

## 簇间连接方式不同的簇网络的同步过程研究\*

冯聪 邹艳丽<sup>†</sup> 韦芳琼

(广西师范大学电子工程学院, 桂林 541004)

(2012年11月2日收到; 2012年11月20日收到修改稿)

本文对簇间连接方式不同的三类簇网络的同步能力和同步过程进行研究. 构成簇网络的两个子网均为 BA 无标度网络, 当簇间连接方式是双向耦合时, 称其为 TWD 网络模型, 当簇间连接是大子网驱动小子网时, 称其为 BDS 网络模型, 当簇间连接是小子网驱动大子网时, 称其为 SDB 网络模型. 研究表明, 当小子网和大子网节点数目的比值大于某一临界值时, TWD 网络模型的同步能力大于 BDS 网络模型的同步能力, 当该比值小于某一临界值时, TWD 网络模型的同步能力小于 BDS 网络模型的同步能力, SDB 网络模型的同步能力是三种网络结构中最差的. 对于簇间连接具有方向性的单向驱动网络, 簇网络的整体同步能力与被驱动子网的节点数和簇间连接数有关, 与驱动网络自身节点数无关. 增加簇间连接数在开始时会降低各子网的同步速度, 但最终各子网到达完全同步的时间减少, 网络的整体同步能力增强. 文中以 Kuramoto 相振子作为网络节点, 研究了不同情况下三种簇网络的同步过程, 证明了所得结论的正确性.

**关键词:** 簇网络, 有向连接, 同步能力, Kuramoto 振子

**PACS:** 05.45.Xt

**DOI:** 10.7498/aps.62.070506

## 1 引言

复杂网络在人类社会和自然界中普遍存在, 随着对网络性质的物理意义和数学特性的深入研究, 人们发现许多实际网络都具有一个共同特性, 即社团结构. 也就是说, 整个网络是由若干个“簇 (cluster)”或“群 (group)”构成的. 每个簇内部的节点之间的连接相对非常紧密, 但是各个簇之间的连接相对来说比较稀疏<sup>[1]</sup>. 社团的概念最初在社会学领域被提出, 社会网络通常呈现出社团结构, 例如我们可以按照年龄, 职业等被划分成一个个社团<sup>[2-4]</sup>. 近年来的研究表明, 其他非社会网络也呈现出社团结构. 例如, WWW 网络中的社团表示一类主题相关的 web 页面; 代谢网络中的社团往往指示了细胞中的功能单元如代谢通道.

同步不但是自然界中的一种常见现象, 也是通信领域中常用的一种技术手段. 两个或多个动力学系统, 除了自身的演化外其间还有相互作用 (耦合), 这种作用既可以是单向的, 也可以是双向

的. 当满足一定条件时, 在耦合的影响下, 这些系统的状态就会逐渐趋于相同, 进而完全相等, 称为同步 (精确同步). 广义的同步还包括相同步和频率同步等<sup>[5-8]</sup>. 对同步的研究最早起源于钟摆同步现象的发现者惠更斯, 历史上为了弄清各种同步的机理, 科学家们经历了漫长的探索道路. 在日常生活中, 我们所熟悉的同步现象有萤火虫的一致闪光、心脏细胞有节奏的跳动等. 在技术领域, 常见的同步系统有耦合激光系统、通信网络等. 因为许多大型复杂系统可以简化为复杂网络进行研究, 而复杂网络中存在各种同步行为, 因此对复杂网络中的各种同步行为进行研究就显得尤为重要, 国内外科研工作者在复杂网络同步方面已经进行了大量探索, 也取得一定成果<sup>[1-19]</sup>.

目前复杂网络的社团结构研究主要集中在无向网络上, 系统地直接分析有向网络社团结构的研究较少. 本文所研究的网络是簇间连接具有方向性的簇网络, 簇内各子网的连接是无权无向的. 文中首先分析比较了不同结构簇网络整体同步能力的大小, 然后以 Kuramoto 相振子作为网络节点, 对不

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11062001, 11165003) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: zouyanli72@163.com

同结构的簇网络的同步过程进行了深入研究.

