光场位相算符和逆算符的 Weyl 编序展开*

李学超[1)] 杨阳[2)†] 范洪义[3)]

1) (安徽理工大学理学院, 淮南 232001)

2) (中国科学技术大学近代物理系, 合肥 230026)

3) (中国科学技术大学材料科学与工程系, 合肥 230026)

(2012年9月2日收到; 2012年12月26日收到修改稿)

用有序算符内的积分技术, 推导了光场位相算符和逆算符的 Weyl 编序展开形式, 并利用该结果获得了相算符的经典对应以及某些新的特殊函数的生成函数和新的积分公式, 尤其是导出了带负次幂的复高斯积分的积分公式.

关键词: Weyl 编序, 位相算符, 有序算符内的积分

PACS: 03.65.−w, 42.50.Ar **DOI:** 10.7498/aps.62.080301

1 引 言

自从 1927 年 Dirac [1] 首次通过光子湮灭算符引入位相算符以来, 在量子光学中它一直是个重要的课题. 在量子力学中位相算符可以反映量子态的位相性质, Dirac 通过极分解 $\boldsymbol{a}=\sqrt{\boldsymbol{N}}\cdot\boldsymbol{S}$ ($\boldsymbol{S}$ 为位相算符) 定义位相算符, 这里 $\boldsymbol{N}=\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}$ 是粒子数算符, $\boldsymbol{a}^{\dagger}(\boldsymbol{a})$ 分别是玻色产生 (湮灭) 算符, $\left[\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}^{\dagger}\right]=1$. 随后 Carruthers 等 [2] 修正了位相算符, 把它定义为

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}&=(\boldsymbol{N}+1)^{-1/2}\boldsymbol{a},\\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}&=\boldsymbol{a}^{\dagger}(\boldsymbol{N}+1)^{-1/2}.\end{aligned}\tag{1}$$

那么位相算符的经典对应是什么？这个问题的解决在以往的文献中尚未见有讨论, 原因可能是位相算符是非线性的. 本文通过推导位相算符的 Weyl 编序来研究它及其经典对应, 在此基础上研究产生算符和湮灭算符的逆的 Weyl 编序. 这是深入了解光场算符性质的一种新的途径.

在粒子数表象 $|n\rangle$ 中, 利用

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}|n\rangle&=\sqrt{n}|n-1\rangle,\\ \boldsymbol{a}^{\dagger}|n\rangle&=\sqrt{n+1}|n+1\rangle,\end{aligned}\tag{2}$$

这里 $|n\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}^{\dagger n}}{\sqrt{n!}}|0\rangle$ 是粒子数态 (Fock 态), $|n\rangle$ 组成一个完备的空间

$$\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n|=1,\tag{3}$$

得到位相算符在粒子数表象中展开

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}&=\sum_{n=1}^{\infty}|n\rangle\langle n-1|,\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}&=\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n+1|,\end{aligned}\tag{4}$$

注意到

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}=1,\quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}=1-|0\rangle\langle 0|,\tag{5}$$

$|0\rangle$ 是真空态, $\boldsymbol{a}|0\rangle=0$, 可见 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 与 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$ 是不对易的.

在量子光学中, 人们经常会将算符在不同的表象中展开, 如 P 表示, Q 表示以及密度算符的 Wigner 函数 [3−6] 等. 算符 $\boldsymbol{A}$ 的 Q 表示可以简单地利用粒子数表象来获得:

$$\boldsymbol{A}=\sum_{m,n}|m\rangle\langle m|\boldsymbol{A}|n\rangle\langle n|=\sum_{m,n}A_{m,n}|m\rangle\langle n|.\tag{6}$$

在以往的文献中, 方程 (6) 除了提示我们求矩阵元 $A_{m,n}$ 外, 并没有提供过多的信息, $|m\rangle\langle n|$ 被认

* 国家自然科学基金 (批准号: 10975125, 11175113) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yangyang@mail.ustc.edu.cn

