

基于天线辐射理论构建微波混沌腔的随机耦合模型*

陆希成^{1)†} 王建国¹⁾²⁾ 刘钰¹⁾ 李爽¹⁾ 韩峰¹⁾

1) (西北核技术研究所, 西安 710024)

2) (西安交通大学电信学院, 西安 710049)

(2012年6月19日收到; 2012年11月20日收到修改稿)

为了能够快速有效地求解电大复杂腔体(微波混沌腔)的电磁耦合问题,文中采用统计电磁学方法研究了该类腔体电磁散射的统计特征.首先,根据天线辐射理论,利用电磁场的本征模展开式建立了腔体耦合输入阻抗表达式.其次,利用波动混沌理论和概率统计方法进一步推导出了微波混沌腔的随机耦合模型.该方法简单并且可以直接推导出三维模型.最后,构建了一个三维 Sinai 微波混沌腔并进行数值仿真实验,其仿真实验结果与随机耦合模型计算结果的统计特征基本一致.重要的是,该模型与复杂腔体的细节特征无关,能够快速有效地预测微波混沌腔的敏感耦合问题.

关键词: 统计电磁学, 微波混沌腔, 输入阻抗, 随机耦合模型

PACS: 05.45.Mt, 03.65.Nk, 03.65.Sq, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.62.070504

1 引言

复杂腔体的电磁耦合问题一直都是电磁兼容研究的重点,但对于电大复杂腔体(微波混沌腔),其耦合问题的快速、有效求解方法很少^[1].一方面,电大特征使得普通计算机的数值仿真求解时间很长;另一方面,复杂性特征使得腔体内的电磁波具有确定性混沌现象.这种确定性混沌导致了复杂腔体耦合对初始条件十分敏感^[2],无法确定性地预测耦合结果^[3].由此,可采用统计方法研究这类问题,并逐渐形成了统计电磁学的概念^[4,5].早期,统计电磁学主要集中于研究电大复杂有耗腔体内激励场的统计特征^[6-9].它主要基于电磁场本征模式展开,利用中心极限定理分析场的时空分布及其相关性的统计特征.该方法不能直接得到统计模型中的参数.为此, Hill 建立了功率平衡方法能够粗略估计出腔体的耦合能力,并可求解上述参数^[10].基于上述研究结果, Hill 和 Holland 利用统计方法进一步分析了复杂腔体内短天线和电缆的电磁耦合特征^[4,11].

近年来,随着波动混沌(也称量子混沌)研究的进展^[12-14],马里兰大学研究小组首先利用波混沌理论分析了微波混沌腔的耦合问题^[15-18].他们基于准二维混沌腔,采用二维亥姆霍兹方程推导出了随机耦合模型(random coupling model, RCM),并利用实验方法进行了初步验证.国内闫二艳等人采用实验方法也对该模型进行了验证分析^[19].RCM不但可用于分析电小端口,也可用于分析电大端口或多模端口^[20].Gradoni 等利用该模型分析了弱耦合混响室内电磁场的振荡特征^[21].此外,RCM还可拓展到求解时域脉冲波的耦合问题^[22-25].在考虑到有限长度短周期轨道对系统统计特征的影响情况下,RCM能够提高耦合统计特征的分析能力.除了采用亥姆霍兹方程推导 RCM 之外,还可采用天线辐射理论直接推导出三维腔体的耦合模型.在这方面, Li 首先利用该方法建立了圆柱形腔体矩形窄缝耦合的输入阻抗模型^[26].对于复杂腔体,Warne 基于该方法利用电磁场的统计模型分析了线性天线阻抗的统计特征^[27].本文将基于天线辐射理论,采用波混沌和概率统计方法推导三维微波混沌腔的 RCM,并构建一个三维 Sinai 混沌腔,利用仿真

* 国家自然科学基金(批准号: 61231003)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: luxcheng@yahoo.com.cn

方法分析其输入阻抗的统计特征.