## 2 簇网络模型及其同步能力的比较

首先构建三个簇网络模型. 网络生成规则如下: 先单独生成一大一小两个 BA 无标度网络, 各个网络的初始节点数均为  $m_0 = 3$ , 每个时步引进一个新节点, 与网络中已有的  $m = 3$  个节点按照和节点度相关的概率进行偏好连接, 小子网的节点数为  $N_S$ , 大子网的节点数为  $N_B$ , 即生成两个簇. 然后在各个簇中随机选择  $L$  个节点作为簇间连接点, 连接后生成一个含有两个簇的节点数为  $N = N_S + N_B$  的簇网络. 当簇间连接无向时, 两个簇之间存在相互的影响作用; 当簇间连接有向时, 两个簇之间的影响作用是单向的. 所以, 根据簇间连接的方式不同, 我们把这三种簇网络模型定义为: 双向驱动网络 (TWD) 模型、大子网驱动小子网 (BDS) 模型和小子网驱动大子网 (SDB) 模型.

网络的拓扑结构用耦合矩阵  $A = (a_{ij}) \in R^{N \times N}$  来表示,  $A$  满足耗散耦合条件  $\sum_j a_{ij} = 0$ . 具体定义如下: 若从节点  $i$  到节点  $j (i \neq j)$  有连接, 则  $a_{ij} = 1$ ; 否则  $a_{ij} = 0$ . 对角元为  $a_{ii} = -\sum_{j=1, j \neq i}^N a_{ij}, i = 1, 2, \dots, N$ . 当网络属于同步区域无界的网络时, 其对应耦合矩阵的第二大特征值  $\lambda_2$  越小, 网络的同步化能力就越强<sup>[1]</sup>.

### 2.1 簇间连接数对簇网络同步能力的影响

令小子网节点数  $N_S = 50$ , 大子网节点数  $N_B = 500$ , 改变簇间连接数  $L$ , 生成一个含有两个簇的节点数为  $N = 550$  的簇网络, 仿真分析三种网络模型同步能力随  $L$  的变化情况如图 1 所示. 图中所有计算结果都是网络 100 次生成的平均值.

由图 1 可以明显看出, 这三种网络所对应的耦合矩阵的第二大特征值  $\lambda_2$  均随着簇间连接数  $L$  的增加而减小, 即三种网络的整体同步能力均随簇间连接数  $L$  的增加而增大; 在相同的  $L$  值下, BDS 模型达到完全同步的能力最强, TWD 模型次之, SDB 模型最弱. 三种簇网络同步能力的强弱规律在子网规模变化时, 是否保持呢? 下面我们对该问题进行分析.

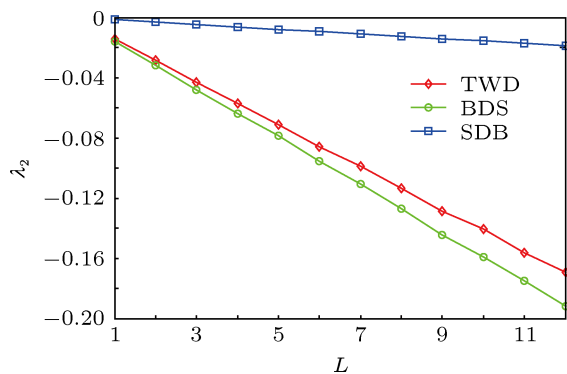


图 1 不同的簇间连接数  $L$  值所对应的三种网络耦合矩阵的第二大特征值  $\lambda_2$

### 2.2 子网络规模的变化对三种网络同步性能的影响

下面通过改变大小子网的规模来比较它们的同步性能. 参数  $\alpha$  定义为小子网与大子网节点数的比值, 即  $\alpha = N_S/N_B$ . 接下来分两种情况进行研究: 1) 保持小子网的节点数  $N_S = 50$  不变, 改变大子网的节点数, 比较三种网络整体同步能力的变化情况; 2) 保持大子网的节点数  $N_B = 500$  不变, 改变小子网的节点数, 比较三种网络整体同步能力的变化情况.