© 2013 中国物理学会 Chinese Physical Society

定是这种展开的一个"终极的"表示. 本文将突破 $|m\rangle\langle n|$ 这个"终极的"表式, 用算符的 Weyl 编序理论对上式继续推导, 将 $\boldsymbol{A}$ 以 Weyl 编序展开 [7]. 利用 Weyl 编序算符在相似变换下的序不变的优点, 不仅可以获得关于光场算符的一些新的信息, 同时也推导出许多有用的积分公式和一些特殊函数的生成函数, 尤其是导出带负幂次的复高斯积分公式.

2 $|m\rangle\langle n|$ 的 Weyl 编序形式

文献 [8] 曾导出任意一个算符的 Weyl 编序形式的公式

$$\begin{aligned}\rho =&2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\,\vdots\,\langle-\beta|\rho|\beta\rangle\\&\times\exp\left[2\left(\beta^*\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^\dagger\beta+\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\right)\right]\vdots,\end{aligned}\tag{7}$$

这里 $\vdots\ \vdots$ 表示 Weyl 编序, $|\beta\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\beta|^2+\boldsymbol{a}^\dagger\beta}|0\rangle$ 是一个相干态. 例如, 当 $\rho=1$, 即单位算符, 接着利用 $\langle-\beta|\beta\rangle=\mathrm{e}^{-2|\beta|^2}$, 上式的右边可以约化为

$$2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\,\vdots\,\exp\left[-2\left(\beta^*+\boldsymbol{a}^\dagger\right)\left(\beta-\boldsymbol{a}\right)\right]\vdots=1,\tag{8}$$

可见 (7) 式是正确的. 由

$$\langle m|\beta\rangle=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}|\beta|^2}\frac{\beta^m}{\sqrt{m!}}\tag{9}$$

并且利用双变量厄米特多项式的积分与表示

$$\begin{aligned}\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\eta)=&(-1)^m\mathrm{e}^{\xi\eta}\int\frac{\mathrm{d}^2z}{\pi}z^nz^{*m}\\&\times\exp\left[-|z|^2-\xi z+\eta z^*\right],\end{aligned}\tag{10}$$

这里

$$\begin{aligned}&\mathrm{H}_{m,n}(\xi,\eta)\\=&\sum_{l=0}^{\min(m,n)}l!\binom{m}{l}\binom{n}{l}(-1)^l\xi^{m-l}\eta^{n-l}.\end{aligned}\tag{11}$$

我们就可用有序算符内的积分技术 [9–12] 来推导出 $|m\rangle\langle n|$ 的 Weyl 编序式

$$\begin{aligned}&|m\rangle\langle n|\\=&2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\,\vdots\,\langle-\beta|m\rangle\langle n|\beta\rangle\\&\times\exp\left[2\left(\beta^*\boldsymbol{a}-\boldsymbol{a}^\dagger\beta+\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\right)\right]\vdots\\=&2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\,\vdots\,\frac{\beta^n(-\beta^*)^m}{\sqrt{n!m!}}\\&\times\exp\left[-|\beta|^2+2\left(\boldsymbol{a}\beta^*-\boldsymbol{a}^\dagger\beta+\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\right)\right]\vdots\\=&\frac{2}{\sqrt{n!m!}}\,\vdots\,\mathrm{H}_{m,n}\left(2\boldsymbol{a}^\dagger,2\boldsymbol{a}\right)\exp\left[-2\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\right]\vdots,\end{aligned}\tag{12}$$

将上式代入 (7) 式, 即可得到任一算符用双变量的厄米特多项式展开的新形式

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}=&\sum_{m,n}A_{m,n}|m\rangle\langle n|\\=&\sum_{m,n}A_{m,n}\frac{2}{\sqrt{n!m!}}\,\vdots\,\mathrm{H}_{m,n}\left(2\boldsymbol{a}^\dagger,2\boldsymbol{a}\right)\\&\times\exp\left[-2\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\right]\vdots.\end{aligned}\tag{13}$$

