

## 磁电超材料折射率特性分析\*

徐新河<sup>1)2)†</sup> 吴夏<sup>1)</sup> 肖绍球<sup>2)</sup> 甘月红<sup>1)</sup> 王秉中<sup>2)</sup>

1) (南昌航空大学, 南昌 330063)

2) (电子科技大学应用物理研究所, 成都 610054)

(2012年11月13日收到; 2012年12月28日收到修改稿)

基于麦克斯韦旋度方程, 将磁电超材料板中的电元件和磁元件分别等效为面电流和面磁流, 通过计算这些周期性面电流和面磁流在某个磁电超材料板上产生的总电场和总磁场, 获得了关于面磁流密度和面电流密度的两个方程, 进而推导出了周期性磁电超材料折射率与磁元件的磁导率、电元件的介电常数和空间色散项之间关系的解析公式. 与传统的折射率计算公式不同, 该解析公式充分考虑到了空间色散以及磁电超材料的电元件和磁元件的相互作用. 折射率理论曲线和基于仿真实验数据的提取值曲线能很好地符合, 这说明文中推导的折射率公式能够正确地描述磁电超材料的负折射特性. 本文的结果将为分析电磁元件之间的相互作用以及设计负折射率符合一定要求的磁电超材料提供重要的理论参考.

关键词: 磁电超材料, 周期性结构, 负折射率

PACS: 41.20.Jb, 42.25.Bs, 41.20.-q

DOI: 10.7498/aps.62.084101

## 1 引言

磁电超材料<sup>[1]</sup>单元 (magnetolectric metamaterials) 是由磁导率实部小于零的磁元件 (magnetic component) 和介电常数实部小于零的电元件 (electric component) 在空间排列而形成的, 并且在磁电超材料单元内磁元件和电元件存在着相互作用. 在 1996 年, Pendry 等<sup>[2]</sup> 在微波频段内设计实现了等效介电常数为负的周期排列的金属线阵列结构, 当工作频率小于等离子体频率时, 金属线阵列具有负的介电常数. 在 1999 年, Pendry 等<sup>[3]</sup> 又提出了利用导体开口谐振环阵列结构实现负磁导率的思想, Smith 等<sup>[4]</sup> 根据 Pendry 的理论, 将开口谐振环 (磁元件) 和金属线 (电元件) 两种结构结合起来, 首次制造出介电常数和磁导率同时小于零的双负材料 (也称异向介质、负折射率材料, 磁电超材料<sup>[1]</sup>), 且在实验中观察到了负折射现象. 近年来, 许多科研人员在磁元件结构、电元件结构以及两者复合构成负折射率材料上做了大量的研究工作<sup>[5-12]</sup>, 但

是对于磁电超材料的折射率与其磁元件的磁导率和电元件的介电常数之间的函数关系的研究, 据我们所知只有极少文献涉及. 由于磁电超材料是人工材料, 其折射率无法预先知道, 所以通常是利用仿真或实验测得的散射参数 (即 S 参数), 通过一定的算法间接获取<sup>[13-17]</sup>, 这对于设计负折射率符合一定要求的磁电超材料带来巨大的困难. 文献 [18] 从场平均角度, 利用有效媒质理论分析了磁电超材料的色散关系, 但是此色散关系的表达式并没有包含磁元件和电元件的相互作用, 文献 [1] 对双各向异性 (bianisotropic) 磁电超材料中磁电耦合 (magnetolectric coupling) 进行了分析.

本文从麦克斯韦方程出发, 将磁电超材料板中磁元件等效为面磁流, 将电元件等效为面电流, 利用周期性边界条件和叠加原理推导出了周期性磁电超材料的折射率与其磁元件的磁导率、电元件的介电常数之间的函数关系. 由于该函数关系是通过求解总电场和总磁场获得的, 并且面磁流和面电流之间有约束关系, 因此磁电超材料的折射率包含了磁元件和电元件之间的相互作用. 磁电超材料折

\* 国家自然科学基金 (批准号: 60971029, 61271028) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xxh\_rifc@hotmail.com

射率理论公式直接描述了磁导率、介电常数和空间色散 (spatial dispersion) 项对磁电超材料折射率的影响. 本文的第三部分利用 HFSS (high frequency structure simulator) 仿真实验数据对导出的磁电超材料折射率理论公式进行了验证.