图 2(a) 和 (b) 分别表示三种网络在簇间连接  $L = 5$  和  $L = 10$  时, 网络耦合矩阵的第二大特征值随参数  $\alpha$  的倒数的变化情况, 随着  $1/\alpha$  的增大即大子网节点数  $N_B$  的增加, TWD 模型和 SDB 模型的第二大特征值均增大, BDS 模型的第二大特征值基本保持不变; 图 2(c) 和 (d) 分别表示各网络在簇间连接数  $L = 5$  和  $L = 10$  时, 其耦合矩阵的第二大特征值随参数  $\alpha$  的变化情况, 随着  $\alpha$  的增大即小子网节点数  $N_S$  的增加, TWD 模型和 BDS 模型的第二大特征值均增大, SDB 模型的第二大特征值基本保持不变. 图中所有计算结果均为网络 100 次实验的平均值.

由图 2 可知, 随着大子网节点数  $N_B$  的增加, TWD 和 SDB 模型的整体同步能力均逐渐减弱, 但 BDS 模型的整体同步能力几乎没有变化, 即 BDS 模型的整体同步能力不受大网络节点数的影响, 仅由小子网的节点数和簇间连接数决定, 增加小子网的节点数会减弱 BDS 模型的整体同步能力, 增加簇间连接数会增强 BDS 模型的整体同步能力; 随着小子网节点数  $N_S$  的增加, TWD 和 BDS 模型的整体同步能力均逐渐减弱, 但 SDB 模型的整体同步能力几乎没有变化, 即 SDB 模型的整体同步能力不受小网络节点数的影响, 仅由大子网的节点数

和簇间连接数决定, 增加大子网的节点数会减弱 SDB 模型的整体同步能力, 增加簇间连接数会增强 SDB 模型的整体同步能力. 从图 2 中我们还可以发现, 当小子网和大子网规模变化时, 存在一个临界值  $\alpha_c$ , 当  $\alpha < \alpha_c$  时, BDS 模型的同步能力优于 TWD 模型的同步能力, 当  $\alpha > \alpha_c$  时, TWD 模型的同步能力优于 BDS 模型的同步能力. 并且  $\alpha$  从大到小变化时 ( $1/\alpha$  从小到大变化, 对应图 2(a), (b)) 和  $\alpha$  从小到大变化时 (对应图 2(c), (d)) 得到的  $\alpha_c$  值并不完全相同,  $\alpha$  从大到小变化时  $\alpha_c = 0.227$ ,  $\alpha$

从小到大变化时  $\alpha_c = 0.22$ . 并且无论  $\alpha$  取值如何, SDB 模型的同步能力始终是最弱的. 图 1 中对应  $\alpha = N_S/N_B = 50/500 = 0.1$  情况, 所以 BDS 模型的同步能力优于 TWD 模型的同步能力. 因此本小节的研究表明三种网络同步能力的优劣和大小子网的节点比例有关. 当小子网相对大子网规模小很多时, BDS 模型的同步能力优于双向耦合的 TWD 模型的同步能力, 而当两个子网规模差不大时, TWD 模型的同步能力优于 BDS 模型的同步能力.