3 光场位相算符的经典对应

作为 (13) 式的应用, 我们来推导位相算符的 Weyl 编序. 利用

$$\langle m|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\,|n\rangle=\langle m|\sum_{k=1}^{\infty}|k\rangle\langle k-1|\,n\rangle=\delta_{m,n+1},\tag{14}$$

将其代入 (13) 式, 得到

$$\begin{aligned}&\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\\=&\sum_{m,n}\langle m|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\,|n\rangle|m\rangle\langle n|\\=&\sum_{m,n}\delta_{m,n+1}\frac{2}{\sqrt{n!m!}}\,\vdots\,\mathrm{H}_{m,n}\left(2\boldsymbol{a}^\dagger,2\boldsymbol{a}\right)\exp\left[-2\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\right]\vdots\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{n!\sqrt{n+1}}\,\vdots\,\mathrm{H}_{n+1,n}\left(2\boldsymbol{a}^\dagger,2\boldsymbol{a}\right)\exp\left[-2\boldsymbol{a}^\dagger\boldsymbol{a}\right]\vdots.\end{aligned}\tag{15}$$

根据 Weyl 量子化理论 [7], 位相算符 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$ 的 Weyl 对应式为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}=2\int\mathrm{d}^2\alpha\Delta(\alpha)h(\alpha).\tag{16}$$

由于 Wigner 算符 $\Delta(\alpha)$ 的 Weyl 编序为 [13]

$$\Delta(\alpha)=\frac{1}{2}\,\vdots\,\delta(\alpha-\boldsymbol{a})\,\delta\left(\alpha^*-\boldsymbol{a}^\dagger\right)\vdots,\tag{17}$$

所以对照 (15) 式可见

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4}{n!\sqrt{n+1}}\int\mathrm{d}^2\alpha\Delta(\alpha)\mathrm{H}_{n+1,n}(2\alpha^*,2\alpha)\\&\times\exp\left[-2|\alpha|^2\right].\end{aligned}\tag{18}$$

这说明位相算符的经典对应是

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}\to&\frac{4}{n!\sqrt{n+1}}\mathrm{H}_{n+1,n}(2\alpha^*,2\alpha)\exp\left[-2|\alpha|^2\right]\\=&\frac{8}{n!\sqrt{n+1}}\sum_{l=0}^{\min n}l!\binom{n+1}{l}\binom{n}{l}(-1)^l\\&\times\left(4|\alpha|^2\right)^{n-l+\frac{1}{2}}|\alpha|\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi},\end{aligned}\tag{19}$$

可见位相算符 $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi}$ 对应的经典位相体现在 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $\alpha^*=|\alpha|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$.

同样我们也可以算出 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 的 Weyl 编序式

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} &= \sum_{m,n} \langle m|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\,|n\rangle\,|m\rangle\,\langle n| \\ &= \sum_{m,n} \delta_{m+1,n} \frac{2}{\sqrt{n!m!}} \vdots \mathrm{H}_{m,n}\left(2\boldsymbol{a}^{\dagger}, 2\boldsymbol{a}\right) \exp\left[-2\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}\right] \vdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{n!\sqrt{n+1}} \vdots \mathrm{H}_{n,n+1}\left(2\boldsymbol{a}^{\dagger}, 2\boldsymbol{a}\right) \exp\left[-2\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}\right] \vdots\end{aligned} \tag{20}$$

所以算符 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}$ 的经典对应为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \to \frac{4}{n!\sqrt{n+1}} \mathrm{H}_{n,n+1}\left(2\alpha^*, 2\alpha\right) \exp\left[-2|\alpha|^2\right]. \tag{21}$$