2 随机耦合模型

假设微波混沌腔耦合端口上的电流密度 \mathbf{J} 满足正弦时谐变化, 根据阻抗的场定义 [28], 在电场 \mathbf{E} 作用下该端口的输入阻抗 Z_{in} 可表示为

$$Z_{in} = \frac{1}{|I_0|^2} \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}^* dV, \quad (1)$$

式中, I_0 为输入端峰值电流; * 表示复数共轭. 在时谐条件下, 腔体内激励的电场可表示为,

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & -\nabla\varphi - i \frac{\omega}{\varepsilon V} \sum_n \frac{\omega^2/\omega_n^2}{\omega^2(1+i/Q) - \omega_n^2} \\ & \times \mathbf{u}_n \int_V \mathbf{u}_n \mathbf{J}^* dV, \end{aligned} \quad (2)$$

式中, ω 为激励频率; Q 为品质因子; ω_n 和 \mathbf{u}_n 分别为本征频率和本征函数; ε 为腔体内介质的介电常数; V 腔体体积; φ 为密度电荷引起的标量势函数, 满足泊松方程. 由此, 输入阻抗可进一步表示为

$$\begin{aligned} Z_{in} = & \frac{1}{I_0^2} \int_V \nabla\varphi \cdot \mathbf{J}^* dV + \frac{i\omega}{\varepsilon V I_0^2} \sum_n \\ & \times \left[\frac{\omega^2/\omega_n^2}{\omega^2(1+i/Q) - \omega_n^2} \left(\int_V \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{J}^* dV \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (3)$$

令该式右端第一部分为

$$Z_{loc} = \frac{1}{I_0^2} \int_V \nabla\varphi \cdot \mathbf{J}^* dV = R_{loc} + iX_{loc}, \quad (4)$$

它是由分布电荷产生的近场所引起, 与端口的形状和材料性质密切相关, 可称为端口阻抗. 根据天线辐射的感应电动势原理可知, R_{loc} 和 X_{loc} 分别表示了端口欧姆损耗电阻及辐射电抗 X_{rad} . (3) 式右端的第二部分可定义为

$$\begin{aligned} Z_{cav} = & \frac{i\omega}{\varepsilon V I_0^2} \sum_n \left[\frac{\omega^2/\omega_n^2}{\omega^2(1+i/Q) - \omega_n^2} \right. \\ & \left. \times \left(\int_V \mathbf{u}_n \cdot \mathbf{J}^* dV \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

该阻抗是由端口附近的分布电场所引起. 它不但与端口的电流分布有关, 而且与腔体的电磁性质密切相关, 也称为腔体阻抗.

根据微波混沌腔的电磁性质, 本征函数 \mathbf{u}_n 的任一笛卡尔分量均服从均值为零、标准差为 $\sqrt{1/3}$ 的正态分布 [29]; 而本征频率的归一化相邻间距服从 Wigner 分布 [30]. 由此, 利用概率统计方法整理得到腔体阻抗的表达式为

$$Z_{cav} \approx R_{rad} \sum_n \left\{ i \frac{\bar{s}}{\pi} \frac{k^2/k_n^2}{k^2(1+i/Q) - k_n^2} w_n^2 \right\}, \quad (6)$$

式中, k 为波数; w_n 为标准正态分布随机变量; \bar{s} 为本征值平方相邻间距的均值; R_{rad} 表达式为

$$R_{rad} = \frac{k^3}{6\pi\varepsilon\omega I_0^2} \left| \int_V \mathbf{J}^* dV \right|^2. \quad (7)$$

根据天线辐射理论可知, R_{rad} 为端口在自由空间中的辐射电阻.

由于辐射电阻只反映了端口自身的电磁性质, 因此可利用辐射电阻 R_{rad} 对腔体阻抗 Z_{cav} 进行归一化, 则得到的归一化阻抗 z 只与腔体的电磁性质有关. 其表达式进一步整理可得

$$z = \frac{Z_{cav}}{R_{rad}} = \sum_n i \frac{1}{\pi \sum_{i=1}^n s_i + i\alpha} w_n^2, \quad (8)$$

式中, s_i 为本征值平方的归一化相邻间距. 在三维情况下, α 可表示为

$$\alpha = \frac{\pi k^2}{\bar{s}Q} = \frac{k^3 V}{2\pi Q} \approx \frac{(\pi\omega)/(2Q)}{\langle \omega_{n+1} - \omega_n \rangle}. \quad (9)$$

由此可见, α 与品质因子 Q 密切相关, 可称为腔体损耗参数. 文献 [15] 详细分析了不同损耗参数 α 下归一化阻抗的统计特征. 对于准二维腔体, 其损耗参数 α 可表示为

$$\alpha = \frac{\pi k^2}{\bar{s}Q} = \frac{k^2 A}{4Q}, \quad (10)$$

式中, A 表示了二维腔体的面积.