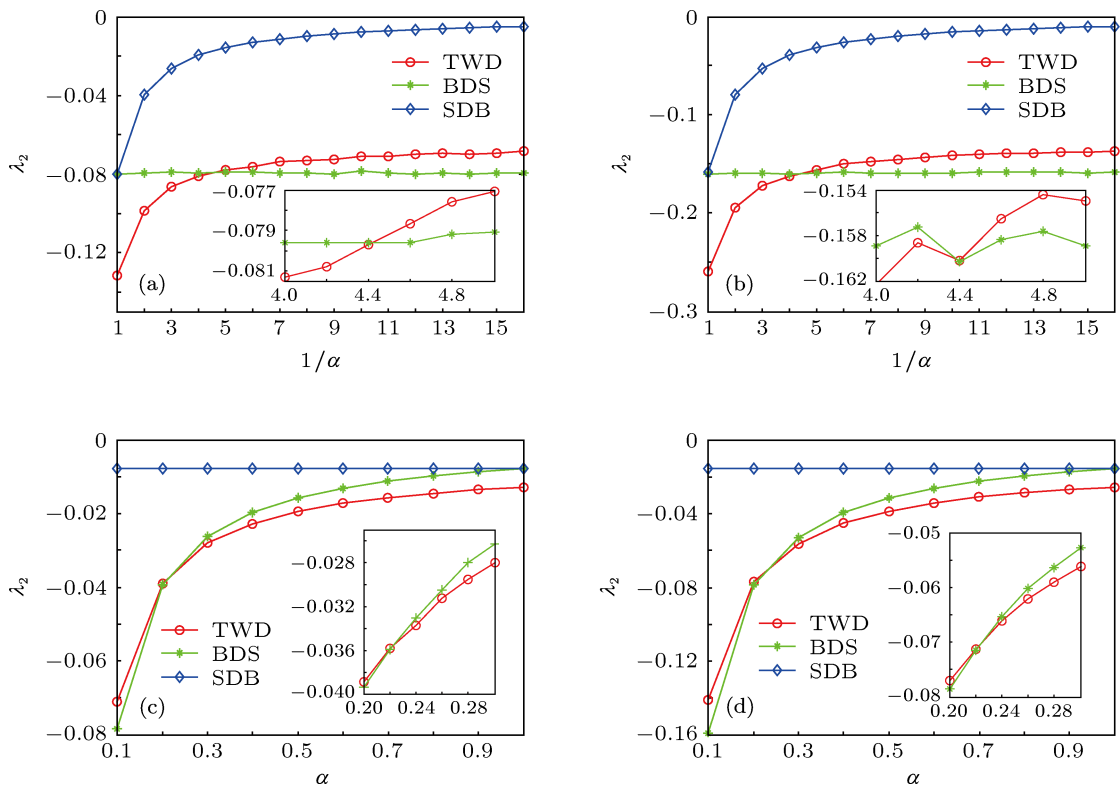


图 2 改变大小子网的规模网络整体同步性能的变化 (a)  $N_s = 50$  不变, 改变大子网节点数  $N_B$  ( $L = 5$ ); (b)  $N_s = 50$  不变, 改变大子网节点数  $N_B$  ( $L = 10$ ); (c)  $N_B = 500$  不变, 改变小子网节点数  $N_S$  ( $L = 5$ ); (d)  $N_B = 500$  不变, 改变小子网节点数  $N_S$  ( $L = 10$ )

### 3 结合 Kuramoto 相振子模型研究簇网络的同步过程

基于网络耦合矩阵特征值的分析方法只能说明网络最终的同步性能, 不能体现网络的同步过程, 在本节中我们将结合 Kuramoto 振子模型研究簇网络的同步过程.

#### 3.1 Kuramoto 振子模型

Kuramoto 振子模型是在 1975 年由 Kuramoto 提出的 [9,10]. 在这个模型中, 单个的相位振子以一

个随机的自然频率运动, 而不同的振子之间通过相位差的正弦值相互耦合. 这个模型的表达式非常简单, 但是却可以展现各种不同的同步模式.

Kuramoto 模型的数学表达式如下:

$$\dot{\theta}_i = \omega_i + K \sum_{j=1}^N a_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i),$$

$$(i = 1, \dots, N), \quad (1)$$

式中  $\theta_i$  和  $\omega_i$  分别表示第  $i$  个振子的相位和自然频率,  $N$  表示节点总数,  $K$  表示耦合强度,  $a_{ij}$  表示系统中各节点间的耦合关系. Kuramoto 振子网络的同步

程度通常由序参量来描述. 令

$$r(t) e^{i\varphi(t)} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{i\theta_j(t)}, \quad (2)$$

式中  $r(t)$  称为序参量,  $\varphi(t)$  是节点振子的平均相位, 这里  $r(t)$  的取值范围是  $0 \leq r(t) \leq 1$ , 它的大小表示的是大量相位振子的动力学行为的内在一致性,  $r$  越小说明系统越杂乱,  $r$  越大说明系统越有序 [11]. 当  $r = 1$  时说明系统中所有的振子的相位都是相同的, 即达到了完全同步. 所以,  $r(t)$  的大小描述了振子网络的同步程度.

### 3.2 子网规模相差较大时同步过程研究

由前面的分析我们知道, 当  $\alpha < \alpha_c$  时, BDS 模型的同步能力优于 TWD 模型的同步能力. 下面我们对这种情况下的同步过程进行研究. 仍取  $N_S = 50, N_B = 500, L = 5$ , 即  $\alpha = N_S/N_B = 50/500 = 0.1$ , 令每个节点表示一个 Kuramoto 相振子, 各振子的固有频率  $\omega_i$  均为 0, 小网络的初始相位在  $[-\pi, \pi/4]$  内均匀取值, 大网络的初始相位在  $[-\pi/4, \pi]$  内均匀取值. 令三种网络模型耦合强度的取值  $K = 3$ , 由于各网络的簇间连接点是随机取的, 图 3 所示的三种网络的序参量值是网络 10 次生成的平均值.