4 产生算符和湮灭算符的逆的 Weyl 编序式及应用

Dirac [14] 首先考虑了湮灭算符的逆 $\boldsymbol{a}^{-1}$. 既然产生算符描述光子产生过程, 产生算符的逆应该描写光子湮灭过程; 反之, 湮灭算符的逆应该描写产生过程. 但要注意由于 $\boldsymbol{a}\,|0\rangle = 0$, 尽管 $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1} = 1$, 但 $\boldsymbol{a}^{-1}a \neq 1$. 用相干态和围道积分的方法 [15] 可以将粒子数态 $|n\rangle$ 表示为

$$|n\rangle = \frac{\sqrt{n!}}{2\pi i} \oint_c \mathrm{d}z \frac{1}{z^{n+1}}\, \mathrm{e}^{z\boldsymbol{a}^{\dagger}}\,|0\rangle, \tag{22}$$

这里的围道 C 包括了 $z = 0$ 点, 在围道积分下 $\boldsymbol{a}^{-1}\,\mathrm{e}^{z\boldsymbol{a}^{\dagger}}\,|0\rangle = z^{-1}\,\mathrm{e}^{z\boldsymbol{a}^{\dagger}}\,|0\rangle$ 就有了意义, 于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{-1}\,|n\rangle &= \frac{\sqrt{n!}}{2\pi i} \oint_c \mathrm{d}z \frac{1}{z^{n+2}}\, \mathrm{e}^{z\boldsymbol{a}^{\dagger}}\,|0\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,|n+1\rangle,\end{aligned} \tag{23}$$

即

$$\boldsymbol{a}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,|n+1\rangle\,\langle n|. \tag{24}$$

$\boldsymbol{a}^{-1}$ 满足

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^{-1} &= 1, \\ \boldsymbol{a}^{-1}\boldsymbol{a} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}}\,|n+1\rangle\,\langle n|\,\boldsymbol{a} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |n+1\rangle\,\langle n+1| \\ &= 1 - |0\rangle\,\langle 0|.\end{aligned} \tag{25}$$

利用 (24) 式得到

$$\boldsymbol{a}^{-l} = \sum_{k=0}^{\infty} \sqrt{\frac{k!}{(k+l)!}}\,|k+l\rangle\,\langle k|. \tag{26}$$

将

$$\langle m|\,\boldsymbol{a}^{-l}\,|n\rangle = \sqrt{\frac{n!}{(n+l)!}}\,\delta_{m,n+l} \tag{27}$$

代入 (13) 式得到

$$\boldsymbol{a}^{-l} = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{2}{n!} \vdots \mathrm{H}_{n,n-l}\left(2\boldsymbol{a}^{\dagger}, 2\boldsymbol{a}\right) \exp\left[-2\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}\right] \vdots. \tag{28}$$

另一方面, 直接利用 (7) 式又有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}^{-l} = & 2\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi} \vdots \frac{1}{\beta^l} \exp\Big[-2|\beta|^2 \\ & + 2\left(\beta^*\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^{\dagger}\beta + \boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}\right)\Big] \vdots.\end{aligned} \tag{29}$$

该式代入时利用了 $\boldsymbol{a}^{-1}\,|\beta\rangle = \beta^{-1}\,|\beta\rangle$, 比较 (28) 和 (29) 两式得到

$$\begin{aligned}&\sum_{n=l}^{\infty} \frac{2}{n!} \vdots \mathrm{H}_{n,n-l}\left(2\boldsymbol{a}^{\dagger}, 2\boldsymbol{a}\right) \exp\left[-2\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}\right] \vdots \\ =& 2\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi} \vdots \frac{1}{\beta^l} \exp\left[-2|\beta|^2 + 2\left(\beta^*\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^{\dagger}\beta + \boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}\right)\right] \vdots.\end{aligned} \tag{30}$$

