

随机双指数记忆耗散系统的非马尔可夫扩散*

谢文贤[†] 许鹏飞[‡] 蔡力 李东平

(西北工业大学应用数学系, 西安 710072)

(2012年11月26日收到; 2012年12月12日收到修改稿)

针对具有双指数耗散记忆核函数的两自由度耦合系统, 本文利用 Laplace 变换导出了热宽带噪声激励下该系统响应二阶矩的解析表达式, 并观察到位移二阶矩不同于单自由度情形下的反常扩散 $\langle x^2(t) \rangle \propto t^\alpha$ ($0 < \alpha < 2, \alpha \neq 1$), 而是随时间及噪声等参数变化呈现普遍的振荡扩散现象. 分析可得, 阻尼耦合因子 B 使粒子远离简谐势场的束缚, $\langle x^2(t) \rangle$ 随 B 的增大扩散加剧, 而摩擦系数增大却使其趋于平稳状态. 进一步, 若两热噪声互关联时, 较小的互关联时间对二阶矩的影响较大, 反之作用较小. 伴随互关联强度递增, 位移二阶矩的扩散加剧, 位移间的相关性加强, 与物理直观相符.

关键词: 热噪声, 非马尔可夫扩散, 广义朗之万方程, 关联性

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r, 74.40.Gh, 05.10.Gg **DOI:** 10.7498/aps.62.080503

1 引言

众所周知, 广义朗之万方程 (generalized Langevin equation, GLE) 是描述反常扩散的主要途径之一^[1-5]. 大量研究表明, 在幂函数型^[6,7]、指数型^[6,8]、双指数型记忆核函数^[9-11]中均观察到不同类的反常扩散现象. Wang 等^[3,12]建立了 GLE 所对应的反常扩散及其福克-普朗克 (Fokker-Planck) 方程与概率密度函数之间的关系. Porrà 等^[6]针对 GLE 在耗散记忆核函数与噪声相关函数变化的情况下, 研究了粒子运动由平稳状态到超扩散的演化趋势, 随着参数的变化呈现出了欠扩散、正常扩散等现象. Bao 等^[4,13,14]基于 GLE 针对简谐速度噪声 (harmonic-velocity noise) 深入研究了反常扩散下的动力学等问题. Viñales 等^[7,15]则围绕 Mittag-Leffler 噪声和长时拖尾噪声 (long-time tail noise) 研究了 GLE 带有简谐振子的反常扩散现象, 大大深化了随机环境对扩散现象的影响. 除反常扩散一系列研究外, 此领域还涉及 GLE 的数值模拟^[11,16]、遍历性^[17]、随机共振^[18-20]等的研究.

上述研究结果多限于单自由度耗散系统, 而关于多自由度情形涉及较少. 多自由度情形中不容忽视的问题就是不同噪声源的互关联性^[21-28]. 以往诸多研究表明互关联性对随机共振^[22-24]、平均首次穿越^[26,27]等现象影响深刻. 近来, Wang 等^[28]在互关联噪声激励的两自由度耦合系统 (可用 GLEs 表示) 中, 细致分析了含有幂函数型的记忆核情形下的反常扩散问题. 而 Roy 等^[29]和 Kumar^[30]应用具有耦合阻尼项的两自由度耗散系统来研究电子受垂直于相平面方向的均匀磁场作用下的轨道磁力矩的特性. 但是此类系统的扩散问题笔者目前尚未见报道. 鉴于此, 本文将 GLEs 推广至互关联情形, 研究具有双指数记忆核函数和阻尼耦合的系统的响应二阶矩所呈现出的非马尔可夫扩散行为, 并分析不同噪声源间的互关联性对其影响. 具体的 GLEs 如下:

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) &= -kx(t) - \int_0^t (\beta_{xx}(t-t')\dot{x}(t') \\ &\quad + \beta_{xy}(t-t')\dot{y}(t')) dt' - B\dot{y}(t) + \xi_x(t), \\ m\ddot{y}(t) &= -ky(t) - \int_0^t (\beta_{yx}(t-t')\dot{x}(t') \end{aligned}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11101333)、陕西省自然科学基金 (批准号: 2011GQ1018) 和西北工业大学基础研究基金 (批准号: JC201152) 资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: wenxianxie@nwpu.edu.cn

[‡] 通讯作者. E-mail: pengfeixu@mail.nwpu.edu.cn

$$+ \beta_{yy}(t-t')\dot{y}(t') dt' - B\dot{x}(t) + \xi_y(t), \quad (1)$$

其中粒子质量为 m , 阻尼耦合因子为 B . 内噪声 $\xi_i(t)$ 满足 $\langle \xi_i(t) \rangle = 0$, 以及涨落耗散定理 $\langle \xi_i(t)\xi_j(t') \rangle = k_B T \beta_{ij}(|t-t'|)$ ($i = x, y$), k_B 为 Boltzmann 常数, T 为环境的绝对温度.