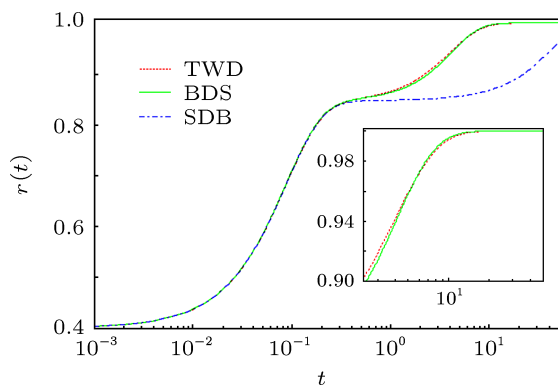


图 3 三种簇网络模型的整体序参量随时间的变化图

从图 3 可以看出三种网络的序参量值在初始时间段内的变化几乎是相同的, 一段时间后, TWD 模型的序参量增加速度较快, BDS 模型紧随其后, SDB 模型相对比较慢, 但是, 随着时间的不断延续, BDS 模型的序参量最终超过 TWD 模型最先达到 1, SDB 模型远落后于前两者. 由此我们得出: BDS 模型达到完全同步的能力最强, TWD 模型达到完全同步的能力次之, SDB 模型达到完全同步的能力最

弱, 这也验证了前面通过比较它们的第二大特征值得出的结论. 但由图 3 中的小图可以看出 TWD 网络的部分同步性能稍优于 BDS 网络.

为了进一步研究簇网络的同步过程, 我们对网络中各振子的相位在同步过程中随时间的变化情况进行了分析, 图 4(a), (b), (c) 分别表示在上述条件下三种网络模型振子的相位随时间的变化情况.

图 4 表明簇网络的同步过程都是先实现簇内同步然后再实现簇间同步. TWD 模型中簇间连接是双向的, 所以大小子网的同步状态互相影响, 最后达到全局同步; BDS 模型中, 簇间连接是单向的, 大子网驱动小子网, 以大子网的同步状态不受小子网的影响, 小子网在簇间连接的作用下逐步向大子网靠拢, 最后实现网络的整体同步; SDB 模型中, 小子网驱动大子网, 小子网的同步状态不受大子网影响, 大子网在簇间连接的作用下逐步向小子网靠拢, 这种结构的簇网络达到完全同步的时间较长, 有时甚至不能达到网络的完全同步.

结合图 4, 我们可以更清晰的解释图 3 中三种簇网络模型的整体序参量随时间的变化情况. 由于在初始一段时间内, 网络中各振子主要受簇内耦合作用力的影响, 且三种网络的簇内耦合作用力是相同的, 而簇间耦合作用力的影响甚微, 所以三种网络的序参量值在初始时间段内的变化很相近. 随着时间的推移, 各网络在簇内耦合作用力下先形成簇内部分同步, 当各个簇近似为一个整体时, 簇间耦合作用力的影响开始占据主导地位, 由于三种网络的簇间连接方式不同, 所以其簇间耦合作用力对各网络整体同步能力的影响也不同, 致使三种网络达到完全同步的时间也不相同.

### 3.3 子网规模相差不大时同步过程研究

在 3.2 节中, 我们对子网规模相差较大时的同步过程进行了研究, 发现 BDS 模型达到完全同步的能力最强, TWD 模型达到完全同步的能力次之, SDB 模型达到完全同步的能力最弱; 但 TWD 模型的部分同步性能稍优于 BDS 模型. 那么当子网规模相差不大时簇网络的同步过程是怎样的呢?

本节取  $\alpha = 0.5 > \alpha_c$ , 令  $N_S = 50, N_B = 100, L = 5$ , 大小子网的初始频率和初始相位的取值与 3.2 节中三种网络模型的取值方法一样. 且三种网络模型耦合强度的取值  $K = 3$ , 图 5 是网络 10 次生成的平均值.

