

线性调频信号激励过阻尼双稳系统的随机共振现象研究*

彭皓 钟苏川 屠浙 马洪†

(四川大学数学学院, 成都 610065)

(2012年9月13日收到; 2012年12月18日收到修改稿)

线性调频信号是工程中常见的一种信号, 由于其为非周期信号, 无法以频域信噪比作为衡量其是否产生随机共振的测量手段, 故鲜有文献研究以线性调频信号为激励信号的随机共振现象. 本文利用线性调频信号在最优分数阶 Fourier 变换域上的能量聚集性, 首次提出以最优分数阶 Fourier 变换域上定义的信噪比作为测量手段, 研究了线性调频信号叠加高斯白噪声激励过阻尼双稳系统的随机共振现象, 且发现了以线性调频信号为激励信号时产生的新现象, 即随着信号频率的增大, 随机共振将逐渐减弱, 并给出了合理的解释. 仿真的结果与理论分析一致, 验证了本文所提出方法的有效性.

关键词: 线性调频信号, 分数阶 Fourier 变换, 随机共振

PACS: 05.10.Gg, 05.40.-a, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.62.080501

1 引言

1981年, Benzi 等^[1,2]在研究地球冰川期变化机制的过程中, 发现了一种奇特的现象, 即随着噪声强度的增大, 系统的输出信噪比呈现出先增大后减小的非单调变化, 此后该现象被称为随机共振. 随机共振揭示出噪声对序结构的建设性, 颠覆了人们以往对噪声只具有破坏性的认识, 故而在信号处理中展示出良好的应用前景, 引发了一轮研究热潮. 但在研究早期, 受限于 Benzi 等发现随机共振时所用的模型, 学者们普遍认为随机共振是非线性系统、周期信号及噪声的一种协同效应, 三者缺一不可, 这使随机共振的研究范围非常有限^[3-6].

1995年, Collins 等^[7,8]将随机共振与信息理论相结合, 提出了非周期随机共振理论, 该理论以平均互信息量、误码率及信道容量等作为研究随机共振的测量手段, 巧妙地解决了因非周期信号不适宜以频域信噪比作为衡量是否产生随机共振的测

量手段的问题. 但由香农信息理论可知, 不具有随机性的信号是没有信息量的, 故线性调频信号本身不携带信息, 这使得我们无法沿用 Collins 等的方法来研究线性调频信号激励下系统的随机共振现象.

为此, 本文尝试改造 Collins 的方法, 利用线性调频信号在最优分数阶 Fourier 变换域上的能量聚集性, 提出以分数阶 Fourier 变换域上定义的信噪比作为测量手段来研究线性调频信号叠加高斯白噪声激励过阻尼双稳系统的随机共振现象.

2 系统模型及其随机共振机理分析

线性调频信号叠加高斯白噪声激励的过阻尼双稳系统可由如下随机微分方程表示:

$$\dot{x}(t) = -\dot{U}(x) + A \cos(2\pi\mu t^2 + 2\pi ft) + \eta(t), \quad (1)$$

其中, $U(x) = -\frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{4}bx^4$ 为该系统的势函数, a, b 均为大于零的实数; $A \cos(2\pi\mu t^2 + 2\pi ft)$ 为线性调频信号 (linear frequency modulated signal, LFM 信号), A, μ, f 分别为其振幅, 调频率及中心频率, 称

* 国家自然科学基金 (批准号: 11171238) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: mahong@scu.edu.cn

$(\mu t + ft)' = 2\mu t + f$ 为此 LFM 信号的瞬时频率; $\eta(t)$ 为零均值高斯白噪声, 其自相关函数为

$$E[\eta(t)\eta(t + \tau)] = 2D\delta(t - \tau), \quad (2)$$

其中, D 为噪声强度.

下面我们从粒子跃迁的角度阐明本文所提出的系统模型产生随机共振的机理, 并进一步分析其与传统周期信号激励的双稳系统之不同之处.

方程 (1) 实际上描述了一个过阻尼的扩散过程. 当 $A = 0, D = 0$ 时, 该系统的势垒高为 $\Delta U = a^2/4b$, 在 $x = \pm\sqrt{a/b}$ 处有两个势阱. 设 $a = b = 1$, 则该系统的双稳势函数曲线如图 1 所示.

