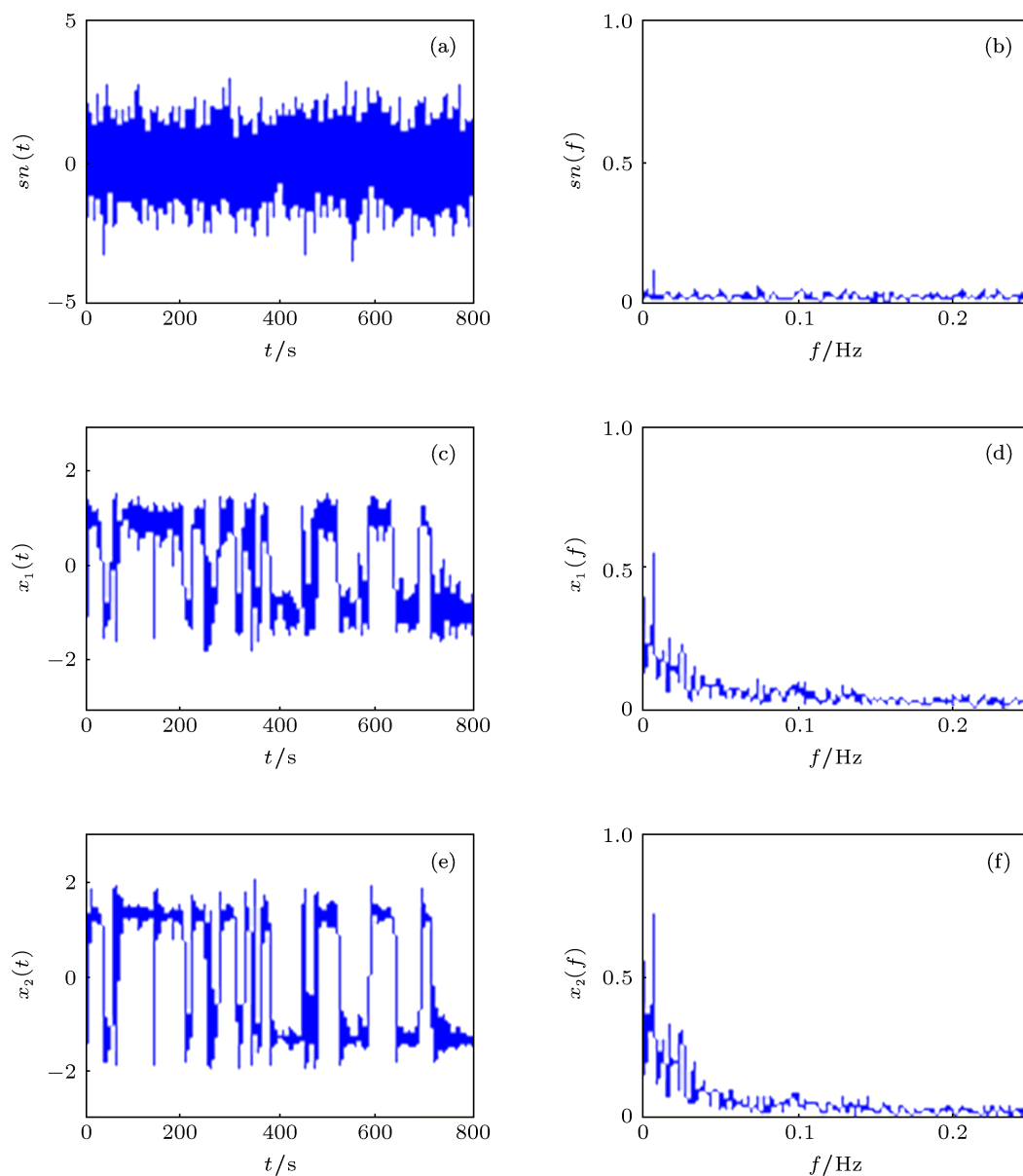


图3 级联双稳 Duffing 系统的随机共振 (a) 输入信号波形图; (b) 输入信号频谱图; (c) 第 1 级双稳 Duffing 系统输出波形图; (d) 第 1 级双稳 Duffing 系统输出频谱图; (e) 第 2 级双稳 Duffing 系统输出波形图; (f) 第 2 级双稳 Duffing 系统输出频谱图

