

基于自适应滑模控制的不同维分数阶混沌系统的同步*

黄丽莲[†] 齐雪

(哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 哈尔滨 150001)

(2012年10月23日收到; 2012年12月20日收到修改稿)

针对异结构不同维分数阶混沌系统的广义同步问题进行研究, 设计了一种将滑模变结构理论和自适应控制理论相结合的方法. 通过设计一种对外界干扰具有强鲁棒性的分数阶滑模面, 以及构造合适的自适应滑模控制器, 该控制器将系统的运动控制到滑模面上, 使系统轨道沿滑动模运动到所需的控制状态, 最终实现了两个不同维异结构混沌系统之间的广义同步. 以四维超混沌 Chen 系统和三维 Chen 混沌系统为例, 对这两个系统分别进行升维和降维的同步仿真. 仿真模拟结果表明, 运用本文设计的控制器, 经过短暂的时间, 两系统的广义误差变量始终平稳地趋于零, 即证明了这种控制器的有效性.

关键词: 分数阶混沌系统, 异结构, 自适应滑模控制, 混沌同步

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Gg, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.080507

1 引言

分数阶微积分是研究分数阶次的微积分算子特性以及分数阶微分方程理论, 它起源于 19 世纪, 已有近 300 年的历史. 随着对分数阶微积分研究的不断深入, 研究者普遍认为分数阶微积分作为整数阶微积分的自然推广^[1], 极大地扩展了人们所了解的整数阶微积分的描述能力, 完善了人们对世界的认知. 近年来, 人们将分数微积分算子引入到动力学系统中, 分数阶动力学系统的混沌、混沌控制与同步的研究成为当今研究的热点之一^[2-7], 而分数阶混沌系统产生的混沌现象更能反映系统的工程物理现象, 具有更普遍的意义.

混沌同步是实现混沌保密通信的基础^[8,9], 近年来, 人们提出了很多分数阶混沌系统的同步方法, 如线性反馈控制^[10]、耦合同步^[11]、广义同步^[12]、自适应同步^[13]、投影同步^[14]、滑模控制^[15]等各种同步控制方法. 目前, 关于分数阶混沌系统同步

的研究, 大多是针对结构相同、初值或参数不同的分数阶混沌系统或分数阶超混沌系统的同步, 如文献^[16-23], 具体针对不同维分数阶混沌系统间的同步的研究还比较少, 如文献^[24-26]. 不同维的异结构混沌系统也就意味着两个系统的状态变量随时间的演化有着严格的不同, 而且系统的拓扑结构和几何结构也会有一定的差异, 即它们之间不能通过拓扑变换从一个系统变换到另外一个系统. 在实际的物理、通信以及自动控制等系统中, 很难找到两个完全相同的系统, 所以需要研究不同维系统之间的关系. 因此, 研究不同维的异结构混沌系统之间的同步控制, 则更具有一般性.

滑模变结构控制出现于 20 世纪 50 年代, 有 50 多年的发展历程, 已经形成了一个相对独立的研究分支, 成为自动控制系统的一种设计方法, 适用于线性与非线性系统、连续与离散系统、确定性与不确定性系统等, 并且在实际工程中逐渐得到推广应用. 由于滑动模态可以进行设计, 而且它与系统的参数无关, 即使外界存在干扰, 滑模运动也会保

* 国家自然科学基金(批准号: 61203004)和黑龙江省自然科学基金(批准号: F201220)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: lilian.huang@163.com

持不变. 因此, 处于滑模运动的系统具有很好的可靠性、鲁棒性, 并且能够快速响应, 另外它不需要系统进行在线辨识, 而且物理实现简单, 因此滑模变结构控制方法受到了学者的高度重视.

本文针对不同维的异结构分数阶混沌系统的广义同步, 基于滑模变结构控制与自适应控制方法相结合的原理, 首先设计了一个对外界干扰具有较强的鲁棒性的分数阶滑模面, 然后构造了一种自适应滑模控制器, 该控制器将系统的运动控制到滑模面上, 使系统轨道沿滑动模运动到所需的控制状态, 从而最终实现了误差系统稳定在平衡点. 最后以四维超混沌 Chen 系统和三维 Chen 混沌系统为例, 来实现混沌系统的同步控制的仿真分析. 本文的研究拓展了滑模变结构控制的研究领域, 缩短控制理论研究与实际应用的差距; 由于滑模控制具有对外界干扰的强鲁棒性, 因此, 将滑模变结构控制引入混沌同步中更具有实际意义.