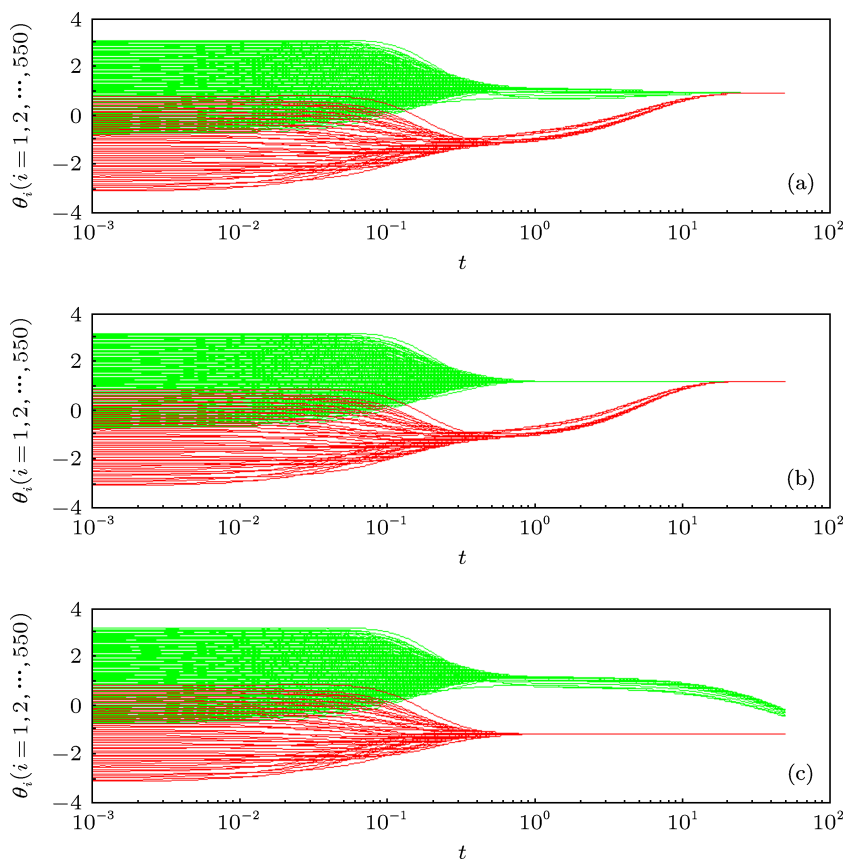


图4 三种网络模型振子的相位随时间的变化图 (a) TWD 模型; (b) BDS 模型; (c) SDB 模型

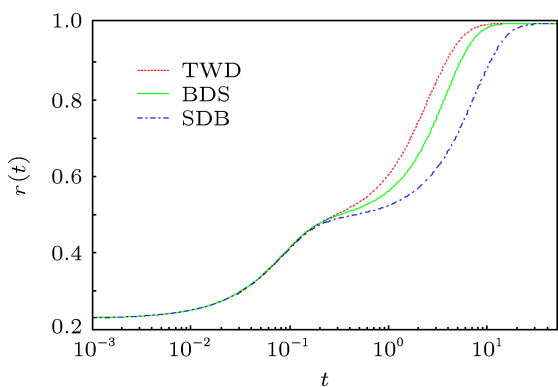


图5 三种簇网络模型的整体序参量随时间的变化图

从图 5 可以看出三种网络的序参量值在初始时间段内的变化也几乎是相同的, 一段时间后, TWD 模型的序参量增加速度变快, 并最先达到 1, BDS 模型次之, SDB 模型最慢. 由此我们得出: 在子网规模相差不大的情况下, 无论是部分同步能力还是完全同步能力, TWD 模型最强, BDS 模型次

之, SDB 模型最弱. 这也与前面通过比较它们的第二大特征值所得出的结论相符合.