对于级联双稳 Duffing 系统, 大参数输入信号的随机共振依然可以通过上述调节方法实现. 在方程组 (3) 中, 取信号参数  $A = 0.1$ ,  $f_0 = 40$  Hz,  $D = 5$ , 采样频率  $f_s = 20000$  Hz, 其波形和频谱如图 5(a) 和 (b) 所示. 可以看出, 由于信号幅值小而噪声强度大, 频率  $f = 40$  Hz 的信号频谱淹没在强噪声背景中而不能识别. 为了从强背景噪声中提取出特征信号的频率信息, 首先令尺度变换系数  $R = 1$ , 阻尼比  $k = 0.5$ , 计算得到级联双稳 Duffing 系统第 2 级的输出波形和频谱, 如图 5(c) 和 (d) 所示 (注: 为看清频谱结构, 图 5(d) 的幅值取为其对数值, 单位是 dB). 由于信号频率  $f_0 = 40$  Hz 已远大于绝热近似理论要求的小频率参数条件, 而且噪声强度  $D = 5$  亦远超出 Duffing 系统产生随机共振的最优噪声强度值, 因此其输出频谱中  $f = 40$  Hz 处看不到明显的谱峰值特征. 此时, 将尺度变换系数设为  $R = 4000$ , 对应的二次采样频率  $f_{sr} = f_s/R = 5$  Hz, 将阻尼比设为  $k = 2.5$ , 再次计算得到第 2 级双稳 Duffing 系统的输出波形和频谱如图 5(e) 和 (f), 从输出频谱中  $f = 0.01$  Hz 处能够看到非常明显的信号谱峰, 经过频率反变换得到特征信号的频率为  $f' = f \times R = 40$  Hz, 这正是原微弱特征信号  $s(t)$  的频率. 因此, 可以选择合适的变尺度系数  $R$  和阻尼比参数  $k$ , 通过频率/时间尺度变换和阻尼比参数调节的方法, 实现级联双稳 Duffing 系统的大参数随机共振.

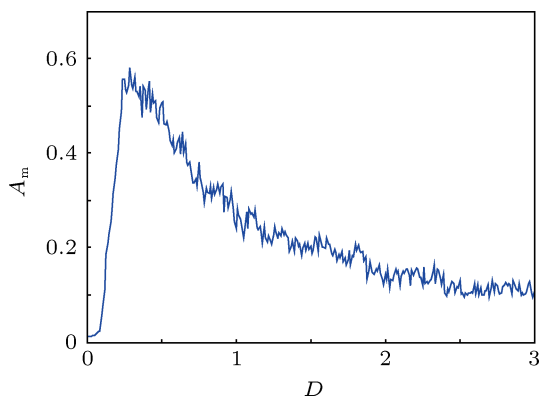


图 4 第 2 级级联双稳 Duffing 系统输出特征信号谱峰值随输入噪声强度的变化规律

### 3.2 级联双稳 Duffing 系统随机共振优化实现的参数条件

由 3.1 节的分析已经知道, 如果输入信号  $sn(t)$  的幅值  $A$ 、频率  $f_0$  和噪声强度  $D$  不满足级联双稳 Duffing 系统实现随机共振的参数条件, 则可通过线

性压缩/放大、频率/时间尺度变换和阻尼比参数调节等方法使其实现随机共振. 因此, 本小节不讨论级联双稳 Duffing 系统随机共振实现的具体参数条件, 而是讨论级联双稳 Duffing 系统能够获得比单级双稳 Duffing 系统更好的随机共振输出效果的参数调节规律, 即对单级双稳 Duffing 系统的随机共振实现优化, 这一点有着重要的实际意义. 因此, 我们通过改变参数来进一步数值研究这一问题.

首先考察信号频率  $f_0$  对级联双稳 Duffing 系统输出的影响. 在方程组 (3) 中, 取  $k = 0.5$ ,  $A = 0.1$ , 噪声强度分别取  $D = 0.4$  和  $D = 0.8$ , 并将特征信号频率  $f_0$  从 0.005 增大到 0.05, 令采样频率  $f_s = 500f_0$ , 计算点数  $N = 20000$ . 对方程组 (3) 进行数值计算, 得到第 1 级和第 2 级级联双稳 Duffing 系统输出频谱中频率  $f_0$  处的谱峰值  $A_m$ , 绘出其谱峰高度  $A_m$  随信号频率  $f_0$  变化的  $A_m$ - $f_0$  关系曲线, 如图 6(a) 和 (b) 所示. 由图 6(a) 和 (b) 看到, 对于任意噪声强度  $D$ , 两条曲线随  $f_0$  的增大在某个低频  $f'_0$  处相交, 在相交前第 2 级双稳 Duffing 系统的输出特征信号谱高大于第 1 级的, 而相交后第 2 级双稳 Duffing 系统的输出特征信号谱高小于第 1 级的, 且比第 1 级的谱高衰减迅速. 这种现象表明, 级联双稳 Duffing 系统并非总像图 3 那样能够提高单级双稳 Duffing 系统输出信号频率  $f_0$  处的谱高, 无论第 1 级双稳 Duffing 系统的输出是否达到随机共振, 第 2 级双稳系统都将在有限的低频范围 ( $f_0 < f'_0$ ) 内来增强  $f_0$  处的谱高, 此低频范围取决于噪声强度  $D$ ,  $D$  大,  $f'_0$  也大, 于是可增强  $f_0$  处谱高的低频范围就宽一些.