2 基于自适应滑模控制的分数阶混沌系统的同步理论

2.1 控制同步问题描述

考虑如下两个分数阶混沌系统, 分别作为驱动系统和响应系统:

$$D_t^q \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (1)$$

$$D_t^q \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{U}, \quad (2)$$

其中 D_t^q 为微分算子, $0 < q < 1$, 它也可写成 $\frac{d^q}{dt^q}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ 表示驱动系统的状态变量, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ 表示响应系统的状态变量, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ 和 $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ 分别为驱动系统和响应系统的线性部分, $\mathbf{f}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, $\mathbf{g}(\mathbf{y}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ 分别是驱动系统和响应系统的非线性部分, \mathbf{U} 为待设计的响应系统控制器.

我们的目的是去设计控制器 \mathbf{U} 使得驱动 - 响应系统达到同步, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0$, 定义广义同步误差为 $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\mathbf{e} = (e_1, e_2, \dots, e_n)^T$, 则得到误差动力系统为

$$\begin{aligned} D_t^q \mathbf{e} &= D_t^q (\mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}) = D_t^q \mathbf{y} - \mathbf{C}D_t^q \mathbf{x} \\ &= \mathbf{B}\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} \\ &\quad - \mathbf{C}\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{U}. \end{aligned} \quad (3)$$

在滑模变结构控制中, 系统从初始状态运动到不动点的过程可分成两个阶段, 也就是两种模态, 第一阶段是趋近运动, 第二阶段是滑动模态. 所以根据滑模变结构控制的思想, 为了使系统得到较好的滑模运动, 首先设计了一个对外界干扰具有较强的鲁棒性的分数阶滑模面, 使系统具有良好的动态特性; 其次根据滑模可到达条件设计了自适应滑模控制器, 该控制器可使系统从空间中的任意一点出发的轨线都能在有限时间内收敛到滑模面上.

2.2 分数阶滑模面设计

首先, 选取滑模面为

$$\begin{aligned} s_i &= D_t^{q-1} e_i + \int_0^t e_i(\tau) d\tau \\ (i &= 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \quad (4)$$

当系统发生滑模运动时, 需要满足如下条件:

$$s_i = D_t^{q-1} e_i + \int_0^t e_i(\tau) d\tau = 0, \quad (5)$$

$$\dot{s}_i = D_t^q e_i + e_i = 0. \quad (6)$$

由上方程可得

$$D_t^q e_i = -e_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (7)$$

显然, (7) 式渐进稳定, 那么, 随着时间趋近无穷, 系统的误差变量趋于零, 即 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}(t)\| = 0$, 从而实现了驱动系统和响应系统的同步. 由 (7) 式可知, 当受控系统进行滑动运动时, 系统对外部干扰不敏感, 具有很强的鲁棒性.

2.3 控制器设计

定理 1 为了使系统 (1) 和 (2) 达到同步, 设计如下控制器:

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 - \mathbf{B}\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad (8)$$

其中 $\mathbf{U}_0 = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$, $u_i = -\mu k_i \sum_{j=1}^n |e_j| \text{sgn}(s_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $\mu > 0$, k_i 的自适应率为 $\dot{k}_i = \theta \sum_{j=1}^n |e_j| |s_i|$ (θ 为大于零的常数). 此时, 从任意初始条件出发的误差系统将在有限时间内达到或趋近滑模面 $\mathbf{s} = 0$, 即始终满足滑模到达条件.

证明 (3) 式中系数矩阵 B 可以写成

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix},$$

则

$$Be = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j}e_j \\ \sum_{j=1}^n b_{2j}e_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj}e_j \end{bmatrix}, \quad (9)$$

此时, 误差系统可以改写成

$$\begin{bmatrix} D_t^q e_1 \\ D_t^q e_2 \\ \vdots \\ D_t^q e_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n b_{1j}e_j - \mu k_1 \sum_{j=1}^n |e_j| \operatorname{sgn}(s_1) \\ \sum_{j=1}^n b_{2j}e_j - \mu k_2 \sum_{j=1}^n |e_j| \operatorname{sgn}(s_2) \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n b_{nj}e_j - \mu k_n \sum_{j=1}^n |e_j| \operatorname{sgn}(s_n) \end{bmatrix}. \quad (10)$$

由于 B 是常数矩阵, 那么一定存在一个足够大的正数 M , 满足下式 $0 \leq \|B\| = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \leq M$.