方程 (1) 也可视为一般机械振动理论中具有耦合黏性阻尼 B 的运动方程的推广.

2 热宽带噪声激励下的系统响应矩

2.1 两噪声不存在互关联的情形

首先考虑系统 (1) 的双指数记忆核函数 ($i = x, y$), 其满足

$$\beta_{ii}(t-t') = \frac{\beta_0 \tau_1^2}{(\tau_1^2 - \tau_2^2)} \left(\frac{1}{\tau_2} \exp\left(-\frac{(t-t')}{\tau_2}\right) - \frac{1}{\tau_1} \exp\left(-\frac{(t-t')}{\tau_1}\right) \right),$$

$$\beta_{xy}(t-t') = \beta_{yx}(t-t') = 0, \quad (2)$$

其中 τ_1 和 τ_2 为两个相关时间, β_0 为摩擦系数. 此时, 两噪声不存在互关联性, 系统 (1) 退化为具有耦合阻尼项的 GLEs. 不失一般性, 令 $m = 1$, 引入新变量 $\dot{x}(t) = v(t)$, $\dot{y}(t) = u(t)$, 并运用 Laplace 变换, 易得系统 (1) 的位移 $x(t)$, $y(t)$ 和速度 $v(t)$, $u(t)$ 的表达式

$$\begin{aligned} x(t) &= H_1(t)v_0 - H_2(t)u_0 + \int_0^t H_1(t-t')\xi_x(t') dt' \\ &\quad - \int_0^t H_2(t-t')\xi_y(t') dt', \\ v(t) &= h_1(t)v_0 - h_2(t)u_0 + \int_0^t h_1(t-t')\xi_x(t') dt' \\ &\quad - \int_0^t h_2(t-t')\xi_y(t') dt', \\ y(t) &= H_1(t)u_0 - H_2(t)v_0 + \int_0^t H_1(t-t')\xi_y(t') dt' \\ &\quad - \int_0^t H_2(t-t')\xi_x(t') dt', \\ u(t) &= h_1(t)u_0 - h_2(t)v_0 + \int_0^t h_1(t-t')\xi_y(t') dt' \\ &\quad - \int_0^t h_2(t-t')\xi_x(t') dt', \end{aligned} \quad (3)$$

其中, 取初始位移 $x_0 = y_0 = 0$ 及初始速度 $v_0 = 1.2$, $u_0 = 0.8$, 而 $\beta_{xx}(t)$, $h_i(t)$, $H_i(t)$ 分别为对应于 $\hat{\beta}_{xx}(s)$, $\hat{h}_i(s)$, $\hat{H}_i(s)$ 的逆 Laplace 变换 ($i = 1, 2$). 这里

$$\hat{\beta}_{xx}(s) = \frac{\beta_0 \tau_1^2 s}{(s\tau_1 + 1)(s\tau_2 + 1)(\tau_1 + \tau_2)}, \quad (4)$$

$$\hat{h}_1(s) = \frac{s + \hat{\beta}_{xx}(s) + \frac{k}{s}}{\left(s + \hat{\beta}_{xx}(s) + \frac{k}{s}\right)^2 - B^2},$$

$$\hat{H}_1(s) = \frac{1}{s} \hat{h}_1(s),$$

$$\hat{h}_2(s) = \frac{B}{\left(s + \hat{\beta}_{xx}(s) + \frac{k}{s}\right)^2 - B^2},$$