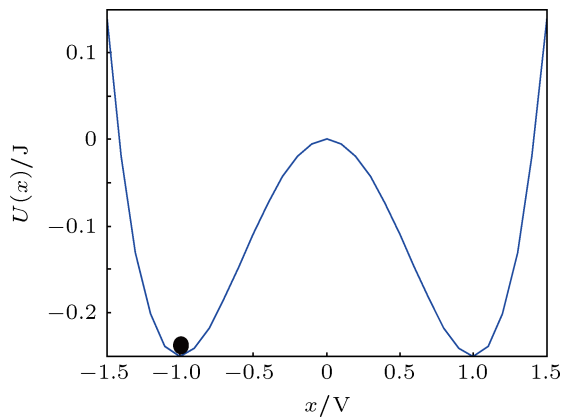


图 1 系统模型的势函数曲线

从图 1 中可以看出, 在没有外部激励信号和噪声的情况下, 系统处于平衡状态. 其在 $x = \pm 1$ 处的两个势阱点和在 $x = 0$ 处的一个势垒点分别对应势函数曲线中的两个极小值和一个极大值, 此时粒子位于两个势阱中的任意一个 (视系统的初始状态而定).

外部激励信号与噪声对粒子跃迁过程的影响有多种等价的解释, 例如不妨将线性调频信号看作是改变原有势函数的量, 其作用是改变原有势函数 $U(x)$ 的斜率, 造成势阱和势垒发生有利于粒子跃迁的变化; 而噪声则给粒子提供能量, 在势阱和势垒发生变化的情况下, 以更大概率促进粒子跃迁的实现. 图 2 给出了系统 $\dot{x}(t) = -\dot{V}(x) + \eta(t)$ 的有效势函数 $V(x) = U(x) - [A \cos(2\pi\mu t^2 + 2\pi ft) + \eta(t)]x$ 的曲线. 当 $A \neq 0, D = 0$ 时, 势阱在 LFM 信号的驱动下按其频率产生倾斜变化, 但只要 A 小于势阱阈值 $\sqrt{4a^3/27b}$, 粒子只能在相应的势阱内按信号频率做局域运动, 无法实现跃迁. 当 D 逐渐增大到某一值时, 由于 LFM 信号的作用, 可使势阱倾斜程

度足够大, 致使噪声作用下的粒子得以克服势垒, 在两个势阱中按 LFM 信号频率进行跃迁, 即产生了随机共振现象. 又由于噪声是随机过程, 这种跃迁具有一定随机性, 此时要求 LFM 信号的频率足够低, 让“有效势函数” $V(x)$ 的变化足够慢, 使粒子在噪声的随机作用下有充分长的时间完成跃迁. 换言之, 在 LFM 信号低频时段出现随机共振, 此要求即所谓的“绝热近似原理”.

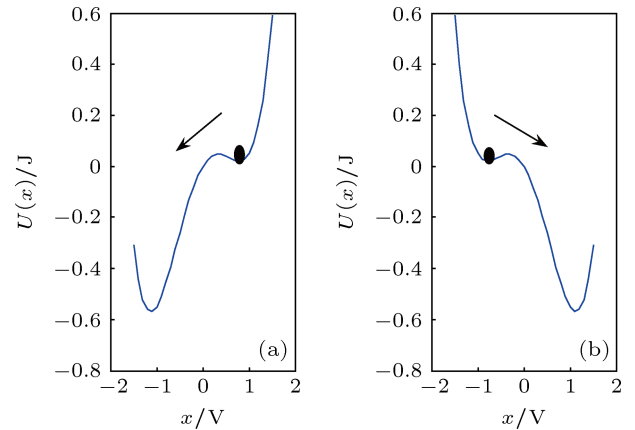


图 2 输入信号及噪声对势函数的影响 (a) 输入信号; (b) 噪声

需要说明的是, 一般认为随机共振只有在“绝热近似条件”^[9] 下才能发生. 为满足“绝热近似条件”, 激励信号的频率应足够低. 而在本文提出的系统模型中, 激励信号为 LFM 信号, 当调频率 μ 和中心频率 f 为正实数, 且 f 充分小时, LFM 信号的瞬时频率 $2\mu t + f$ 将随时间增长由初始时段的低频逐渐增高, 这也就使得 LFM 信号随时间增长逐渐不满足“绝热近似条件”, 从而使“随机共振效应”逐渐减弱. 这一点将在随后的数值仿真中得到验证.