由 (9) 式和 (10) 式可知, 腔体损耗参数是一个无量纲的物理量, 通常也称为比模式密度 [8]. 它的分子 $(\pi\omega)/(2Q)$ 表示了频率 ω 下腔体内激励电磁场的带宽, 而分母 $\langle \omega_{n+1} - \omega_n \rangle$ 则表示了在频率 ω 附近相邻本征频率的平均间距. 显然, 如果 α 远大于 1, 则腔体内激励的频率带宽就远大于本征频率相邻间距的均值. 也就是说, 腔体内可能会激励起大量的本征模式. 这种情况下的微波腔体通常称为过模腔. 它正是早期人们研究复杂腔体内电磁场统计特征的基础.

通过上述分析, 微波混沌腔的输入阻抗 Z_{in} 可表示为

$$Z_{in} = R_{loc} + iX_{rad} + zR_{rad}, \quad (11)$$

式中右端第一项的端口欧姆电阻通常很小, 可以忽略. 此时, 输入阻抗的计算只需要两个参量: 辐射阻抗 Z_{rad} 和归一化阻抗 z . 其中, 辐射阻抗可以通过数值模拟或实验获得. 归一化阻抗需要腔体体积 V 、耦合波波数 k 和品质因子 Q , 采用随机矩阵方法求解 [31]. 由于归一化阻抗具有一般性特征, 因此随机耦合模型也具有一般性.

根据归一化阻抗的统计分析可知^[15], 当 $\alpha < 1$ 时, 腔体的输入电阻和输入电抗均服从正态分布. 其中, 输入电阻的均值 $\mu_r = R_{\text{rad}} + R_{\text{loc}}$, 标准差 $\sigma_r = R_{\text{rad}}/\alpha$; 而输入电抗的均值 $\mu_x = X_{\text{rad}}$ 和标准差 $\sigma_x = R_{\text{rad}}/\alpha$. 由此可见, 输入阻抗的均值和方差与腔体损耗参数 α 和端口辐射阻抗密切相关.

3 数值模拟验证

为了验证随机耦合模型的合理性和有效性, 下面将构建一个典型的三维微波混沌腔——Sinai腔^[29,30], 并采用数值方法进行仿真实验. 最后, 将仿真计算结果与随机耦合模型计算结果进行统计比较.

3.1 数值模型

文中构建 Sinai 腔的矩形边尺寸为 $200 \text{ mm} \times 220 \text{ mm} \times 250 \text{ mm}$, 四分之一圆半径为 100 mm , 如图 1 所示. 利用同轴线传输耦合, 其长度为 10 mm 、内半径为 2 mm 、外半径为 4 mm . 同轴线的端口面积相对于腔体表面很小 (小于 0.05%), 能量损耗可忽略不计. 同轴线的内芯和屏蔽层设置为理想导体, 其欧姆损耗电阻等于零. 为了增大耦合效率, 同轴线内芯延长了 30 mm . 为了快速完成计算, 计算频率选择在 $4.4\text{—}4.6 \text{ GHz}$ 范围内, Sinai 腔也近似满足电大条件. 在该频段, 本征模式约为 40 个, 采用数值方法计算 200 个等间隔频率点, 几乎可以覆盖所有谐振点.