$$\hat{H}_2(s) = \frac{1}{s} \hat{h}_2(s). \quad (5)$$

结合 (2)–(5) 式, 并运用 Laplace 变换可得系统响应二阶矩的表达式

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{\alpha_i} f_i(\alpha_i, t) (v_0 + (-1)^i u_0) \right) \right)^2 \\ &\quad + \frac{k_B T}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^t \sum_{\alpha_i} f_i(\alpha_i, t_1) dt_1 \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t \sum_{\alpha_i} f_i(\alpha_i, t_2) \beta_{xx}(|t_1 - t_2|) dt_2 \right), \\ \langle v^2(t) \rangle &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{\alpha_i} f_{i+2}(\alpha_i, t) ((-1)^i v_0 + u_0) \right) \right)^2 \\ &\quad + \frac{k_B T}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^t \sum_{\alpha_i} f_{i+2}(\alpha_i, t_1) dt_1 \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t \sum_{\alpha_i} f_{i+2}(\alpha_i, t_2) \beta_{xx}(|t_1 - t_2|) dt_2 \right), \\ \langle x(t)y(t) \rangle &= \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{\alpha_i} f_i(\alpha_i, t) ((-1)^i v_0 + u_0) \right) \right)^2 \\ &\quad + \frac{k_B T}{2} \sum_{i=1}^2 (-1)^i \left(\int_0^t \sum_{\alpha_i} f_i(\alpha_i, t_1) dt_1 \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^t \sum_{\alpha_i} f_i(\alpha_i, t_2) \beta_{xx}(|t_1 - t_2|) dt_2 \right), \end{aligned} \quad (6)$$

其中 α_i 为如下方程 $d_i(z) = 0$ 的根 ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} d_i(z) &= (\tau_1^2 \tau_2 + \tau_1 \tau_2^2) z^4 + (\tau_1 + \tau_2) \\ &\quad \times (\tau_1 + \tau_2 + (-1)^i B \tau_1 \tau_2) z^3 \\ &\quad + [(\tau_1 + \tau_2)(k \tau_1 \tau_2 + (-1)^i B(\tau_1 + \tau_2) \\ &\quad + 1) + \beta_0 \tau_1^2] z^2 + (\tau_1 + \tau_2) (k(\tau_1 + \tau_2) \\ &\quad + (-1)^i B) z + k(\tau_1 + \tau_2), \end{aligned}$$

$$f_i(\alpha_i, t) = \left(\tau_1 + \alpha_i(\tau_1 + \tau_2)^2 + \tau_2(1 + \alpha_i^2 \tau_1^2 + \alpha_i^2 \tau_1 \tau_2) \right) \exp(-\alpha_i t) / D_i,$$

$$f_{i+2}(\alpha_i, t) = \left(\alpha_i(\tau_1 + \tau_2)(1 + \alpha_i^2 \tau_1 \tau_2) \right)$$

$$\begin{aligned}
 & + \alpha_i^2 (\tau_1 + \tau_2)^2 \exp(-\alpha_i t) / (-1)^i D_i, \\
 D_i = & (\tau_1 + \tau_2)^2 \left(3\alpha_i^2 + (-1)^i 2B\alpha_i + k \right) \\
 & + 2\alpha_i \beta_0 \tau_1^2 + (\tau_1 + \tau_2) \left(4\alpha_i^3 \tau_1 \tau_2 \right. \\
 & + (-1)^i 3B\alpha_i^2 \tau_1 \tau_2 \\
 & \left. + 2\alpha_i k \tau_1 \tau_2 + 2\alpha_i + (-1)^i B \right).
 \end{aligned}$$

由于系统 (1) 的对称性, 位移 $y(t)$ 和速度 $u(t)$ 的二阶矩与 (6) 式结构类似.

特别地, 当相关时间 $\tau_1 \rightarrow \infty$, 则 $\xi_i(t)$ ($i = x, y$) 退化为 Ornstein-Uhlenbeck 噪声, 文献 [6, 8] 对此类单自由度系统的反常扩散的研究已有报道. 进一步, 当相关时间 $\tau_2 \rightarrow 0$, 则 $\xi_i(t)$ ($i = x, y$) 退化为高斯白噪声, 系统 (1) 的耗散记忆核函数失效, 表现为马尔可夫性; 其位移二阶矩是正常扩散的. 为了具体分析噪声性质和耗散性质对扩散现象的影响, 以下讨论中均选定参数值 $k_B T = 5.0, k = 1.0$.