3 分数阶 Fourier 变换域信噪比定义

3.1 分数阶 Fourier 变换

函数 $f(t)$ 的 p 阶分数阶 Fourier 变换的定义为^[10]

$$F_p(u) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} K_p(u, t) f(t) dt, \quad (3)$$

其中 $K_p(u, t)$ 称为分数阶 Fourier 变换的核函数, 当 $p \neq 2n, n$ 为整数时, $K_p(u, t) \equiv A_\alpha \exp[j\pi(u^2 \cot \alpha - 2ut \csc \alpha + t^2 \cot \alpha)]$, $A_\alpha = \sqrt{1 - j \cot \alpha}$, $\alpha = \frac{p\pi}{2}$. 当 $p = 4n$ 时, $K_p(u, t) \equiv \delta(u - t)$, 当 $p = 4n + 2$ 时, $K_p(u, t) \equiv \delta(u + t)$.

函数 $F_p(u)$ 的 p 阶分数阶 Fourier 逆变换公式为

$$f(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} F_p(u) K_{-p}(u, t) dt, \quad (4)$$

由 (4) 式可知, 函数 $f(t)$ 的分数阶 Fourier 变换 $F_p(u)$ 可解释为 $f(t)$ 在以逆变换核 $K_{-p}(u, t)$ 为基的函数空间上的展开, 而该核是 u 域上的一组正交的线性调频基. 因此, 一个 LFM 信号在最优的分数阶 Fourier 变换域中将表现为一个冲击函数, 这与周期函数在频域上的表现形式是一致的. 故可类比传统的频域信噪比定义, 相应给出 LFM 信号的分数阶 Fourier 变换域信噪比定义.

3.2 最优分数阶 Fourier 变换阶数

确定 LFM 信号最优分数阶 Fourier 变换阶数 (简称最优阶数) 的基本原理是: 以阶数 p 为变量, $p \in [0, 2]$, 对给定的 LFM 信号连续进行分数阶 Fourier 变换, 形成信号能量在参数 (p, u) 平面的二维分布, 并在此平面上进行峰值点的二维搜索. 峰值点所对应的 p 值即为该 LFM 信号的最优阶数 p_{bo} [10]:

$$p_{bo} = \arg \max_{p \in [0, 2]} |F_p(u)|. \quad (5)$$

3.3 分数阶 Fourier 变换域信噪比定义

对方程 (1) 的输出信号 $x(t)$ 做 p_{bo} 阶 Fourier 变换, 可得其幅度谱 $|X_{p_{bo}}(u)|$, 其中的线性调频成分, 即有用信号成分将表现为一冲击函数, 且由于噪声的能量均匀地分布在整个时频平面内, 在任何的分数阶 Fourier 变换域上均不会出现能量聚集, 故有用信号成分位于幅度谱 $|X_{p_{bo}}(u)|$ 的峰值点处, 至此, 可得分数阶 Fourier 变换域上定义的信噪比为

$$SNR = 20 \lg \frac{P_{chirp}}{P_{noise}}, \quad (6)$$

其中, P_{chirp} 为幅度谱 $|X_{p_{bo}}(u)|$ 的峰值, P_{noise} 为幅度谱 $|X_{p_{bo}}(u)|$ 中除去峰值 P_{chirp} 后的平均值.

此定义是对传统频域信噪比定义的一个推广, 当输入的有用信号为周期信号时, 最优阶数 $p_{bo} = 1$, 则该定义将退化为频域信噪比的定义.

4 仿真实验及分析

下面我们给出方程 (1) 所刻画的系统按第 3 节定义的输出信噪比的仿真实验及其分析.