## 2 磁电超材料折射率理论解析式

设磁电超材料单元中的电元件相对介电常数和磁元件相对磁导率分别为  $\epsilon_r$  和  $\mu_r$ , 根据无源麦克斯韦旋度方程

$$\nabla \times \mathbf{H} = j\omega\epsilon_r\epsilon_0\mathbf{E}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega\mu_r\mu_0\mathbf{H}, \quad (2)$$

上式  $\epsilon_0$  和  $\mu_0$  分别是空气的介电常数和磁导率,  $\omega$  是角频率. 将 (1) 和 (2) 式的右边分别等效为体电流密度和体磁流密度, 即

$$\mathbf{J} = j\omega\epsilon_r\epsilon_0\mathbf{E}, \quad (3)$$

$$\mathbf{M} = j\omega\mu_r\mu_0\mathbf{H}, \quad (4)$$

从 (3) 和 (4) 式可以看出, 电流与磁电超材料单元中的电元件介电常数相关联, 磁流与磁电超材料单元中的磁元件磁导率相关联. 如果图 1 所示的磁电超材料板的厚度  $h$  很小, 那么磁电超材料板内的电流和磁流可以认为是在一个平面上流动. 另外这些电流和磁流所在的平面垂直  $z$  轴, 并且在  $z$  轴的坐标为  $md$ , 整数  $m$  的取值范围是  $(-\infty, \infty)$ ,  $d$  是磁电超材料板在空间排列的周期. 对于  $z = md$  的平面, 根据 (3) 和 (4) 式, 其面电流密度和面磁流密度分别为

$$\mathbf{J}_s(z) = h\mathbf{J}(z) = j\omega\epsilon_r\epsilon_0h\mathbf{E}(z) \quad (z = md), \quad (5)$$

$$\mathbf{M}_s(z) = h\mathbf{H}(z) = j\omega\mu_r\mu_0h\mathbf{H}(z) \quad (z = md), \quad (6)$$

式中,  $h$  是磁电超材料板的厚度. 需要说明的是上式中的  $\mathbf{E}(z)$  和  $\mathbf{H}(z)$  分别是总电场强度和总磁场强度. 在图 1 中, 磁电超材料是由磁电超材料板在空气中周期性排列而形成的, 设周期性结构中的 Bloch 波的传播方向为  $+z$  方向, 磁电超材料等效面电流密度矢量和等效面磁流密度矢量方向分别为  $+x$  和  $+y$  方向. 根据周期性边界条件, 在  $z = md$  平面上的面电流和面磁流密度必须具有下列形式:

$$\mathbf{J}_s(z) = J_s e^{-j\beta z} \mathbf{e}_x \quad (z = md), \quad (7)$$

$$\mathbf{M}_s(z) = M_s e^{-j\beta z} \mathbf{e}_y, \quad (z = md), \quad (8)$$

$J_s$  和  $M_s$  分别是面电流和面磁流的幅度, 它们与空间坐标位置无关,  $\beta$  是周期性磁电超材料的传播常数. 首先考虑图 1 中仅存在一个  $z = md$  平面的情况, 设该平面的法向方向为  $+z$  方向, 根据电场和磁场在此平面的边界条件 (见 (13) 式和 (14) 式), 可以确定电场和磁场矢量方向分别为  $x$  和  $y$  方向, 因此可以设定该平面上的电流和磁流在  $z > md$  和  $z < md$  这两个半无限空间激起的平面波电场和磁场分别为

$$\mathbf{E}^+ = A^+ e^{-jk_0(z-md)} \mathbf{e}_x \quad (z > md), \quad (9)$$

$$\mathbf{E}^- = A^- e^{jk_0(z-md)} \mathbf{e}_x \quad (z < md), \quad (10)$$

$$\mathbf{H}^+ = \frac{A^+ e^{-jk_0(z-md)}}{\eta_0} \mathbf{e}_y \quad (z > md), \quad (11)$$

$$\mathbf{H}^- = -\frac{A^- e^{jk_0(z-md)}}{\eta_0} \mathbf{e}_y \quad (z < md), \quad (12)$$

式中  $A^+$  和  $A^-$  是由边界条件确定的常数,  $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$  是空气的传播常数,  $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$  是空气的波阻抗. 平面  $z = md$  上的电场和磁场边界条件为<sup>[19]</sup>

$$(\mathbf{E}^+ - \mathbf{E}^-) \times \mathbf{n} = \mathbf{M}_s, \quad (13)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) = \mathbf{J}_s, \quad (14)$$