选取 Lyapunov 函数为: $V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n s_i^2 + \frac{1}{2\theta} \sum_{i=1}^n \mu(k_i - k^*)^2$, 其中 $k^* > \frac{M+1}{\mu}$.

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \sum_{i=1}^n s_i \dot{s}_i + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mu(k_i - k^*) \dot{k}_i \\ &= \sum_{i=1}^n s_i (D_t^q e_i + e_i) + \sum_{i=1}^n \frac{1}{\theta} \mu(k_i - k^*) \dot{k}_i \\ &= \sum_{i=1}^n s_i \sum_{j=1}^n b_{ij}e_j - \sum_{i=1}^n s_i \cdot \mu k_i \sum_{j=1}^n |e_j| \operatorname{sgn}(s_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n s_i e_i + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{\theta} \mu(k_i - k^*) \theta \left(\sum_{j=1}^n |e_j| \right) |s_i| \right) \\ &\leq \sum_{i=1}^n |s_i| \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \cdot |e_j| \right) + \sum_{i=1}^n |s_i| \cdot \sum_{j=1}^n |e_j| \\ &\quad - \mu k^* \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |e_j| |s_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^n |s_i| \cdot \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^n |e_j| \right) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |s_i| \cdot \sum_{j=1}^n |e_j| - \mu k^* \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |e_j| |s_i| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \|B\| \sum_{i=1}^n |s_i| \cdot \sum_{j=1}^n |e_j| + \sum_{i=1}^n |s_i| \cdot \sum_{j=1}^n |e_j| \\ &\quad - \mu k^* \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |e_j| |s_i| \\ &\leq (M+1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |e_j| |s_i| - \mu k^* \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |e_j| |s_i| \\ &= -(\mu k^* - M - 1) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |e_j| |s_i| \leq 0. \quad (11) \end{aligned}$$

这表明, 从任意初始条件出发的误差系统满足滑模到达条件, 在滑模面 $s = 0$ 以外的系统运动点在有限时间 t 内到达或趋近滑模面 $s = 0$, 从而最终实现了误差系统 (10) 稳定在平衡点, 即完成了驱动系统与响应系统之间的同步.

由上述两个证明可得, 在控制器的作用下, 驱动系统与响应系统可以达到混沌同步.

3 数值仿真

为了验证所提出的理论的有效性, 我们取两个不同的系统进行数值模拟, 以三维分数阶 Chen 混沌系统和四维分数阶超混沌 Chen 系统为例, 对这两个系统分别进行升维和降维的同步仿真, 即分别讨论 $m > n$ 和 $m < n$ 的两种情况, 其中, m 代表驱动系统的维数, n 代表响应系统的维数.

3.1 $m > n$ 的情况

分别选取四维分数阶超混沌 Chen 系统和三维分数阶 Chen 系统作为驱动系统和响应系统, 驱动系统表达式如下:

$$\begin{aligned} D_t^q x &= Ax + f(x) \\ &= \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & \zeta \\ \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \\ x_2 x_3 \end{bmatrix}, \quad (12) \end{aligned}$$

其中, 当 $\alpha = 35, \beta = 7, \gamma = 12, \zeta = 1, \zeta = 3, r = 0.5, q = 0.9$ 时, 系统存在混沌吸引子.

响应系统表达式如下:

$$D_t^q \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} + \mathbf{g}(\mathbf{y}) + \mathbf{U}$$

$$= \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \end{bmatrix} + \mathbf{U}, \quad (13)$$

其中, 当 $a = 35, b = 3, c = 28, q = 0.9$ 时, 系统存在混沌吸引子. \mathbf{U} 是所设计的控制器.