4.1 输出信号 $x(t)$ 的时域图

设 $a = b = 1$, $A = 0.3$, $\mu = 0.0001$, $f = 0.01$, $D = 0.7$. 以 Runge-Kutta 法求解方程 (1), 可得输出信号 $x(t)$ 的时域图. 为体现噪声的随机性, 所得的 $x(t)$ 是以 Monte-Carlo 法将此求解过程重复 500 次后的平均值.

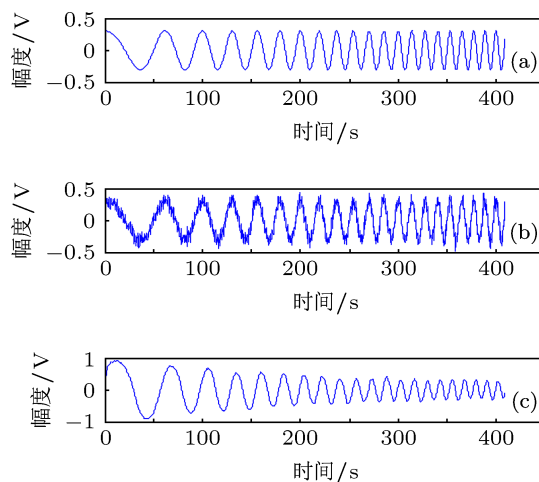


图 3 输入信号与输出信号的时域图

图 3(a) 为系统输入之 LFM 信号 $s_1(t) = 0.3 \cos(0.0001 \times 2\pi t^2 + 0.01 \times 2\pi t)$ 的时域图; 图 3(b) 是 $s_1(t) + \eta(t)$ 的信号时域图; 而图 3(c) 则为系统输出信号 $x(t)$ 的时域图. 可以看出, 由于随机共振, 系统输出信号 $x(t)$ 的幅度在初始时段较大, 但随着系统输入端 LFM 信号 $s_1(t)$ 的瞬时频率 $0.0002 \times t + 0.01$ 随时间增长而增高, 逐渐破坏了“绝热近似条件”, 导致“随机共振效应”随时间的增长逐渐减弱, 进而表现为系统输出信号 $x(t)$ 的幅度随时间的增长逐渐减小, 这与第 2 节中的理论分析是一致的, 体现出线性调频信号产生随机共振现象时的独特性质.

下面我们将按前述方法在分数阶 Fourier 变换域上对输出信号 $x(t)$ 中的有用信号与噪声进行区分, 从而得到在该域上定义的信噪比, 并将其作为测量手段验证本文提出的模型产生了随机共振.

4.2 最优阶数的确定

输入的 LFM 信号为 $s_1(t) = 0.3 \cos(0.0001 \times 2\pi t^2 + 0.01 \times 2\pi t)$, 按前述方法以 0.01 为步长搜索其最优阶数 p_{bo} .