由于 Weyl 编序中, 产生算符与湮灭算符是可交换的, 可以将其看作积分参量, 从 (30) 式得到一个新的积分公式

$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi} \beta^{-l} \exp\left[-2|\beta|^2 + 2\left(\beta^*\lambda - \lambda^*\beta\right)\right] \\ =& \sum_{n=l}^{\infty} \frac{1}{n!} \mathrm{H}_{n,n-l}\left(2\lambda^*, 2\lambda\right) \exp\left[-4|\lambda|^2\right].\end{aligned} \tag{31}$$

注意 β^{-l} 是负幂次, 所以这个积分带有瑕点, 不易用常规的方法积分, 这里用 Weyl 编序方法绕过了这一困难.

同样我们可以推导出 $\left(\boldsymbol{a}^{\dagger}\right)^{-l}$ 的 Weyl 编序

$$\begin{aligned}\left(\boldsymbol{a}^{\dagger}\right)^{-l} &= \sum_{n=l}^{\infty} \frac{2}{n!} \vdots \mathrm{H}_{n-l,n}\left(2\boldsymbol{a}^{\dagger}, 2\boldsymbol{a}\right) \exp\left[-2\boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}\right] \vdots \\ &= 2\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi} \vdots \frac{1}{\left(-\beta^*\right)^l} \exp\Big[-2|\beta|^2 \\ &\quad + 2\left(\beta^*\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^{\dagger}\beta + \boldsymbol{a}^{\dagger}\boldsymbol{a}\right)\Big] \vdots,\end{aligned} \tag{32}$$

由此可以悟出带负幂次 $(\beta^*)^{-l}$ 的新高斯积分公式

$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi} \left(-\beta^*\right)^{-l} \exp\left[-2|\beta|^2 + 2\left(\beta^*\lambda - \lambda^*\beta\right)\right] \\ =& \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+l)!} \mathrm{H}_{n,n+l}\left(2\lambda^*, 2\lambda\right) \exp\left[-4|\lambda|^2\right].\end{aligned} \tag{33}$$

进一步由 (24) 式可见

$$\left(\boldsymbol{a}^{\dagger}\right)^{-k} \boldsymbol{a}^{-l} = \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{1}{(k'+l)!} \left(\boldsymbol{a}^{\dagger}\right)^{k'+l-k} |0\rangle\,\langle 0|\,\boldsymbol{a}^{k'}. \tag{34}$$

将

$$\langle m|\left(a^{\dagger}\right)^{-k}a^{-l}|n\rangle=\frac{1}{(n+l)!}\sqrt{n!m!}\delta_{m-k,n+l}\quad(35)$$

代入 (13) 式得

$$\begin{aligned}\left(a^{\dagger}\right)^{-k}a^{-l}&=\sum_{m,n}\langle m|\left(a^{\dagger}\right)^{-k}a^{-l}|n\rangle|m\rangle\langle n|\\&=\sum_{n=0}^{\infty}2\frac{1}{(n+l)!}\vdots\mathrm{H}_{n+l-k,n}\left(2a^{\dagger},2a\right)\\&\quad\times\exp\left[-2a^{\dagger}a\right]\vdots.\end{aligned}\quad(36)$$

另一方面, 直接利用 (7) 式又得到

$$\begin{aligned}&\left(a^{\dagger}\right)^{-k}a^{-l}\\=&2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\vdots\langle-\beta|\left(a^{\dagger}\right)^{-k}a^{-l}|\beta\rangle\\&\times\exp\left[2\left(\beta^*a-a^{\dagger}\beta+a^{\dagger}a\right)\right]\vdots\\=&2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\vdots(-1)^k(\beta^*)^{-k}\beta^{-l}\\&\times\exp\left[-2|\beta|^2+2\left(\beta^*a-a^{\dagger}\beta+a^{\dagger}a\right)\right]\vdots.\end{aligned}\quad(37)$$