文中设置了三种不同电导率的金属作为腔体壁面 (无穷大、 $1.0 \times 10^7 \text{ S/m}$, $1.0 \times 10^6 \text{ S/m}$), 用以分析腔体损耗对耦合的影响. 在 4.5 GHz 条件下, 相应腔体损耗参数 α 分别为 0 , 0.0459 和 0.1450 . 为了统计分析的需要, 可计算不同条件下腔体的输入阻抗. 由此, 在腔体内设置了一个可移动的理想导电圆柱用以改变系统边界形状. 它的半径为 2 mm , 高度为 10 mm , 约占腔体体积的 0.001% , 基本上不影响腔体的模式密度. 在同一损耗条件下, 该圆柱在两个不同位置时, 数值计算得到的输入电阻曲线变化非常剧烈, 如图 2 所示. 因此, 采用统计方法分析这类问题是非常有意义的. 另外, 圆柱体还能够增强 Sinai 腔内电磁波的混沌特征, 更有利于统计

分析.

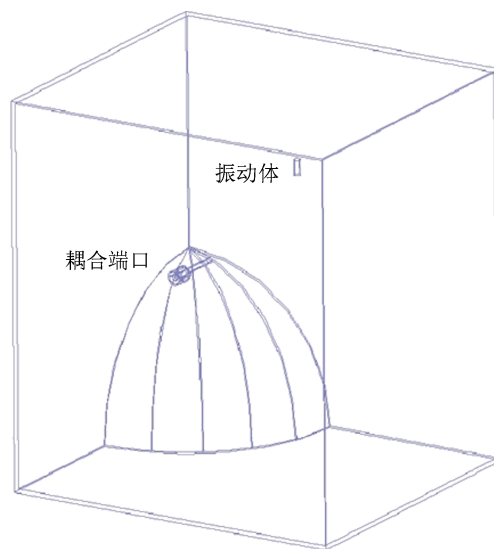


图 1 数值仿真计算的三维 Sinai 腔体模型

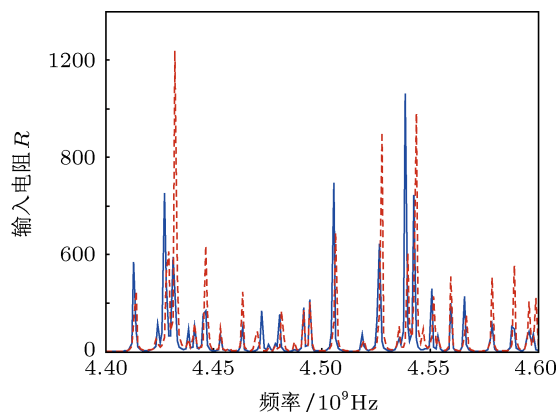


图 2 腔体端口输入电阻的变化特征

3.2 模拟结果分析

为了求解辐射阻抗, 可将腔体边界设置为辐射边界进行模拟. 在 $4.4\text{—}4.6 \text{ GHz}$ 范围内, 数值计算得到端口的辐射电阻为 $73\text{—}88 \Omega$, 辐射电抗为 $-113.5\text{—}115.5 \Omega$. 由于辐射阻抗的相对变化较小, 因此在输入阻抗的统计分析中可忽略它的影响. 对于归一化阻抗, 可利用随机矩阵理论统计模拟计算获得. 然后, 利用 (11) 式可计算得到输入阻抗. 对于不同损耗的腔体, 随机耦合模型计算得到输入阻抗的统计分布如图 3 所示. 由此可见, 它与归一化阻抗的统计分布特征一致^[15], 并且其均值和标准差与理论分析结果也基本相同.