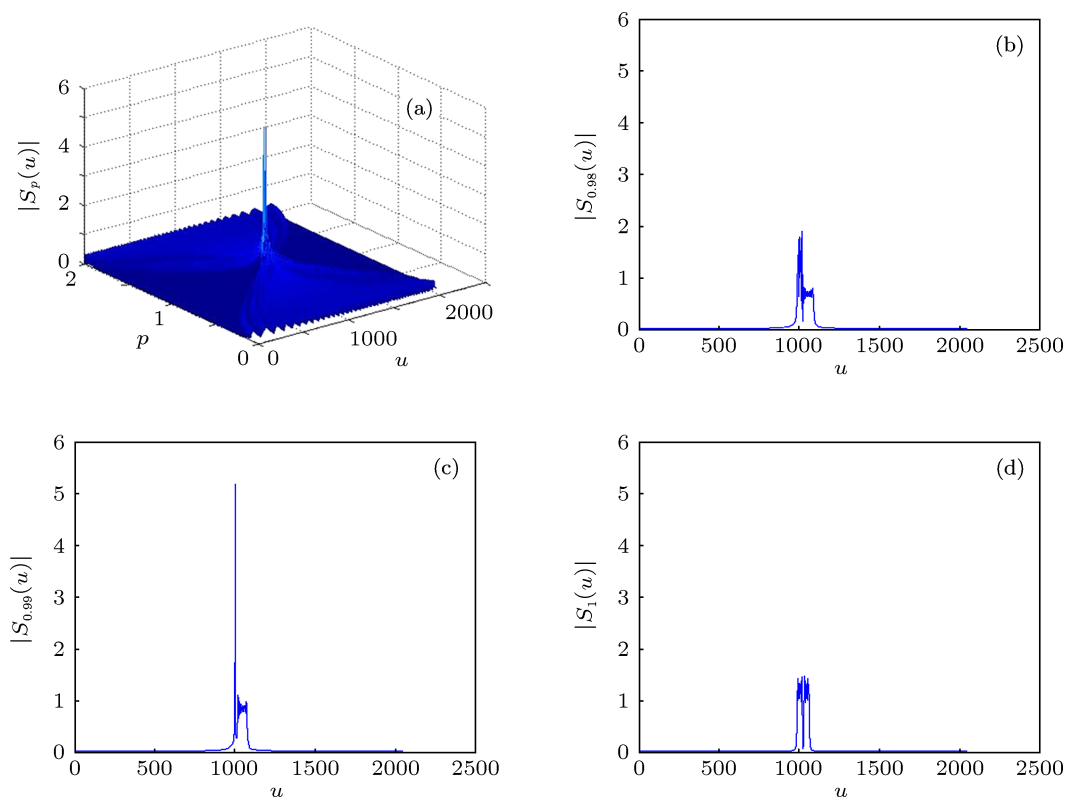


图4 LFM 信号 $s_1(t)$ 不同阶次时的分数阶域幅度

图 4(a) 为 LFM 信号 $s_1(t)$ 在 (p, u) 平面上的能量分布, 图 4(b)—(d) 分别为图 4(a) 在 $p = 0.98, 0.99, 1$ 处的截面. 易得该 LFM 信号的最优阶数 p_{bo} 为 0.99.

4.3 随机共振现象

图 5 描述的是输出信号在 0.99 阶 Fourier 变换域上所定义的信噪比 (简称信噪比) 随噪声强度增大时的变化趋势, 噪声强度 D 从 0.2 以 0.025 为步长逐渐增大至 6.5. 从图 5 中可看出, 随着噪声强度的增大, 输出信号的信噪比出现先增大后减小的非单调变化. 当 $D \in [0.2, 0.9]$ 时, 部分噪声能量转换为信号能量, 信噪比随噪声强度增大而增大. 特别地, 当 $D = 0.9$ 时, 输出信号的信噪比达到最大值. 当 $D > 0.9$ 时, 输出信号的信噪比逐渐减小, 这是因为噪声强度过大, 虽有部分噪声能量转换为信号能量, 但有大量过剩的噪声能量污染了信号. 仿真的结果与之前从粒子跃迁角度进行的理论分析完全一致, 验证了本文所提出的模型能够产生随机共振现象.

4.4 调频率对随机共振现象的影响

为进一步分析 LFM 信号在随机共振中产生的新现象, 即调频率对随机共振的影响, 将输入信号的调频率 μ 增大为 0.0002, 其余参数不变. 此时输入的 LFM 信号为 $s_2(t) = 0.3 \cos(0.0002 \times 2\pi t^2 + 0.01 \times 2\pi t)$, 可按前述方法得其最优阶数为 0.98.

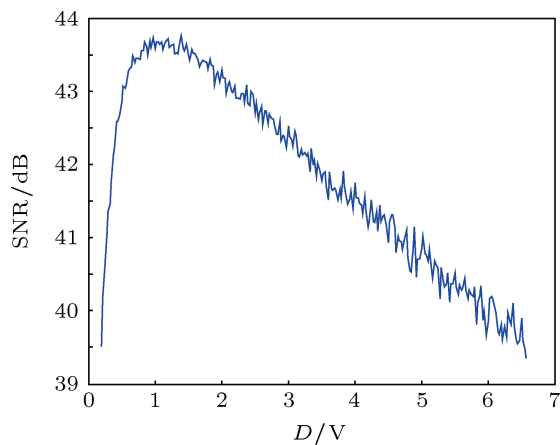


图5 输出信号信噪比随噪声强度增大时的变化 ($\mu = 0.0001$)