图 1 和图 2 中给出位移二阶矩 $\langle x^2(t) \rangle$ 随时间 t 的非马尔可夫振荡扩散. 热宽带噪声仅在其相关时间 τ_2 充分小时退化为“绿”噪声 [11]. 在“绿”噪声范围内, $\langle x^2(t) \rangle$ 随着相关时间 τ_1 的增大而递增, 但相关时间 τ_1 增加到一定程度时, $\langle x^2(t) \rangle$ 随 τ_1 的增加其变化减弱. 图 1 中 $\tau_1 = 10$ 与 $\tau_1 = 15$ 所对应的 $\langle x^2(t) \rangle$ 非常接近, 这表明 τ_1 增加到一定程度时, “绿”噪声逐渐退化成高斯白噪声, 即有 $\langle \xi_j(t) \xi_j(t') \rangle = k_B T \beta_0 \delta(|t - t'|)$ ($j = x, y$). 此时, 结合 (4)–(6) 式可得高斯白噪声激励下位移二阶矩:

$$\langle x^2(t) \rangle = (H_1(t)v_0 - H_2(t)u_0)^2 + k_B T \beta_0 \int_0^t \sum_{i=1}^2 H_i^2(t_1) dt_1,$$

其中

$$\begin{aligned}
 H_i(t) = & \frac{\sinh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{(B-\beta_0)^2-4k}\right) \exp\left(\frac{1}{2}(B-\beta_0)t\right)}{\sqrt{(B-\beta_0)^2-4k}} \\
 & + (-1)^{i+1} \frac{\sinh\left(\frac{1}{2}t\sqrt{(B+\beta_0)^2-4k}\right)}{\sqrt{(B+\beta_0)^2-4k}} \\
 & \times \exp\left(-\frac{1}{2}(B+\beta_0)t\right).
 \end{aligned}$$

当系统参数 $k = B = 0$ 时, 系统 (1) 退化为无简谐势束缚的单自由度系统, 此时, 位移二阶矩 $\langle x^2(t) \rangle$ 在“绿”噪声范围内将退化为弹道扩散 [9]. 图 2 分析了 (2) 式中摩擦系数 β_0 对位移二阶矩 $\langle x^2(t) \rangle$ 的影响. 当摩擦系数 $\beta_0 = 0.01$ 时, $\langle x^2(t) \rangle$ 呈

现振荡形式的扩散, 并且振荡幅度随着时间的演化逐渐增大. 而随着摩擦系数 β_0 的不断增大, 系统阻尼使粒子运动减弱, $\langle x^2(t) \rangle$ 明显趋于平稳状态, 即 $\langle x^2(\infty) \rangle = k_B T / k (\beta_0 \gg 1, B \ll 1)$, 符合物理直观.

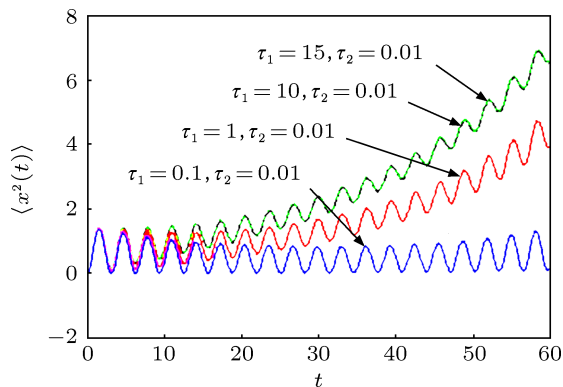


图 1 $\langle x^2(t) \rangle$ 作为 t 的函数随 τ_1 变化的曲线 ($B = 0.05, \beta_0 = 0.01$)

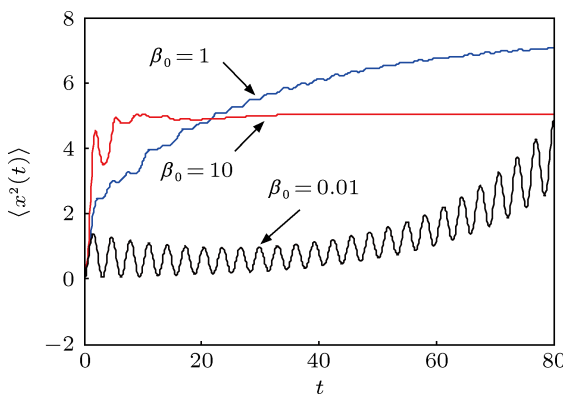


图 2 $\langle x^2(t) \rangle$ 作为 t 的函数随 β_0 变化的曲线 ($\tau_1 = 7, \tau_2 = 3, B = 0.05$)

2.2 两噪声互关联的情形

若考虑两噪声色相关的情形:

$$\langle \xi_x(t) \xi_y(t') \rangle = \frac{\lambda \sqrt{D_1 D_2}}{\tau_3} \exp\left(-\frac{|t-t'|}{\tau_3}\right), \quad (7)$$