从以上规律可以得到级联双稳 Duffing 系统随机共振优化实现的参数条件之一, 即不管噪声强度为多少, 第 1 级双稳 Duffing 系统是否达到随机共振, 总会存在一低频范围, 当特征信号频率  $f_0$  通过频率/时间变换的变尺度方法压缩至该低频范围之内时, 就可以使级联双稳 Duffing 系统的输出特征信号谱高优于单级双稳 Duffing 系统的输出谱高, 实现优化.

其次考察噪声强度  $D$  对级联双稳 Duffing 系统输出的影响. 由图 6(b) 与 (a) 比较可以看出, 由于噪声强度增大, 相同参数条件下级联双稳 Duffing 系统输出频谱中特征信号的谱峰值已经明显减小. 此时, 保持其他参数不变, 仅改变方程组 (3) 中阻尼比  $k$  的取值, 使其增大为  $k = 0.8$ , 同样绘出第 1 级和第 2 级级联双稳 Duffing 系统输出频谱中频率  $f_0$  处的谱峰值  $A_m$  随信号频率  $f_0$  变化的  $A_m$ - $f_0$  关系曲线, 如图 6(c). 对比图 6(b) 和 (c), 在噪声强度  $D$  大于最

优噪声强度的条件下, 增大阻尼比  $k$  值虽然减小了第 2 级双稳 Duffing 系统随机共振实现优化的低频范围 (即  $f'_0$  减小), 但在该低频范围内, 通过增大阻尼比  $k$  的取值, 可以大大提高第 2 级双稳 Duffing 系统的输出信号谱峰.

由以上分析可以得到级联双稳 Duffing 系统随机共振优化实现的参数条件之二, 即特征信号频率  $f_0$  在合适的低频范围内时, 通过调整阻尼比  $k$  的取值, 适应不同的噪声强度  $D$ , 可以对级联双稳 Duffing 系统的随机共振实现进一步的优化.