选取矩阵 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, 此时, 误差

系统 $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}$ 可以写成

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1 \\ e_2 = y_2 - x_2 \\ e_3 = y_3 - (x_2 + x_3) \end{cases}$$

根据定理 1, 控制器 \mathbf{U} 的表达式如下:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} x_4 - \mu k_1 (|e_1| + |e_2| + |e_3|) \text{sgn}(s_1) \\ 14x_1 - 16x_2 + y_1 y_3 - x_1 x_3 - \mu k_2 (|e_1| + |e_2| + |e_3|) \text{sgn}(s_2) \\ 7x_1 + 15x_2 - y_1 y_2 - x_1 x_3 + x_1 x_2 - \mu k_3 (|e_1| + |e_2| + |e_3|) \text{sgn}(s_3) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

k_i 的自适应率表达式如下:

$$\begin{cases} \dot{k}_1 = \theta (|e_1| + |e_2| + \dots + |e_n|) \cdot |s_1| \\ \dot{k}_2 = \theta (|e_1| + |e_2| + \dots + |e_n|) \cdot |s_2| \\ \dot{k}_3 = \theta (|e_1| + |e_2| + \dots + |e_n|) \cdot |s_3| \end{cases} \quad (15)$$

状态初始值分别选取为 $(0.1, 0.5, -5, -5)$ 和 $(2, -5, -3)$, 取阶次 $q = 0.9$, 参数 $\mu = 0.01, \theta = 2$, 则驱动系统和响应系统的维数分别是 3.6 和 2.7, 时间步长为 $h = 0.002$, 根据定理 1 进行数值仿真, 仿真结果如图 1 所示.

通过实例仿真可以看出, 在控制器的作用下, 两个系统个状态变量的差值最终达到了渐进稳定, 从而实现了两个不同维异结构系统之间的同步.

3.2 $m < n$ 的情况

我们选取三维分数阶 Chen 系统作为驱动系统, 四维分数阶 Chen 超混沌系统作为响应系统. 驱动系统表达式如下:

$$D_t^q \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

$$= \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c-a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -x_1 x_3 \\ x_1 x_2 \end{bmatrix}, \quad (16)$$

其中, 当 $a = 35, b = 3, c = 28, q = 0.9$ 时, 系统处于混沌状态.

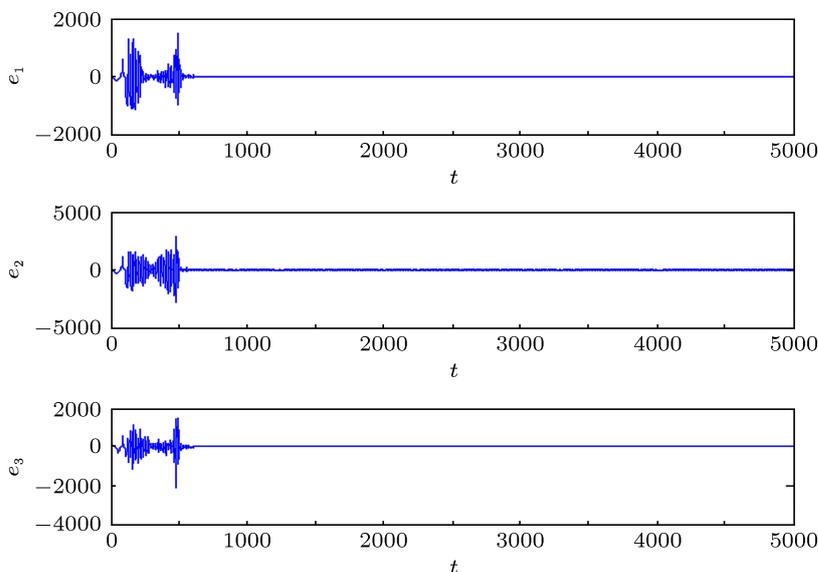


图 1 误差系统状态变量的曲线

响应系统表达式如下:

$$D_t^q \mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{y} + g(\mathbf{y}) + \mathbf{U}$$

$$= \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha & 0 & \zeta \\ \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -y_1 y_3 \\ y_1 y_2 \\ y_2 y_3 \end{bmatrix} + \mathbf{U}, \quad (17)$$

其中, 当 $\alpha = 35, \beta = 7, \gamma = 12, \zeta = 1, \zeta = 3, r = 0.5, q = 0.9$, 系统处于混沌状态. \mathbf{U} 是所设计的控制器.