其中 D_1 和 D_2 分别表示两激励噪声的强度 ($D_1 = D_2 = k_B T \beta_0 \tau_1^2 / (\tau_1^2 - \tau_2^2)$), λ 为互关联强度, τ_3 为互关联时间. 若 $\tau_3 \rightarrow 0$, 则 (7) 式退化为白关联情形

$$\langle \xi_x(t) \xi_y(t') \rangle = 2\lambda \sqrt{D_1 D_2} \delta(|t-t'|). \quad (8)$$

考虑到两噪声所满足涨落耗散定理, 可得系统 (1) 中记忆核函数

$$\beta_{xy}(t-t') = \frac{\lambda \beta_0 \tau_1^2}{\tau_3 (\tau_1^2 - \tau_2^2)} \exp\left(-\frac{t-t'}{\tau_3}\right). \quad (9)$$

类似 (4) 和 (5) 式, 导出 $\beta_{xy}(t), g_i(t), G_i(t)$ ($i = 1, 2$)

的 Laplace 变换如下:

$$\hat{\beta}_{xy}(s) = \frac{\lambda \beta_0 \tau_1^2}{(\tau_1^2 - \tau_2^2)(1 + s\tau_3)}, \quad (10)$$

$$\hat{g}_1(s) = \frac{s + \hat{\beta}_{xx}(s) + \frac{k}{s}}{\left(s + \hat{\beta}_{xx}(s) + \frac{k}{s}\right)^2 - \left(B + \hat{\beta}_{xy}(s)\right)^2},$$

$$\hat{G}_1(s) = \frac{1}{s} \hat{g}_1(s),$$

$$\hat{g}_2(s) = \frac{B + \hat{\beta}_{xy}(s)}{\left(s + \hat{\beta}_{xx}(s) + \frac{k}{s}\right)^2 - \left(B + \hat{\beta}_{xy}(s)\right)^2},$$

$$\hat{G}_2(s) = \frac{1}{s} \hat{g}_2(s). \quad (11)$$

结合 (4), (7), (9)—(11) 式, 可得系统 (1) 各响应的二阶矩. 这里仅列出 $\langle x^2(t) \rangle$ 的表达式:

$$\begin{aligned} \langle x^2(t) \rangle = & \frac{1}{4} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\sum_{\alpha_i} I_i(\alpha_i, t) (v_0 + (-1)^{i+1} u_0) \right) \right)^2 \\ & + \frac{k_B T}{2} \sum_{i=1}^2 \left(\int_0^t \sum_{\alpha_i} I_i(\alpha_i, t_1) dt_1 \right. \\ & \left. \times \int_0^t \sum_{\alpha_i} I_i(\alpha_i, t_2) \tilde{\beta}_i(|t_1 - t_2|) dt_2 \right). \quad (12) \end{aligned}$$

其中 α_i 为如下方程 $w_i(z) = 0$ 的根 ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} w_i(z) = & m_3 z^5 + (m_2 + (-1)^{i+1} B m_3) z^4 \\ & + (n \tau_3 + (-1)^{i+1} \lambda m_0 \tau_1 \tau_2 + m_1 \\ & + (-1)^{i+1} B m_2 + k m_3) z^3 \\ & + (1 + n + (-1)^{i+1} \lambda m_0 (\tau_1 + \tau_2) \\ & + (-1)^{i+1} B m_1 + k m_2) z^2 \\ & + ((-1)^{i+1} \lambda m_0 + (-1)^{i+1} B + k m_1) z + k, \end{aligned}$$

$$\tilde{\beta}_i(|t_1 - t_2|) = \beta (|t_1 - t_2|) + (-1)^{i+1} \beta_{xy} (|t_1 - t_2|),$$

$$\begin{aligned} I_i(\alpha_i, t) = & [(1 + m_1 \alpha_i + m_2 \alpha_i^2 + m_3 \alpha_i^3) \exp(-\alpha_i t)] \\ & \times [(-1)^{i+1} \lambda m_0 + 2(1 + n \\ & + (-1)^{i+1} \lambda m_0 (\tau_1 + \tau_2) \\ & + (-1)^{i+1} B m_1 + k m_2) \alpha_i \\ & + 3(n \tau_3 + (-1)^{i+1} \lambda m_0 \tau_1 \tau_2 + m_1 \\ & + (-1)^{i+1} B m_2 + k m_3) \alpha_i^2 + (-1)^{i+1} B \\ & + 4(m_2 + (-1)^{i+1} B m_3) \alpha_i^3 + 5 m_3 \alpha_i^4]^{-1}, \end{aligned}$$

其中 $m_0 = \beta_0 \tau_1^2 / (\tau_1^2 - \tau_2^2)$, $m_1 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3$, $m_2 = \tau_1 \tau_2 + \tau_2 \tau_3 + \tau_3 \tau_1$, $m_3 = \tau_1 \tau_2 \tau_3$, $n = \beta_0 \tau_1^2 / (\tau_1 + \tau_2)$.