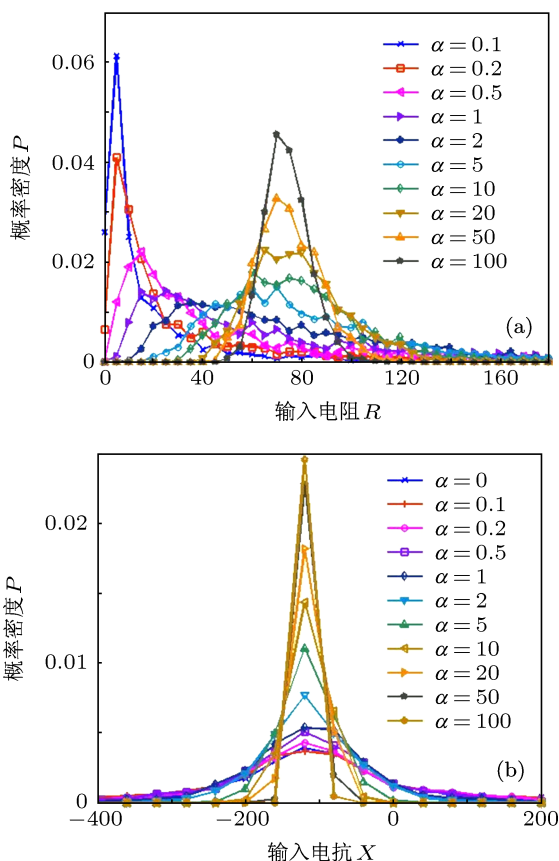


图3 不同损耗条件下腔体端口输入阻抗的统计分布 (a) 输入电阻的统计分布; (b) 输入电抗的统计分布

与数值仿真计算得到输入阻抗的统计分析比较. 其中, 对于无耗腔体, 随机耦合模型预测的输入电阻为零, 与数值仿真结果和理论分析结果一致. 而输入电抗的统计分布曲线也基本一致, 如图4所示.

对于有耗腔体, 图5给出了上述两种方法计算得到壁面电导率为 1.0×10^7 S/m 腔体输入阻抗统计分布的比较. 图6给出了壁面电导率为 1.0×10^6 S/m 腔体输入阻抗统计分布的比较. 由此可见, 随机耦合模型的预测结果与数值计算的结果基本一致. 这反映出随机耦合模型能够有效地描述微波混沌腔的耦合特征, 可用于预测该类腔体的耦合问题.

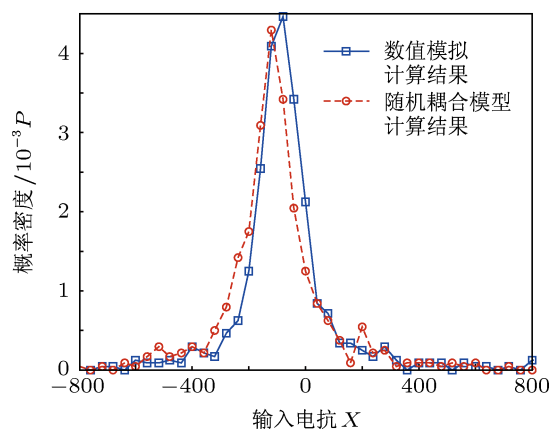


图4 无耗腔体输入电抗的统计分布

对于上述构建的 Sinai 腔模型, 下面给出 RCM

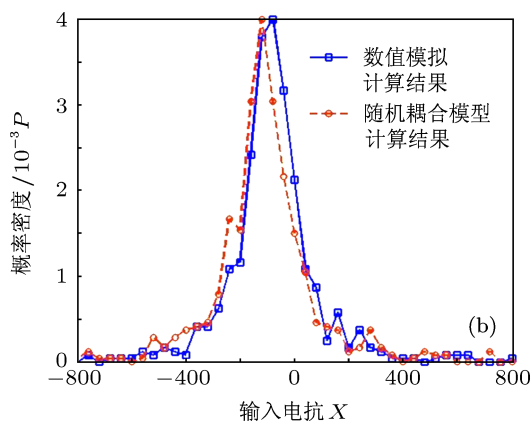
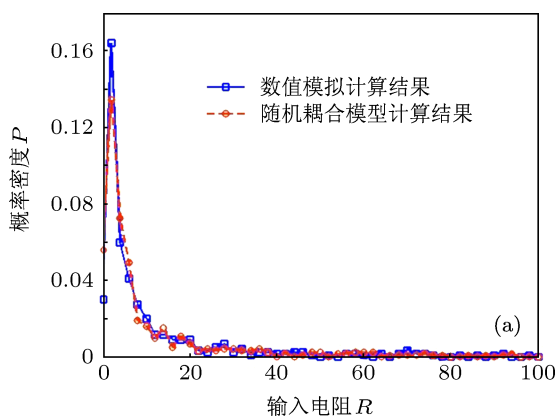


图5 壁面电导率为 1.0×10^7 S/m 时, 腔体端口输入阻抗的统计分布 (a) 输入电阻的统计分布; (b) 输入电抗的统计分布

4 结论

基于天线辐射理论, 利用波动混沌和概率统计方法推导出了微波混沌腔的随机耦合模型. 该方法概念清晰, 可简单方便地直接推导出三维模型. 该模型反映了微波混沌腔内部电磁场的随机分布特征对耦合的影响, 能够有效描述电磁耦合中的敏感