比较以上两式, 可以悟出关于带负幂次 $(\beta^*)^{-k}\beta^{-l}$ 的新高斯积分公式

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}(-1)^k(\beta^*)^{-k}\beta^{-l}\\&\times\exp\left[-2|\beta|^2+2(\beta^*\lambda-\lambda^*\beta)\right]\\=&\sum_{n=l}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{H}_{n-k,n-l}(2\lambda^*,2\lambda)\exp\left[-4|\lambda|^2\right],\end{aligned}\quad(38)$$

进一步可改写为

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}(\beta^*)^{-k}\beta^{-l}\\&\times\exp\left[-fg|\beta|^2+\sqrt{2}(f\beta^*\lambda-g\lambda^*\beta)\right]\\=&\sum_{n=l}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^k\left(\frac{f}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^{l+1}\\&\times\mathrm{H}_{n-k,n-l}\left(\sqrt{2}g\lambda^*,\sqrt{2}f\lambda\right)\\&\times\exp\left[-2gf|\lambda|^2\right].\end{aligned}\quad(39)$$

作为比较, 我们推导带正幂次 $(\beta^*)^k\beta^l$ 的新高斯积分公式. 将

$$\langle m|\left(a^{\dagger}\right)^{k}a^{l}|n\rangle=\sqrt{\frac{m!n!}{(m-k)!(n-l)!}}\delta_{m-k,n-l}\quad(40)$$

代入 (13) 式得

$$\begin{aligned}\left(a^{\dagger}\right)^{k}a^{l}&=\sum_{m,n}\langle m|\left(a^{\dagger}\right)^{k}a^{l}|n\rangle\frac{2}{\sqrt{n!m!}}\vdots\mathrm{H}_{m,n}\left(2a^{\dagger},2a\right)\\&\quad\times\exp\left[-2a^{\dagger}a\right]\vdots\\&=\sum_{n=l}^{\infty}\frac{2}{(n-l)!}\vdots\mathrm{H}_{n+k-l,n}\left(2a^{\dagger},2a\right)\\&\quad\times\exp\left[-2a^{\dagger}a\right]\vdots,\end{aligned}\quad(41)$$

另一方面, 将 $\left(a^{\dagger}\right)^k a^l$ 直接代入 (7) 式得

$$\begin{aligned}\left(a^{\dagger}\right)^{k}a^{l}=&2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\vdots\langle-\beta|\left(a^{\dagger}\right)^{k}a^{l}|\beta\rangle\\&\times\exp\left[2\left(\beta^*a-a^{\dagger}\beta+a^{\dagger}a\right)\right]\vdots\\=&2\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}\vdots(-\beta^*)^k\beta^l\exp\left[-2|\beta|^2\right.\\&\left.+2\left(\beta^*a-a^{\dagger}\beta+a^{\dagger}a\right)\right]\vdots.\end{aligned}\quad(42)$$

比较以上两式, 可以悟出关于带正幂次 $(\beta^*)^k\beta^l$ 的新积分公式

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}(-\beta^*)^k\beta^l\exp\left[-2|\beta|^2+2(\beta^*\lambda-\lambda^*\beta)\right]\\=&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{H}_{n+k,n+l}(2\lambda^*,2\lambda)\exp\left[-4|\lambda|^2\right],\end{aligned}\quad(43)$$

另一方面利用 (10) 式得到

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}(-\beta^*)^k\beta^l\exp\left[-2|\beta|^2+2(\beta^*\lambda-\lambda^*\beta)\right]\\=&2^{-\frac{k+l+2}{2}}\mathrm{H}_{k,l}\left(\sqrt{2}\lambda^*,\sqrt{2}\lambda\right)\exp\left[-2|\lambda|^2\right].\end{aligned}\quad(44)$$

比较 (44) 与 (45) 式, 得出关于双变量厄米特多项式的一个新的母函数公式

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathrm{H}_{n+k,n+l}(2\lambda^*,2\lambda)\exp\left[-2|\lambda|^2\right]\\=&\mathrm{H}_{k,l}\left(\sqrt{2}\lambda^*,\sqrt{2}\lambda\right)2^{\frac{-(k+l+2)}{2}},\end{aligned}\quad(45)$$

该式也可利用其他方法验证.