图 3 描述了粒子沿着 x 轴方向的位移二阶矩 $\langle x^2(t) \rangle$ 随耦合因子 B 的变化情况, 在短时间内影响不显著, 但长时间后随着 B 的增加而其扩散加剧. 在两噪声存在互关联 ($\lambda = 1$) 情形时, 图 3 中虚线表明 $\langle x^2(t) \rangle$ 仍呈现振荡扩散, 且耦合因子 B 同样将促进 $\langle x^2(t) \rangle$ 的扩散. 相较于无关联 ($\lambda = 0$) 情形 (实线), 互关联情形的扩散加剧.

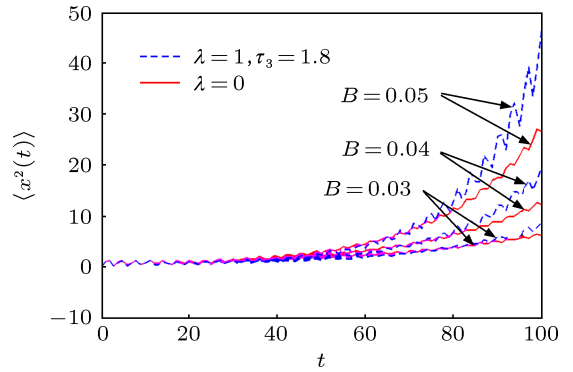


图 3 两噪声有(无)互关联情形下 $\langle x^2(t) \rangle$ 作为 t 的函数随 B 变化的曲线 ($\tau_1 = 7, \tau_2 = 3, \beta_0 = 0.05$)

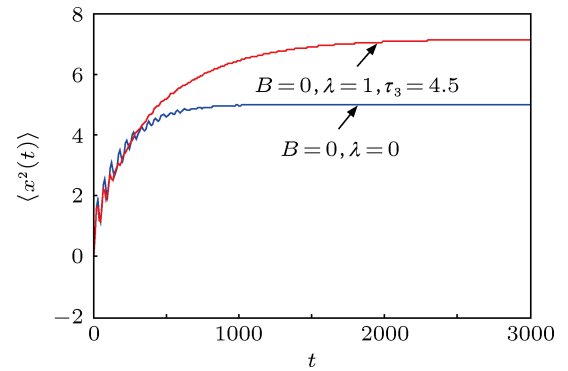


图 4 $\langle x^2(t) \rangle$ 作为 t 的函数随 B 和 λ 变化的曲线 ($\tau_1 = 7, \tau_2 = 3, \beta_0 = 0.05$)

图 4 描述了系统 (1) 的位移二阶矩 $\langle x^2(t) \rangle$ 在阻尼耦合因子 $B = 0$ 时随时间 t 的变化情况. 当两噪声无关联 ($\lambda = 0$) 时, 系统退化为仅受简谐势场束缚的单自由度系统, 此时, $\langle x^2(t) \rangle$ 在长时间后趋于平稳状态, 即 $\langle x^2(\infty) \rangle = k_B T / k$. 而在两噪声互关联 ($\lambda = 1, \tau_3 = 4.5$) 时, 系统 (1) 退化为仅受二维简谐势场束缚的两自由度系统, 互关联性延长了 $\langle x^2(t) \rangle$ 的弛豫时间.

结合图 3 和图 4, 在两噪声有(无)关联情形下, 耦合因子 B 将使得粒子远离简谐势场的束缚, 而呈

现普遍的振荡扩散.