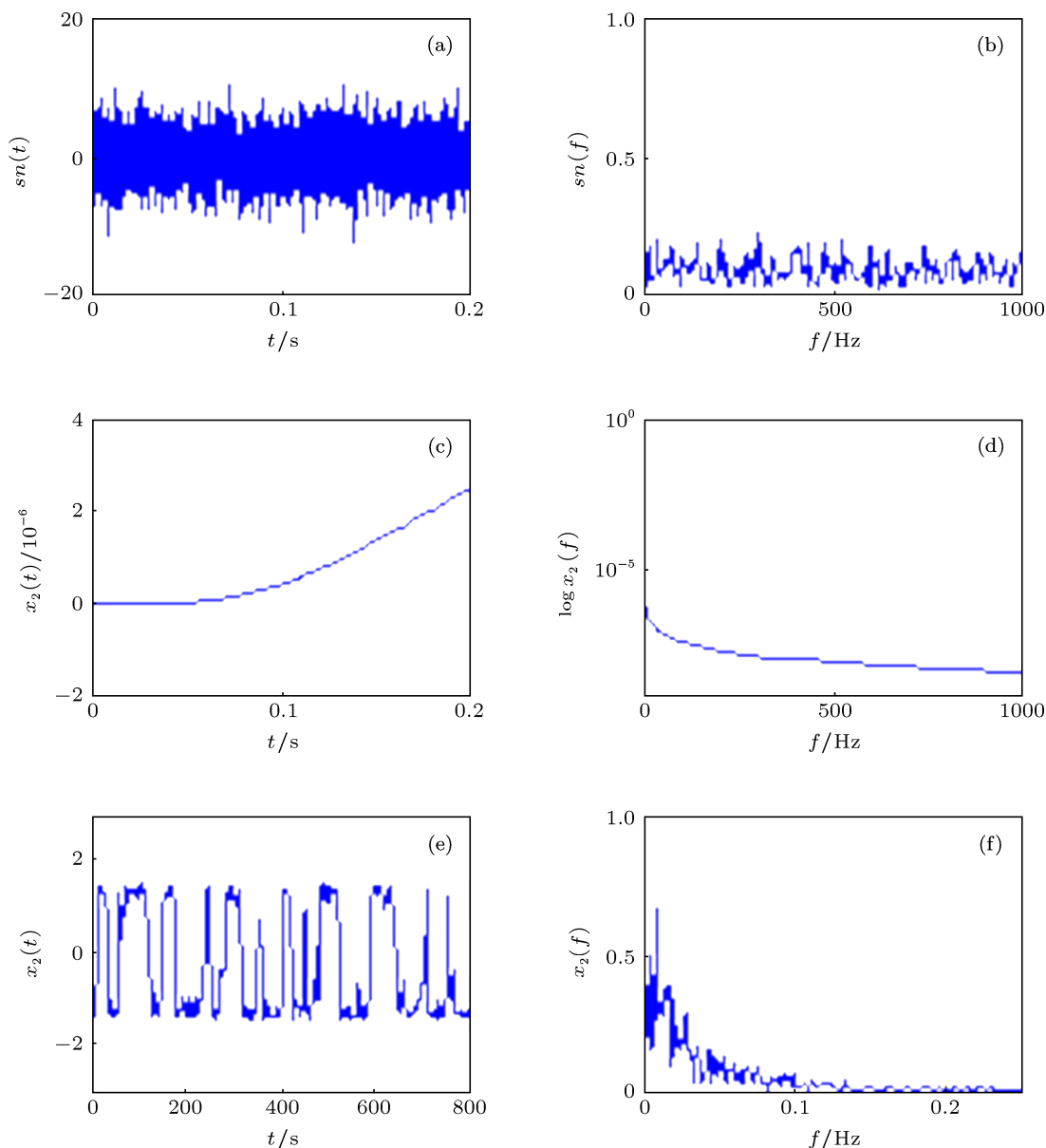


图 5 级联双稳 Duffing 系统的大参数随机共振 (a) 大参数输入信号的波形图; (b) 大参数输入信号的频谱图; (c) 第 2 级双稳 Duffing 系统的输出波形图; (d) 第 2 级双稳 Duffing 系统的输出对数频谱图; (e) 尺度变换和参数调节的第 2 级双稳 Duffing 系统输出波形图; (f) 尺度变换和参数调节的第 2 级双稳 Duffing 系统输出频谱图

### 3.3 级联双稳 Duffing 系统的级数对随机共振输出特性的影响

在之前的讨论中, 都是以两级双稳 Duffing 系统为例对级联双稳 Duffing 系统的随机共振特性进行分析. 而实际上, 级联双稳 Duffing 系统的级数对

随机共振的输出特性也有一定影响. 在方程组 (3) 中, 取 10 级双稳 Duffing 系统进行仿真说明. 分别取  $k = 0.5, D = 0.4$  和  $k = 2.5, D = 5$  两组数值, 其他参数同图 3, 此时第 1 级双稳 Duffing 系统达到随机共振. 计算方程组 (3) 中第  $i$  级双稳 Duffing 系统输出频率  $f = 0.01$  Hz 处的谱峰值, 绘于图 7

中, 其中第 0 级 ( $i = 0$ ) 的纵坐标值表示原输入信号  $f = 0.01 \text{ Hz}$  处的谱峰值.