性问题. 由于它与复杂腔体的细节特征无关, 因此它具有一般性. 通过三维微波混沌 Sinai 腔耦合分析, 随机耦合模型的预测结果与数值仿真实验结果基本一致. 因此, 随机耦合模型可较好地用于分析、预测微波混沌腔的耦合问题. 此外, 该模型中的输入参数较少并且能够通过数值模拟或实验方法获得, 具有很强的实际性.

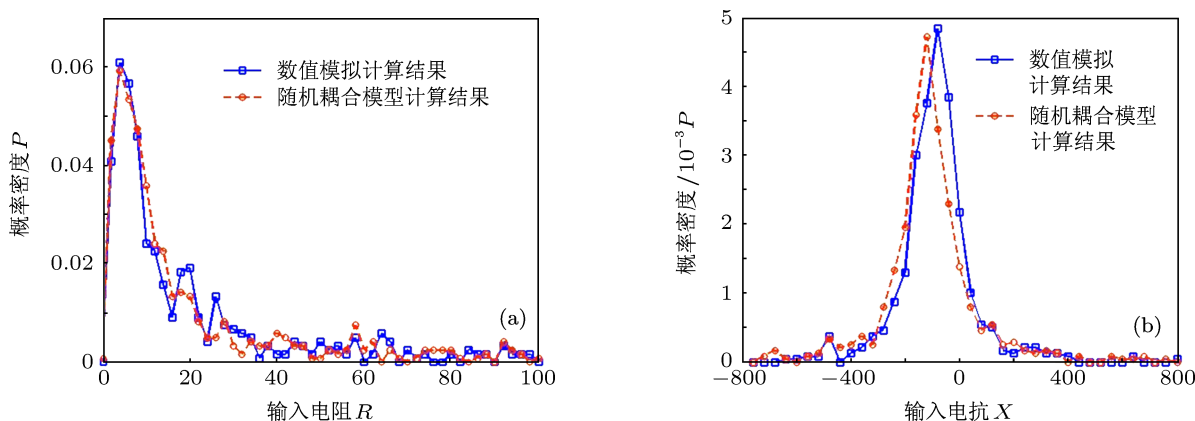


图6 壁面电导率为 1.0×10^6 S/m 时, 腔体端口输入阻抗的统计分布 (a) 输入电阻的统计分布; (b) 输入电抗的统计分布

- [1] Ladbury J M, Lehman T H, Koepke G H 2002 *IEEE International Symposium on Electromagnetic Compatibility*, Minneapolis, Minnesota, August 19–23, 2002 p684
- [2] Jie Q L, Xu G O 1995 *Chin. Phys.* **4** 641
- [3] Hemmady S, Hart J, Zheng X, Antonsen T M, Ott E, Anlage S M 2006 *Phys. Rev. B* **74** 036213
- [4] Holland R, John R 1998 *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility* **40** 311
- [5] Naus H W L 2008 *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility* **50** 316
- [6] Lehman T H 1993 *Interaction Notes*: IN 494
- [7] Kostas J G, Boverie B 1991 *IEEE Trans. On Electromagnetic Compatibility* **33** 366
- [8] Price R H, Davis H T, Wenaas E P 1993 *Phys. Rev. E* **48** 4716
- [9] Hill D A. P 1998 *IEEE Trans. On Electromagnetic Compatibility* **40** 209
- [10] Hill D A, Ma M T, Ondrejka A R, Riddle B F, Crawford M L, Johnk R T 1994 *IEEE Trans. on Electromagnetic Compatibility* **36** 169
- [11] Hill D A 1998 *IEEE Trans. On Electromagnetic Compatibility* **41** 365
- [12] Stöckmann H J 1999 *Quantum Chaos* (New York: Cambridge University Press)
- [13] Lu J, Du M L 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2450 (in Chinese) [陆军, 杜孟利 2004 物理学报 **53** 2450]
- [14] Xu X Y, Gao S, Guo W H, Zhang Y H, Lin S L 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 765
- [15] Zheng X, Antonsen T M, Ott E 2006 *Electromagnetics* **26** 3
- [16] Zheng X, Antonsen T M, Ott E 2006 *Electromagnetics* **26** 27
- [17] Hemmady S, Zheng X, Hart J, Antonsen T M, Ott E, Anlage S M 2006 *Phys. Rev. E* **74** 036213
- [18] Hemmady S, Antonsen T M, Ott E, Anlage S M 2012 *IEEE Trans. On Electromagnetic Compatibility* pp 99
- [19] Yan E Y, Meng F B, Ma H K 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1568 (in Chinese) [闫二艳, 孟凡宝, 马弘舸 2010 物理学报 **59** 1568]
- [20] Antonsen T M, Gradoni G, Anlage S, Ott E 2011 *IEEE EMC Symposium*, Long Beach, CA, August 14–19, 2011
- [21] Gradoni G, Yeh J-H, Antonsen T M, Anlage S, Ott E 2011 *IEEE EMC Symposium*, Long Beach, CA, August 14–19, 2011
- [22] Hart J A, Antonsen T M, Ott E 2009 *Phys. Rev. E* **79** 016208
- [23] Hart J A, Antonsen T M, Ott E 2009 *Phys. Rev. E* **80** 041109
- [24] Yeh J H, Hart J A, Bradshaw E, Antonsen T M, Ott E, Anlage S M 2010 *Phys. Rev. E* **82** 041114