选取矩阵 $\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 此时, 误差系

统 $\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{C}\mathbf{x}$ 可以写成

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1 \\ e_2 = y_2 - x_2 \\ e_3 = y_3 - x_3 \\ e_4 = y_4 - (x_1 - x_2) \end{cases}.$$

根据定理 1, 控制器 \mathbf{U} 的表达式如下:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 - \mu k_1(|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|)\text{sgn}(s_1) \\ -14x_1 + 16x_2 + y_1 y_3 - x_1 x_3 - \mu k_2(|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|)\text{sgn}(s_2) \\ -y_1 y_2 + x_1 x_2 - \mu k_3(|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|)\text{sgn}(s_3) \\ 6.5x_2 - 27.5x_1 - y_2 y_3 + x_1 x_3 - \mu k_4(|e_1| + |e_2| + |e_3| + |e_4|)\text{sgn}(s_4) \end{bmatrix}, \quad (18)$$

k_i 的自适应率表达式如下:

$$\begin{cases} \dot{k}_1 = \theta(|e_1| + |e_2| + \dots + |e_n|) \cdot |s_1| \\ \dot{k}_2 = \theta(|e_1| + |e_2| + \dots + |e_n|) \cdot |s_2| \\ \dot{k}_3 = \theta(|e_1| + |e_2| + \dots + |e_n|) \cdot |s_3| \\ \dot{k}_4 = \theta(|e_1| + |e_2| + \dots + |e_n|) \cdot |s_4| \end{cases} \quad (19)$$

状态初试值分别选取为 $(0.5, 0.5, 0.1)$ 和 $(0.5, 0.5, -5, 0.1)$, 取阶次 $q = 0.9$, 参数 $\mu = 0.01, \theta = 2$ 时, 则驱动系统和响应系统的维数分别是

2.7 和 3.6, 时间步长为 $h = 0.002$, 根据定理 1 进行数值仿真, 仿真结果如图 2 所示.

仿真结果表明两系统从任意初始条件出发, 在控制器的作用下, 同步误差系统渐进稳定, 从而实现了两个不同维异结构系统之间的同步. 另外, 我们对三维分数阶 Lu 系统和四维分数阶 Chen 超混沌系统也进行了升维和降维的同步仿真, 仿真结果也表明这两个不同维异结构系统能够实现同步, 表明该理论的有效性和普遍性.

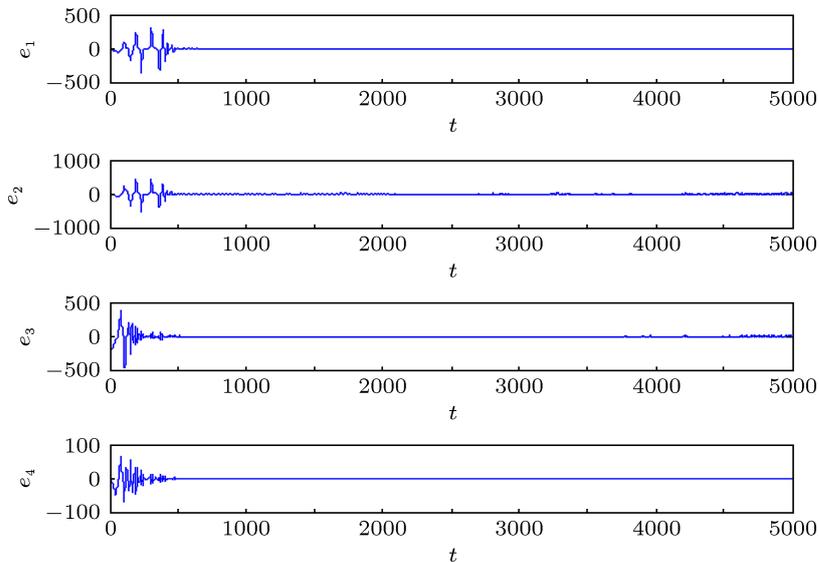


图2 误差系统状态变量的曲线

4 结论

本文根据自适应滑模控制策略, 实现了两个异结构不同维混沌系统之间的混沌同步控制. 为了使系统得到很好的滑模运动, 首先设计了一个对外界干扰具有较强的鲁棒性的分数阶滑模面, 其次根据滑模可到达条件设计了自适应滑模控制器, 该控制

器可使系统从空间中的任意一点出发的轨线都能在有限时间内收敛到滑模面上. 利用四维超混沌 Chen 系统和三维 Chen 混沌系统为例进行仿真分析, 仿真模拟结果表明, 运用本文设计的控制器, 经过短暂的时间, 两种不同拓扑结构系统的广义误差变量始终平稳地趋于零, 即证明了这种控制器的可行性和有效性.