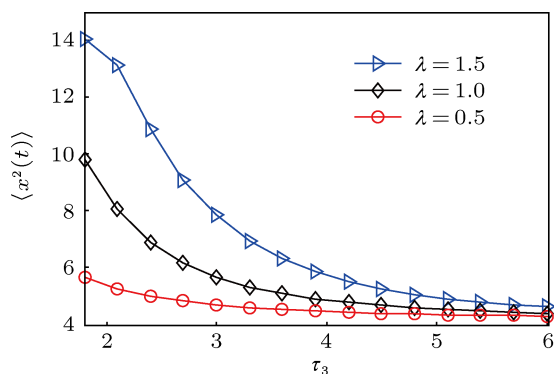


图5 $\langle x^2(t) \rangle$ 作为 τ_3 的函数随 λ 变化的曲线 ($\tau_1 = 7, \tau_2 = 3, B = 0.05, \beta_0 = 0.3, t = 30$)

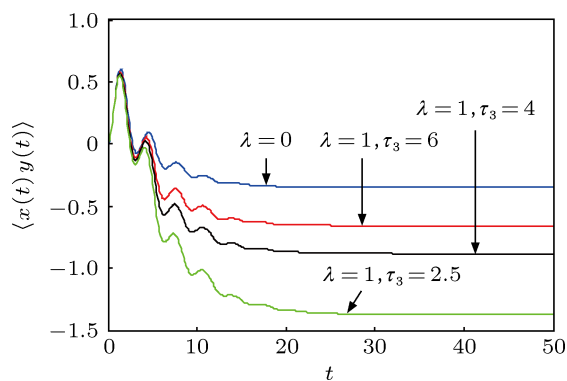


图6 $\langle x(t)y(t) \rangle$ 作为 t 的函数随 τ_3 和 λ 变化的曲线 ($\tau_1 = 10, \tau_2 = 0.01, B = 0.02, \beta_0 = 0.3$)

图5描述了位移二阶矩 $\langle x^2(t) \rangle$ (12) 式作为互关联时间 τ_3 的函数, 随着两噪声间的互关联强度 λ 变化情况. $\langle x^2(t) \rangle$ 随着 τ_3 的增加而单调递减, 突显了色关联性 (7) 式演化为白关联性 (8) 式时, $\langle x^2(t) \rangle$ 的扩散得到显著加剧. $\langle x^2(t) \rangle$ 随着互关联强度 λ 的增加而增大, 即两个色噪声之间的互关联性越强, 位移二阶矩扩散就越强. 图6表明, 色关联性 (7) 式延缓 $\langle x(t)y(t) \rangle$ 趋于平稳状态的趋势, τ_3 越小其负相关性越强, 弛豫时间越长.

3 结论

本文导出了 (互关联) 热宽带噪声激励的具有耦合阻尼项的系统 (1) 响应二阶矩的解析表达式, 并讨论了 $\langle x^2(t) \rangle$ 和 $\langle x(t)y(t) \rangle$ 随各系统参数的变化情况. 粒子在简谐势场中受阻尼耦合因子 B 的作用, 位移二阶矩 $\langle x^2(t) \rangle$ 出现了普遍振荡式的非马尔可夫扩散, 其在一定范围内随噪声相关时间 τ_1 和耦合因子 B 的增大而扩散加剧, 耗散记忆核函数的摩擦系数不断增大将使 $\langle x^2(t) \rangle$ 呈现平稳状态. 而两热宽带噪声之间的互关联性对响应二阶矩起着十分显著的影响: 互关联强度对 $\langle x^2(t) \rangle$ 的非马尔可夫扩散呈现促进作用, 并加强了两位移间的互相关性; 相反, 较大的互关联时间却抑制 $\langle x^2(t) \rangle$ 扩散和位移间相关性的加强. 上述二阶矩特性将有助于系统 (1) 的随机共振及遍历性的讨论.