- [25] Yeh J H, Antonsen T M, Ott E, Anlage S M 2012 *Phys. Rev. E* **85** 015202(R)
- [26] Li M Y, Hummer K A, Chang K 1991 *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **39** 1158
- [27] Warne L K, Lee K S H, Hudson H G, Johnson W A, Jorgenson R E, Stronach S L 2003 *IEEE Trans. on Antennas and Propagation* **51** 978
- [28] Jackson J D 1999 *Classical Electrodynamics* (Third Edition)(John Wiley & Sons. Inc.)
- [29] Lu X C, Wang J G, Han F, Liu Y 2011 *High Power Laser and Particle Beams* **23** 2167 (in Chinese) [陆希成, 王建国, 韩峰, 刘钰 2011 强激光与粒子束 **23** 2167]
- [30] Lu X C, Wang J G, Han F, Liu Y 2011 *High Power Laser and Particle Beams* **23** 3367 (in Chinese) [陆希成, 王建国, 韩峰, 刘钰 2011 强激光与粒子束 **23** 3367]
- [31] Mehta M L 2006 *Random Matrices* (Third Edition) (Singapore: Elsevier (Singapore) Pte Ltd)

Based on antenna theory to establish the random coupling model of microwave chaotic cavities*

Lu Xi-Cheng^{1)†} Wang Jian-Guo¹⁾²⁾ Liu Yu¹⁾ Li Shuang¹⁾ Han Feng¹⁾

1) (Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China)

2) (School of Electronic and Information Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, China)

(Received 19 June 2012; revised manuscript received 20 November 2012)

Abstract

To improve the ability of quickly and effectively resolving the coupling of electrically large complex cavities (microwave chaotic cavities), the statistical properties of the scattering from these cavities have been studied by using a statistical electromagnetics method. Firstly, based on the antenna theory, the input impedance expression of cavities is established by using the expanded electromagnetic eigenmode expression. Secondly, the random coupling model (RCM) is introduced from wave chaos theory and statistical method about microwave chaotic cavities. It is simply to use this method to directly obtain the three-dimensional model. Lastly, the three-dimensional Sinai microwave chaotic cavity is designed, and used to carry out the numerical experiment. Their statistical properties obtained are agreed well with one-another between the numerical result and RCM one. Importantly, the RCM, which is a very good method to be able to quickly predict the sensitivity of coupling about the microwave chaotic cavities, is independent of the details of the cavities.

Keywords: statistical electromagnetics, microwave chaotic cavities, input impedance, random coupling model (RCM)

PACS: 05.45.Mt, 03.65.Nk, 03.65.Sq, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.62.070504

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61231003).

† Corresponding author. E-mail: luxcheng@yahoo.com.cn