-
- [1] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (New York: Academic Press)
- [2] Li X J, Liu J, Dong P Z, Xing L F 2009 *J. Wuhan Univ. Sci. Engin.* **22** 30
- [3] Qiao Z M, Jin Y R 2010 *J. Anhui Univ. (Natural Science Edition)* **34** 23
- [4] Zhang R X, Yang S P 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1549 (in Chinese) [张若洵, 杨世平 2010 物理学报 **59** 1549]
- [5] Xu Z, Liu C X, Yang T 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1524 (in Chinese) [许喆, 刘崇新, 杨韬 2010 物理学报 **59** 1524]
- [6] Liang C X, Tang J S 2008 *Chin. Phys. B* **17** 135
- [7] Zhang H G, Fu J, Ma T D, Tong S C 2009 *Chin. Phys. B* **18** 969
- [8] Kuang J Y, Deng K, Huang R H 2001 *Acta Phys. Sin.* **50** 1856 (in Chinese) [匡锦瑜, 邓昆, 黄荣怀 2001 物理学报 **50** 1856]
- [9] Liu F, Ren Y, Shan X M, Qiu Z L 2002 *Chaos Soliton. Fract.* **13** 723
- [10] Wang F Q, Liu C X 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 5055 (in Chinese) [王发强, 刘崇新 2006 物理学报 **55** 5055]
- [11] Gao X, Yu J B 2005 *Chaos Soliton. Fract.* **26** 141
- [12] Li G H 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 999 (in Chinese) [李国辉 2004 物理学报 **53** 999]
- [13] Li Z, Han C Z 2002 *Chin. Phys.* **11** 666
- [14] Huang L L, Ma N 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160510 (in Chinese) [黄丽莲, 马楠 2012 物理学报 **61** 160510]
- [15] Mohammad S T, Mohammad H 2008 *Physica A: Statist. Mech. Appl.* **387** 57
- [16] Wu X J, Li J, Chen G R 2008 *J. Franklin Institue* **345** 392
- [17] Zhang H, Ma X K, Yang Y, Xu C D 2005 *Chin. Phys.* **14** 86
- [18] Li H Y, Hu Y A 2011 *Commun. Nolinear Sci. Numer. Simulat.* **16** 3904
- [19] Shao S Q, Gao X, Liu X W 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6815 (in Chinese) [邵仕泉, 高心, 刘兴文 2007 物理学报 **56** 6815]
- [20] Faieghi M R, Delavari H 2012 *Commun. Nolinear Sci. Numer. Simulat.* **17** 731
- [21] Zhu H, Zhou S B, He Z S 2009 *Chaos Soliton. Fract.* **41** 2733
- [22] Wang X Y, He Y J 2008 *Phys. Lett. A* **372** 435
- [23] Wang X Y, Wang M J 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6843 (in Chinese) [王兴元, 王明军 2007 物理学报 **56** 6843]
- [24] Zhang G, Liu Z R, Ma Z J 2007 *Chaos Soliton. Fract.* **32** 773
- [25] Bowong S, McClintock V E P 2006 *Phys. Lett. A* **358** 134
- [26] Wang F Q, Liu C X 2005 *J. North China Eletric Power Univ.* **32** 11 (in Chinese) [王发强, 刘崇新 2005 华北电力大学学报 **32** 11]

The synchronization of fractional order chaotic systems with different orders based on adaptive sliding mode control*

Huang Li-Lian[†] Qi Xue

(College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China)

(Received 23 October 2012; revised manuscript received 20 December 2012)

Abstract

In this paper, based on sliding mode control and adaptive control theory, the synchronization of two different fractional order chaotic systems is investigated. First, a fractional sliding surface with strong robustness is designed and a suitable adaptive sliding controller is constructed, then the error states of the systems are controlled to the sliding surface via the method to guarantee the synchronized behaviors between two fractional chaotic systems. Numerical simulations on the hyper Chen chaotic systems and Chen chaotic system are also carried out respectively. Simulation results show that the generalized errors tend to zero after a short time, and the effectiveness and feasibility of this method are well verified.

Keywords: fractional order chaotic systems, different-structure, adaptive sliding mode control, chaos synchronization

PACS: 05.45.Xt, 05.45.Gg, 05.45.Pq

DOI: 10.7498/aps.62.080507

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61203004) and the Natural Science Foundation of Heilongjiang Province, China (Grant No. F201220).

[†] Corresponding author. E-mail: lilian.huang@163.com