### 3.4 簇间连接数对网络同步过程的影响

由以上分析可知, 网络的簇间耦合的方向性对整体网络的同步性能有着重要影响, 同时由图 1 我们知道, 当子网规模相差较大时, 增加簇网络的簇间连接数  $L$ , 簇网络的整体同步能力是增强的. 下面我们再进一步研究增加簇间连接对簇网络同步过程的影响. 以双向驱动的 TWD 模型和单向驱动的 BDS 模型为例. 令  $N_S = 50, N_B = 100$ , 图 6(a) 和 (b) 分别表示 TWD 模型中的小子网和小子网的序参量随时间的变化, 图 6(c) 和 (d) 分别表示 BDS 模型中的小子网和小子网的序参量随时间的变化. 由仿真结果可知: 增加簇网络的簇间连接数在开始时降低各子网的同步速度, 但最终各子网到达完全同步的时间减少, 网络的整体同步性能增强.



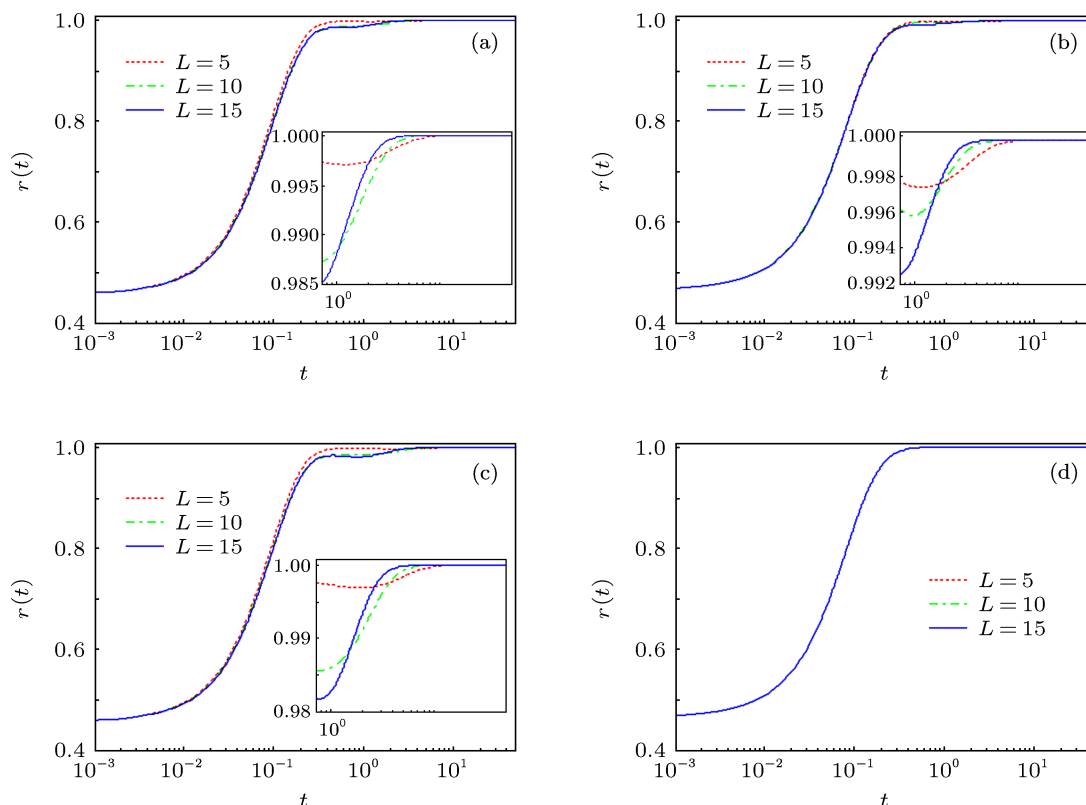


图6 不同 $L$ 值下各子网的序参量随时间的变化 (a) TWD模型中的小子网; (b) TWD模型中的大子网; (c) BDS模型中的小子网; (d) BDS模型中的大子网

## 4 结论

本文研究了簇间连接方式不同的三种簇网络的同步能力和同步过程. 研究表明: 簇间连接方式和子网节点数目的比例均对簇网络的整体同步能力和同步过程有着重要影响. 当小子网和大子网节点数目的比值大于某一临界值时, 簇间双向耦合网络模型 (TWD) 的整体同步能力大于大子网驱动小子网模型 (BDS) 的同步能力, 当该比值小于某一临

界值时, TWD网络模型的同步能力小于BDS网络模型的同步能力, 小子网驱动大子网 (SDB) 模型的同步能力是三种网络结构中最差的. 对于本文所构建的簇间连接具有方向性的单向驱动网络, 簇网络的整体同步能力与被驱动子网的节点数和簇间连接数有关, 与驱动网络自身节点数目无关. 在同等子网规模下, 增加簇网络的簇间连接数 $L$ , 开始时会降低各子网的同步速度, 但最终会增强簇网络的整体同步性能.