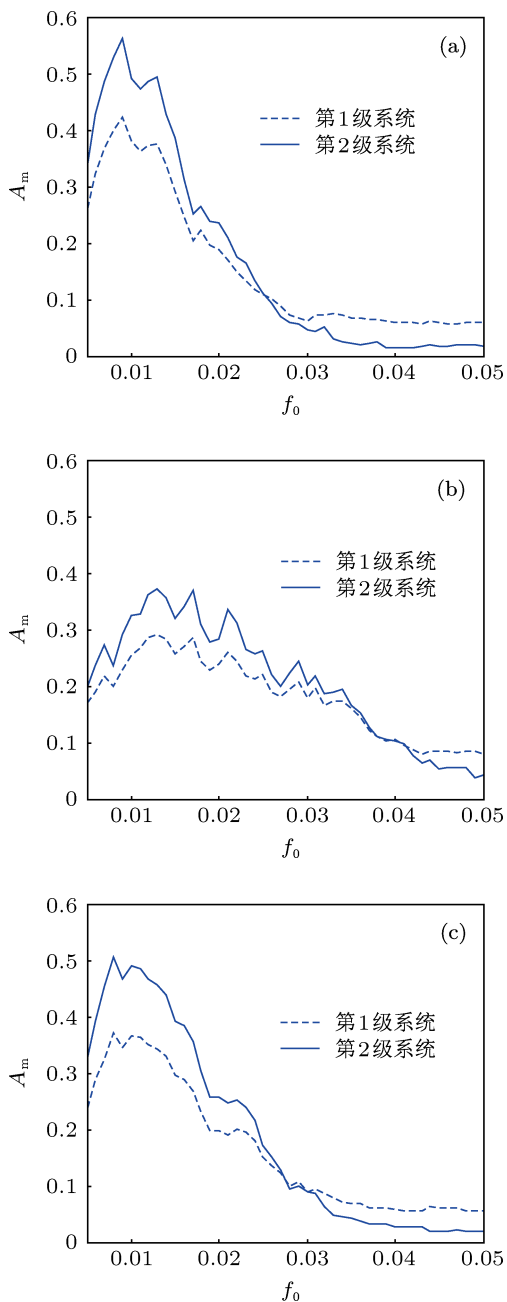


图 6 不同噪声强度下, 级联双稳 Duffing 系统的输出特征信号谱高  $A_m$  与信号频率  $f_0$  的关系 (a)  $k = 0.5, D = 0.4$ ; (b)  $k = 0.5, D = 0.8$ ; (c)  $k = 0.8, D = 0.8$

从图 7 可以看出, 级联双稳 Duffing 系统的级数  $i$  对系统输出信号频率  $f = f_0$  处谱峰值有较为显著的影响. 当第 1 级双稳 Duffing 系统的输出达到随机共振时, 在级数  $i$  较小时, 该谱峰值会随着级数  $i$  的增大迅速提高; 之后谱峰值保持较为平稳的状态, 即随着级数  $i$  的增大, 该谱峰值没有发生大的波动, 并且在某一级系统输出达到最大值之后呈现缓

慢下降的趋势. 这一规律可以从级联双稳 Duffing 系统对噪声分布影响的角度进行说明. 在方程组 (3) 中, 高斯白噪声  $n(t)$  输入第 1 级双稳 Duffing 系统, 得到洛伦兹形式的色噪声输出, 这意味着噪声中的高频成分转移给低频的信号, 从而使低频的信号得到加强, 实现随机共振. 在之后的级联双稳 Duffing 系统中, 这一洛伦兹形式的色噪声继续发生高频成分向低频成分转移的变化, 使得低频的信号谱峰继续提高. 直到某一级双稳 Duffing 系统之后, 由于信号中高频成分已经很少, 因此级联双稳 Duffing 系统级数的再增加也很少将高频能量转移到低频区域, 当然信号谱峰也就不再提高, 甚至会稍微减小.

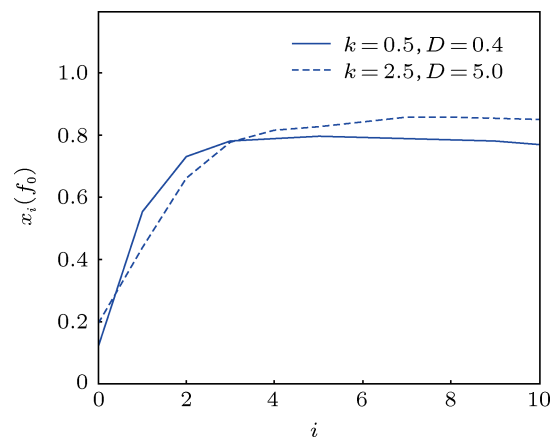


图 7 级联双稳 Duffing 系统输出信号频率  $f = f_0$  处谱峰值与级数  $i$  的关系

### 3.4 级联双稳 Duffing 对方波信号的滤波整形特性

级联双稳 Duffing 系统的另一重要特性, 是它对时域信号波形的滤波整形作用. 从图 3(c) 和 (e) 可以看出, 第 2 级双稳 Duffing 系统的输出与第 1 级双稳 Duffing 系统的输出保持了波形轮廓的一致, 所不同的是图 3(e) 中高频小幅毛刺得到滤除, 系统输出波形更光滑. 换句话说, 第 2 级双稳 Duffing 系统通过非线性滤波对第 1 级双稳 Duffing 系统的输出波形从外观上进一步整形, 进一步突出了第 1 级输出波形的基本轮廓. 这表明, 级联双稳 Duffing 系统具有波形滤波和整形的特性. 此外, 从图 3(c) 和 (e) 及图 5(e) 可知, 由于双稳 Duffing 系统的输出信号存在瞬态跃迁特性, 而这一点与方波信号的时域特性很类似, 因此可以利用级联双稳 Duffing 系统的滤波整形特性对含噪方波信号进行处理.