[1] Bao J D 2005 *Progress Phys.* **25** 359 (in Chinese) [包景东 2005 物理学进展 **25** 359]
 [2] Zhuo Y Z 2004 *Nuclear Phys. Rev.* **21** 83 (in Chinese) [卓益忠 2004 原子核物理评论 **21** 83]
 [3] Wang K G, Tokuyama M 1999 *Physica A* **265** 341
 [4] Bao J D, Zhou Y, Lü K 2006 *Phys. Rev. E* **74** 041125
 [5] Siegle P, Goychuk I, Hänggi P 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 100602
 [6] Porrá J M, Wang K G, Masoliver J 1996 *Phys. Rev. E* **53** 5872
 [7] Viñales A D, Despósito M A 2006 *Phys. Rev. E* **73** 016111
 [8] Bao J D, Bai Z W 2005 *Chin. Phys. Lett.* **22** 1845
 [9] Bao J D, Zhuo Y Z 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 138104
 [10] Siegle P, Goychuk I, Talkner P, Hänggi P 2010 *Phys. Rev. E* **81** 011136
 [11] Bao J D 2004 *J. Stat. Phys.* **114** 503
 [12] Wang K G 1992 *Phys. Rev. A* **45** 833
 [13] Bao J D, Song Y L, Ji Q, Zhuo Y Z 2005 *Phys. Rev. E* **72** 011113
 [14] Bao J D, Zhuo Y Z, Oliveira F A, Hänggi P 2006 *Phys. Rev. E* **74** 061111
 [15] Viñales A D, Wang K G, Despósito M A 2009 *Phys. Rev. E* **80** 011101
 [16] Lü K, Bao J D 2005 *Phys. Rev. E* **72** 067701
 [17] Plyukhin A V 2011 *Phys. Rev. E* **83** 062102
 [18] Neiman A, Sung W 1996 *Phys. Lett. A* **223** 341
 [19] Bai W S M, Peng H, Tu Z, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210501 (in Chinese) [白文斯密, 彭皓, 屠浙, 马洪 2012 物理学报 **61** 210501]
 [20] Zhong S C, Gao S L, Wei K, Ma H 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 170501 (in Chinese) [钟苏川, 高仕龙, 韦鹏, 马洪 2012 物理学报 **61** 170501]
 [21] Xu W, Jin Y F, Xu M, Li W 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5027 (in Chinese) [徐伟, 靳艳飞, 徐猛, 李伟 2005 物理学报 **54** 5027]
 [22] Jin Y F, Hu H Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2895 (in Chinese) [靳艳飞, 胡海岩 2009 物理学报 **58** 2895]
 [23] Jin Y F 2012 *Physica A* **391** 1928
 [24] Zeng C H, Wang H, Wang H T 2011 *Chin. Phys. B* **20** 050502
 [25] Fuliński A, Telejko T 1991 *Phys. Lett. A* **152** 11
 [26] Zhang N M, Xu W, Wang C Q 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5083 (in Chinese) [张娜敏, 徐伟, 王朝庆 2007 物理学报 **56** 5083]
 [27] Jiang L L, Luo X Q, Wu D, Zhu S Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 090503
 [28] Wang Y X, Zhao N R, Yan Y J 2012 *Phys. Rev. E* **85** 041142
 [29] Roy D, Kumar N 2008 *Phys. Rev. E* **78** 052102
 [30] Kumar N 2012 *Phys. Rev. E* **85** 011114

Non-Markovian diffusion of the stochastic system with a biexponential dissipative memory kernel*

Xie Wen-Xian[†] Xu Peng-Fei[‡] Cai Li Li Dong-Ping

(Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China)

(Received 26 November 2012; revised manuscript received 12 December 2012)

Abstract

In this paper, second-moments of the responses are analytically solved by the Laplace transform in a coupling two-degree-of-freedom system with a biexponential dissipative memory kernel function driven by a thermal broadband noise. The mean square displacement $\langle x^2(t) \rangle$ is different from anomalous diffusion (i.e. $\langle x^2(t) \rangle \propto t^\alpha$ ($0 < \alpha < 2$, $\alpha \neq 1$)), which is induced by the single-degree-of-freedom generalized Langevin equation. The oscillation-diffusion of $\langle x^2(t) \rangle$ with the change of time and noise parameters is observed generally. According to our analysis, a particle confined by the harmonic potential can escape with the help of the coupling-damping factor B . The diffusion of $\langle x^2(t) \rangle$ aggravates with B increasing. However, $\langle x^2(t) \rangle$ tends to the stationary state with the increase of the friction coefficient. Further, if the two thermal noises are in cross-correlation, smaller cross-correlation time has a deeper influence on second-moments. Meanwhile, the diffusion aggravates and the cross-correlation between two displacements strengthens markedly with cross-correlation strength increasing. It is consistent with physical intuition.

Keywords: thermal noise, non-Markovian diffusion, generalized Langevin equation, correlation

PACS: 05.40.-a, 02.50.-r, 74.40.Gh, 05.10.Gg

DOI: 10.7498/aps.62.080503

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11101333), the Natural Science Foundation of Shaanxi, China (Grant No. 2011GQ1018), and the Northwestern Polytechnical University Foundation for Fundamental Research, China (Grant No. JC201152).

[†] Corresponding author. E-mail: wenxianxie@nwpu.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: pengfeixu@mail.nwpu.edu.cn