- [1] Wang X F, Li X, Chen G R 2006 *Theory and Applications of complex network* (1st Ed.) (Beijing: Tsinghua University Press) 162–164, 194–199, 299–332
- [2] Wasserman S, Faust K 1994 *Social network analysis: Method and applications* (1st Ed.) (Cambridge: Cambridge University press) 35–41
- [3] Scott J 2000 *Social Network Analysis: A Handbook* (2nd ed.) (SAGE Publications) 123–165
- [4] Patrick N, McGraw, Menzinger M 2005 *Phys. Rev. E* **72** 015101
- [5] Lai D R, Nardini C, Lu H T 2011 *Phys. Rev. E* **83** 016115
- [6] Leicht E A, Clarksou G, Shedden K, Newman M E J 2007 *Europhys. B* **59** 75
- [7] Wang X F 2002 *Int. J. Bifurcation Chaos* **12** 885
- [8] Lar D R 2011 *Ph. D. Dissertation* (Shanghai Jiaotong University) (in Chinese) [赖大荣 2011 博士学位论文 (上海: 上海交通大学)]
- [9] Juan A, Acebrón, Bonilla L L, Conrad J, Pérez Vicente, Félix Ritort, Renato Spigler 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 137
- [10] Moreno Y, Pacheco A F 2004 *Europhys. Lett.* **68** 603
- [11] Sorrentino F, Ott E 2007 *Phys. Rev. E* **76** 056114
- [12] Zou Y L, Zhu J, Chen G 2006 *Phys. Rev. E* **74** 046107
- [13] Zou Y L, Chen G 2008 *Europhys. Lett.* **84** 58005
- [14] Zou Y L, Chen G 2009 *Phys. A* **388** 2931
- [15] Zou Y L, Chen G 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3337
- [16] Zhu T X, Wu Y, Xiao J H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 040502 (in Chinese) [朱廷祥, 吴晔, 肖井华 2012 物理学报 **61** 040502]
- [17] Ma X J, Wang Y, Zheng Z G 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4426 (in Chinese) [马晓娟, 王延, 郑志刚 2009 物理学报 **58** 4426]
- [18] Sun Y Z, Tang Y F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 020506
- [19] Lu X Q, Austin F, Chen S H 2010 *Chin. Phys. Lett.* **27** 050503

# Synchronization processes in clustered networks with different inter-cluster couplings\*

Feng Cong Zou Yan-Li<sup>†</sup> Wei Fang-Qiong

(College of Electronic Engineering, Guangxi Normal University, Guilin 541004)

(Received 2 November 2012; revised manuscript received 20 November 2012)

## Abstract

This paper studies the synchronizability and the synchronization processes of three kinds of clustered networks with different inter-cluster couplings, where each clustered network is composed of two BA scale-free subnets. The clustered network is called a TWD network if the inter-cluster coupling is a two-way coupling, but it is called a BDS network if the small subnet is driven by the big one, and is called an SDB network if the big subnet is driven by the small one. The result shows that when the ratio of node number of small subnet to that of big one is larger than a critical value, the whole synchronizability of the TWD networks is better than that of the BDS networks; however, when this ratio is smaller than the critical value, the whole synchronizability of the TWD networks is weaker than that of the BDS ones, the whole synchronizability of the SDB networks is always the worst. For a one-way-driven clustered network, the synchronizability is just related to the node number of the driven subnet and the number of the inter-links, but has nothing to do with the node number of the driving subnet. The increase in the inter-links can reduce the synchronous speed of the subnet at the beginning but may enhance the synchronizability of the whole network eventually. The Kuramoto phase oscillators are taken as the network nodes to further study the synchronization process of the three-clustered networks for different cases, and the correctness of the above conclusions are evidenced.

**Keywords:** clustered network, directed coupling, synchronizability, Kuramoto phase oscillators

**PACS:** 05.45.Xt

**DOI:** 10.7498/aps.62.070506

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant Nos. 11062001, 11165003).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: zouyanli72@163.com