假设一幅值为 1, 周期为  $T = 200s$ , 占空比为

50%的周期方波信号  $x(t)$ , 利用傅里叶级数展开该方波信号可以改写成

$$x(t) = \frac{4}{\pi} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(2n\pi ft) \right), \quad (4)$$

其中  $f = 1/T$ ,  $n = 1, 3, 5, \dots$ . 将该方波信号与噪声强度  $D = 0.4$  的高斯白噪声相混合并输入方程组 (3) 所示的级联双稳 Duffing 系统中, 令阻尼比  $k = 0.5$ , 采样频率  $f_s = 5 \text{ Hz}$ , 计算点数  $N = 4096$ , 计算得到前两级双稳 Duffing 系统的输出波形如图 8(c) 和 (d) 所示. 图 8(a) 和 (b) 分别表示该方波信号和混合信号的波形. 从图 8(c) 可以看出, 第 1 级双稳 Duffing 系统能够非线性滤除混合信号中的噪声成分, 其输出是以方波基频成分为主的信号波形. 而第 2 级双稳 Duffing 系统能够对该波形进一步去掉毛刺整形, 使波形更光滑, 如图 8(d). 这说明级联双稳 Duffing 系统对噪声中的方波信号有非常好的波形恢复作用, 能够通过非线性滤波和整形光滑作用获得方波的轮廓和周期特征. 需要说明的是, 级联双稳 Duffing 系统的级数不能太多, 因为随着级数的增大, 后一级双稳 Duffing 系统的整形光滑作

用变得有限, 而且输出波形会因为系统级数的增加而产生延迟, 反而不利于方波信号波形的恢复.

图 8 分析了小噪声强度级联双稳 Duffing 系统对周期方波信号的滤波和整形特性, 为进一步研究级联 Duffing 系统在强噪声下对方波的滤波整形特征, 下面分析一个强背景噪声下非周期方波信号的识别例子. 图 9(a) 表示一幅值为 1 的非周期方波信号  $x(t)$ , 混有噪声强度  $D = 2.5$  的高斯白噪声信号如图 9(b), 图中已经完全不能识别出原方波信号. 将该混合信号输入方程组 (3) 表示的级联双稳 Duffing 系统, 根据大噪声参数情况调整阻尼比  $k = 2$ , 令采样频率  $f_s = 5 \text{ Hz}$ , 计算点数  $N = 4096$ , 计算得到前两级双稳 Duffing 系统的输出波形如图 9(c) 和 (d) 所示. 由图可知, 第 1 级双稳 Duffing 系统从强噪声中提取出了方波信号的大致轮廓, 第 2 级双稳 Duffing 系统对其进一步整形光滑, 输出波形轮廓已经非常接近输入的非周期方波信号. 这个仿真实例证明级联双稳 Duffing 系统的滤波整形作用对大噪声非周期方波信号同样存在.