(45) 式进一步可改写为

$$\begin{aligned}&\int\frac{\mathrm{d}^2\beta}{\pi}(\beta^*)^k\beta^l\\&\times\exp\left[-fg|\beta|^2+\sqrt{2}(f\beta^*\lambda-g\lambda^*\beta)\right]\\=&\sum_{n}^{\infty}\frac{1}{n!}(-1)^k\left(\frac{f}{\sqrt{2}}\right)^{k+1}\left(\frac{g}{\sqrt{2}}\right)^{l+1}\\&\times\mathrm{H}_{n+k,n+l}\left(\sqrt{2}\lambda^*,\sqrt{2}f\lambda\right)\exp\left[-2gf|\lambda|^2\right],\end{aligned}\quad(46)$$

该式正好与 (41) 式相匹配.

5 结 论

本文推导出了光场位相算符的 Weyl 编序, 写出了其经典对应, 这对于深入了解光场算符的性质提供了一种新的途径; 推导了产生算符与湮灭算符的逆的 Weyl 编序, 并据此推导出了某些特殊函数的新的生成函数和带负次幂的高斯积分公式.

[1] Dirac P A M 1927 *Proc. R. Soc. London* A **114** 243

[2] Carruthers P, Nieto M M 1968 *Rev. Mod. Phys.* **40** 411

[3] Wigner E P 1932 *Phys. Rev.* **40** 749

[4] Klauder J R, Skagerstam B S 1985 *Coherent States* (Singerpore: World Scientific Publishing)

[5] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (United Kingdom: Cambridge University Press)

[6] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **130** 2529

[7] Weyl H 1927 *Z. Phys.* A **46** 1

[8] Fan H Y 1992 *J. Phys.* A **25** 3443

[9] Fan H Y, Hu L Y 2008 *Chin. Phys.* B **17** 1640

[10] Yuan H C, Xu X X 2010 *Acta Phys. Sin.* **61** 064205 (in Chinese) [袁洪春, 徐学翔 2012 物理学报 **61** 064205]

[11] Fan H Y 2008 *Ann. Phys.* **323** 1502

[12] Jiang N Q, Fan H Y, Hu L Y 2011 *J. Phys.* A: *Math. Theor.* **44** 195302

[13] Xu X X,Yuan H C, Hu L Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 4661 (in Chinese) [徐学翔, 袁洪春, 胡利云 2010 物理学报 **59** 4661]

[14] Dirac P A M 1966 *Lectures on Quantum Field Theory* (New York: Academic)

[15] Fan H Y 1993 *Phys. Rev.* A **47** 4521

Weyl ordering expansion for optical field phase operator and inverse operators*

Li Xue-Chao[1)] Yang Yang[2)†] Fan Hong-Yi[3)]

1) (*School of Science, Anhui University of Science and Technology, Huainan* 232001*, China*)

2) (*Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026*, China*)

3) (*Department of Material Science and Engineering, University of Science and Technology of China, Hefei* 230026*, China*)

(Received 2 September 2012; revised manuscript received 26 December 2012)

Abstract

Using the technique of integration within an ordered product of operators, we derive Weyl ordered expansion for optical field phase operator and inverse of creation and annhilation operators. The results are used to obtain the classical correspondence, new generation function formula of some special functions and new integration formulas. In particular, for the first time we derive complex Gaussian integral formula when the integrand has negative power function.

Keywords: Weyl ordering, phase operator, integration within an ordered product of operators

PACS: 03.65.−w, 42.50.Ar **DOI:** 10.7498/aps.62.080301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10975125, 11175113).

† Corresponding author. E-mail: yangyang@mail.ustc.edu.cn