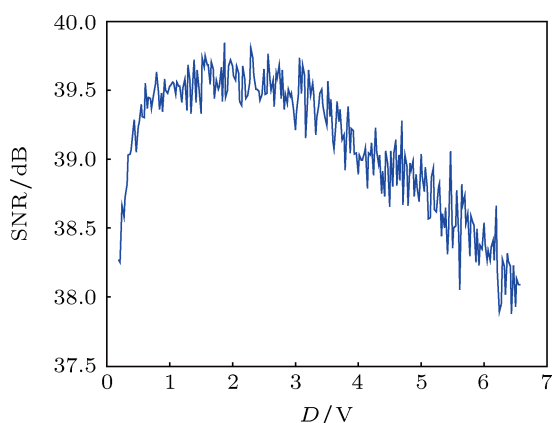


图 6 输出信号信噪比随噪声强度增大时的变化 ($\mu = 0.0002$)

图 6 描述的是在参数 $\mu = 0.0002$ 时输出信号信噪比随噪声强度增大时的变化趋势, 显然在此参数条件下也出现了随机共振. 将图 6 与图 5 进行比较, 发现在任意噪声强度下, 图 6 中的输出信号信

噪比均低于图 5 所描述的. 这是由于调频率 μ 从原来的 0.0001 增大为 0.0002, 使得信号频率增加的速度增快, 在更短的时间内超出了绝热近似条件所限制的频率范围, 从而使得随机共振现象减弱. 此结果与之前的理论分析是一致的.

5 结论

本文首先从粒子跃迁的角度, 定性分析了线性调频信号叠加高斯白噪声激励的过阻尼双稳系统, 得出该模型能够产生随机共振现象以及随机共振效应将随信号频率增大而减弱的论断. 然后首次提出以最优分数阶 Fourier 变换域上定义的信噪比作为测量手段, 对上述模型进行了定量分析. 仿真的结果验证了从理论分析中得到的论断, 表明了本文提出的方法的有效性.

[1] Benzi R, Suter A, Vulpana A 1981 *Physica A* **14** L453
 [2] Benzi R, Parisi G, Suter A, Vulpana A 1982 *Tellus* **34** 11
 [3] Gitterman M 2003 *Phys. Rev. E* **67** 057103
 [4] Jia Y, Yu S N, Li J R 2000 *Phys. Rev. E* **62** 1869
 [5] Berdichevsky V, Gitterman M 1996 *Europhys. Lett.* **36** 161
 [6] Luo X, Zhu S 2003 *Phys. Rev. E* **67** 021104
 [7] Collins J J, Chow C C, Imhoff T T 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3321

[8] Collins J J, Chow C C, Capela A C, Imhoff T T 1996 *Phys. Rev. E* **54** 5575
 [9] McNamara B, Wiesenfel K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
 [10] Tao R, Qin L, Wang Y 2004 *Theory and Applications of the Fractional Fourier Transform* (1st Ed.) (Beijing: Tsinghua University Press) p111 (in Chinese) [陶然, 齐林, 王越 2004 分数阶 Fourier 变换的原理与应用 (第一版) (北京: 清华大学出版社) 第 111 页]

Stochastic resonance of over-damped bistable system driven by chirp signal and Gaussian white noise*

Peng Hao Zhong Su-Chuan Tu Zhe Ma Hong[†]

(College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 13 September 2012; revised manuscript received 18 December 2012)

Abstract

It is improper to use frequency domain signal-to-noise ratio as a measure to judge whether stochastic resonance happens with chirp signal which is common in engineering. As a result, there is little literature on this subject. Using the energy aggregation in an optimal fractional Fourier transform domain of chirp signal, in this paper we propose a new signal-to-noise ratio defined in an optimal fractional domain to study the stochastic resonance of over-damped bistable system driven by chirp signal and Gaussian white noise. A new phenomenon is found, that is, the stochastic resonance phenomenon weakens gradually as the frequency of chirp signal increases. And it is reasonably explained in this paper. The consistency of simulation results with theoretical analysis verifies the effectiveness of the method proposed in this paper.

Keywords: chirp signal, fractional Fourier transform, stochastic resonance

PACS: 05.10.Gg, 05.40.-a, 02.50.-r

DOI: 10.7498/aps.62.080501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238).

[†] Corresponding author. E-mail: mahong@scu.edu.cn