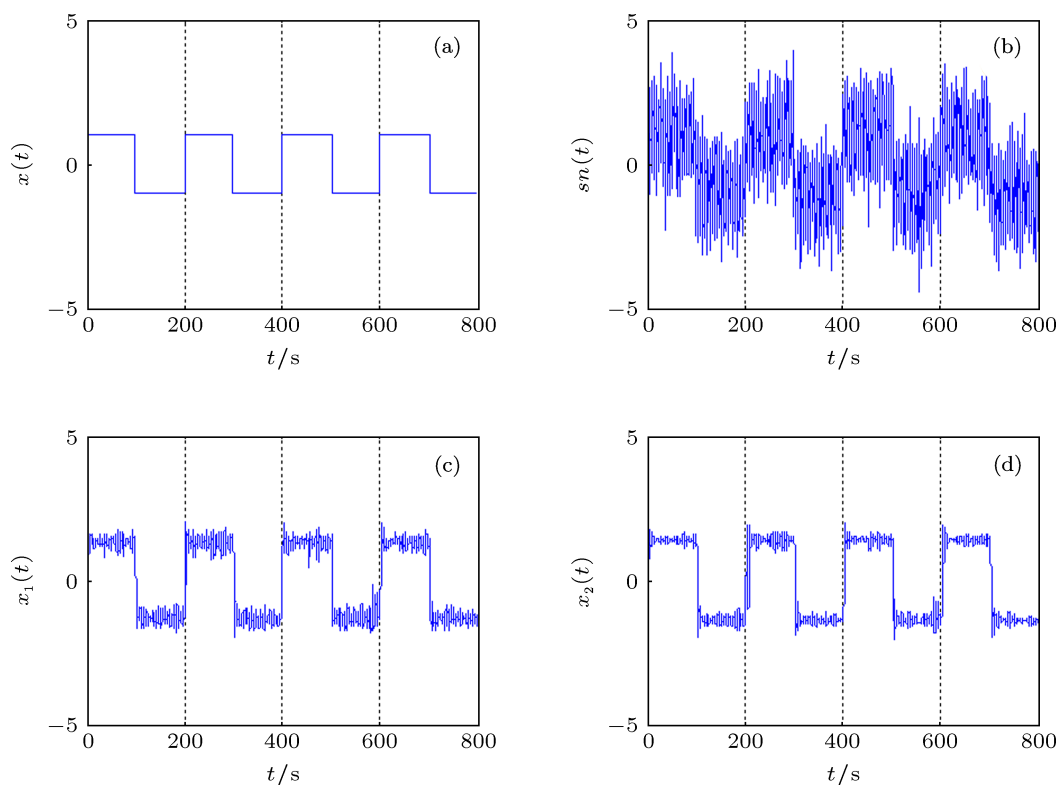


图 8 级联双稳 Duffing 系统对小噪声周期方波信号的滤波整形作用 (a) 方波信号波形图; (b) 混合信号波形图; (c) 第 1 级双稳 Duffing 系统输出波形图; (d) 第 2 级双稳 Duffing 系统输出波形图

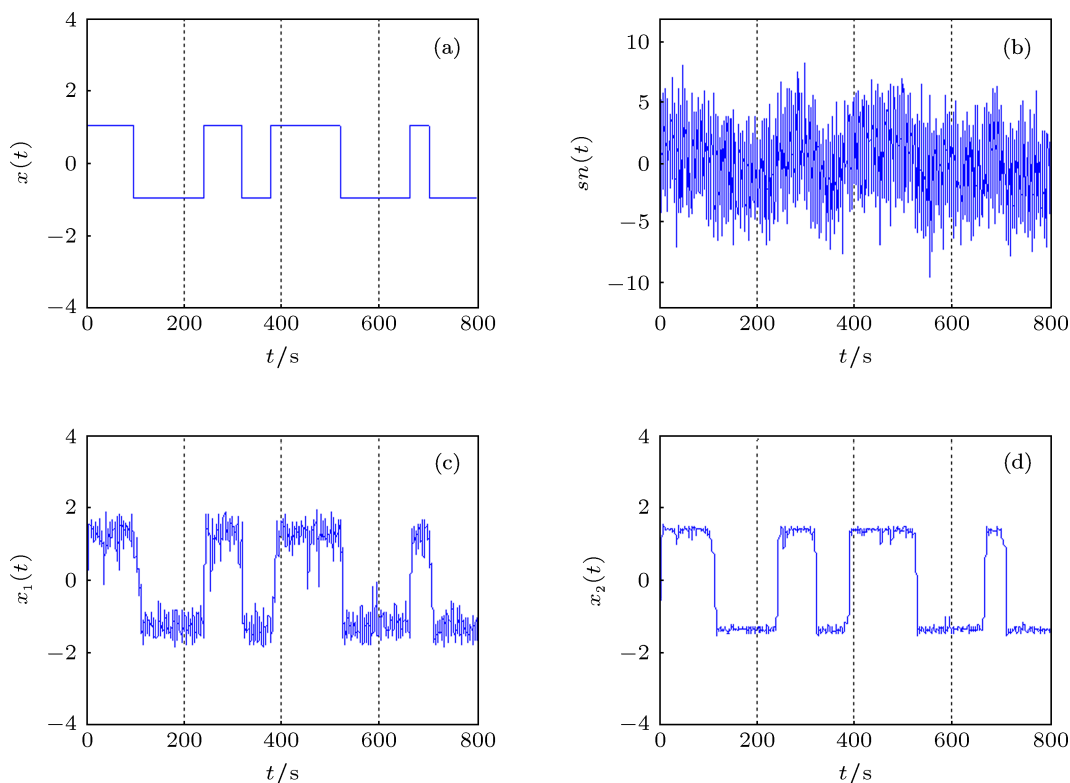


图9 级联双稳 Duffing 系统对大噪声非周期方波信号的滤波整形作用 (a) 方波信号波形图; (b) 混合信号波形图; (c) 第 1 级双稳 Duffing 系统输出波形图; (d) 第 2 级双稳 Duffing 系统输出波形图

## 4 结论

本文研究了级联双稳 Duffing 系统的随机共振特性,发现在合适的参数条件下,级联双稳 Duffing 系统不仅能实现大/小参数的随机共振,而且比单级双稳 Duffing 系统具有更好的随机共振输出特性.级联双稳 Duffing 系统通过参数(变尺度系数、阻尼比、级数等)调节,能够实现单级双稳 Duffing 系

统随机共振的优化,为将级联双稳 Duffing 系统应用于微弱信号检测,以及优化单级双稳 Duffing 系统的微弱信号检测效果提供了理论依据和潜在可能.同时,级联双稳 Duffing 系统对方波信号具有良好的滤波整形作用,能够恢复噪声中的微弱方波信号,为扩展级联双稳 Duffing 系统的实际信息处理应用提供了依据.

- [1] Beniz R, Sutura A, Vulplana 1981 *Phys. A* **14** 453
- [2] Benzi R, Parisi G, Sruetera A, Vulpiana A 1982 *Tellus* **34** 11
- [3] Fauve S, Heslot F 1983 *Phys. Lett.* **97A** 5
- [4] McNamara B, Wiesenfeld K, Roy R 1988 *Phys. Rev. Lett.* **60** 2625
- [5] Hu G 1992 *Chin. Phys. Lett.* **9** 69
- [6] Nicolis C, Nicolis G, Frisch H L 1998 *Phys. Lett. A* **249** 443
- [7] Gong Y F 1998 *Phys. Lett. A* **243** 351
- [8] Gammaitoni L, Hanggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rew. Mod. Phys.* **70** 223
- [9] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y, Wang W J, Hu S G 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1118 (in Chinese) [冷永刚, 王太勇, 郭焱, 汪文津, 胡世广 2005 物理学报 **54** 1118]
- [10] Wang F Z, Wen X D, Li R, Qin G R 1996 *Jour. Beijing Normal Uni. (Nature Science)* **32** 47 (in Chinese) [王辅忠, 温孝东, 李蓉, 秦光戎 1996 北京师范大学学报(自然科学版) **32** 47]
- [11] Lai Z H, Leng Y G, Sun J Q, Fan S B 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 050503 (in Chinese) [赖志慧, 冷永刚, 孙建桥, 范胜波 2012 物理学报 **61** 050503]
- [12] Kang Y M, Xu J X, Xie Y 2004 *Acta Mech. Sin.* **36** 247 (in Chinese) [康艳梅, 徐健学, 谢勇 2004 力学学报 **36** 247]
- [13] Zhang G J, Xu J X, Yao H 2006 *Acta Mech. Sin.* **38** 283 (in Chinese) [张广军, 徐健学, 姚宏 2006 力学学报 **38** 283]
- [14] Karatzas I Shreve S E 1991 *Brownian Motion and Stochastic Calculus* (2nd ed) (Berlin: Springer Press)
- [15] Holmes P 1979 *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A London, United Kingdom*, October 23, 1979 **292(1394)** p419
- [16] Leng Y G, Lai Z H, Fan S B, Gao Y J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230502 (in Chinese) [冷永刚, 赖志慧, 范胜波, 高毓璣 2012 物理学报 **61** 230502]
- [17] Hu G 1994 *Stochastic Forces and Nonlinear System* (Shanghai: Shanghai Science & Technology Education Press) pp222-229 (in Chinese)



- [胡岗 1994 随机力与非线性系统 (上海: 上海科技教育出版社) 第 222—第 229 页]
- [18] Leng Y G, Leng Y S, Guo Y 2006 *Journal of Sound and Vibration* **292** 788
- [19] Leng Y G 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020503 (in Chinese) [冷永刚 2011 物理学报 **60** 020503]
- [20] Leng Y G, Wang T Y 2007 *Mechanical Systems and Signal Processing* **21** 138

# Stochastic resonance of cascaded bistable duffing system\*

Lai Zhi-Hui<sup>1)</sup> Leng Yong-Gang<sup>1)2)3)†</sup> Fan Sheng-Bo<sup>1)</sup>

1) (*School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

2) (*Key Laboratory of Mechanism Theory and Equipment Design of Ministry of Education, Tianjin University, Tianjin 300072, China*)

3) (*Tianjin Key Laboratory of Nonlinear Dynamics and Chaos Control, Tianjin 300072, China*)

( Received 31 October 2012; revised manuscript received 15 December 2012 )

## Abstract

The stochastic resonance of cascaded bistable Duffing system (CBDS) has been studied in this paper. We have shown that with the appropriate adjustment of the parameters of the CBDS, such as the scale transformation coefficient, the damping ratio and the number of cascaded systems, the CBDS can not only achieve large or small parameter stochastic resonance, but also optimize the stochastic resonance result of a single bistable Duffing system (SBDS). That is, with the parameter adjustment, the stochastic resonance effect of the CBDS is much better than that of the SBDS. Furthermore, the CBDS has excellent filtering and smoothing characters for a square wave signal, which can be applied to the recovery of the square wave signal masked by heavy noise.

**Keywords:** cascaded bistable Duffing system, stochastic resonance, scale transformation, parameter adjustment

**PACS:** 05.45.-a, 05.40.-a, 02.60.Cb

**DOI:** 10.7498/aps.62.070503

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51275336), and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20120032110001).

† Corresponding author. E-mail: leng\_yg@tju.edu.cn