$\mathbf{n}$  是平面  $z = md$  的单位法向矢量, 其方向为  $+z$  方向, 即  $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$ , 用  $md$  替代 (7)–(12) 式中的  $z$  后, 再代入 (13) 和 (14) 式, 可以得到

$$-A^+ + A^- = M_s e^{-j\beta md}, \quad (15)$$

$$A^+ + A^- = -J_s \eta_0 e^{-j\beta md}. \quad (16)$$

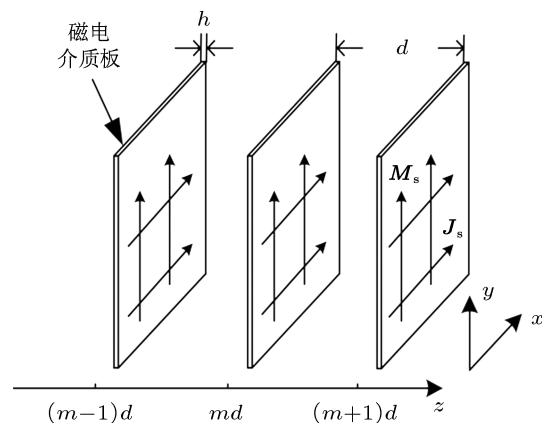


图 1 周期性磁电超材料的等效面电流和等效面磁流

求解 (15) 和 (16) 式可得

$$A^+ = -\frac{1}{2}(M_s + J_s \eta_0) e^{-j\beta md}, \quad (17)$$

$$A^- = \frac{1}{2}(M_s - J_s \eta_0) e^{-j\beta md}. \quad (18)$$

将 (17) 和 (18) 式分别代入 (9)—(12) 式中, 可以求出单个平面  $z = md$  上的面电流和面磁流在两个半空间产生的平面波:

$$\mathbf{E}_m^- = \frac{1}{2}(M_s - J_s \eta_0) e^{-j\beta md + jk_0(z-md)} \mathbf{e}_x \quad (z < md), \quad (19)$$

$$\mathbf{E}_m^+ = -\frac{1}{2}(M_s + J_s \eta_0) e^{-j\beta md - jk_0(z-md)} \mathbf{e}_x \quad (z > md), \quad (20)$$

$$\mathbf{H}_m^- = -\frac{1}{2} \left( \frac{M_s}{\eta_0} - J_s \right) e^{-j\beta md + jk_0(z-md)} \mathbf{e}_y \quad (z < md), \quad (21)$$

$$\mathbf{H}_m^+ = -\frac{1}{2} \left( \frac{M_s}{\eta_0} + J_s \right) e^{-j\beta md - jk_0(z-md)} \mathbf{e}_y \quad (z > md), \quad (22)$$

另外, 上式中并没有给出在平面  $z = md$  上的电场和磁场, 为此, 在平面  $z = md$  上的电场和磁场可以定义为

$$\mathbf{E}_m = \frac{1}{2} \left( \lim_{z \rightarrow md^+} \mathbf{E}_m^+ + \lim_{z \rightarrow md^-} \mathbf{E}_m^- \right) = -\frac{J_s \eta_0 e^{-j\beta md}}{2} \mathbf{e}_x, \quad (23)$$

$$\mathbf{H}_m = \frac{1}{2} \left( \lim_{z \rightarrow md^+} \mathbf{H}_m^+ + \lim_{z \rightarrow md^-} \mathbf{H}_m^- \right) = -\frac{M_s}{2\eta_0} e^{-j\beta md} \mathbf{e}_y. \quad (24)$$

(19)—(24) 式给出了单个平面上的面电流和面磁流在整个空间产生的电场和磁场. 下面将据此求解出如图 1 所示的周期性磁电超材料板在  $z = nd$  面上产生的总电场和总磁场. 根据叠加原理, 在  $z = nd$  平面上的总电磁场是各个面的面电流和面磁流在此平面上产生的电磁场的线性叠加. 将  $nd$  替代 (19)—(22) 式中的  $z$  变量, 同时将  $n$  替代 (23) 和 (24) 式中的  $m$ , 并对变量  $m$  求和, 分别得到平面  $z = nd$  上的总电场和总磁场

$$\begin{aligned} E_{\text{total},n} &= \sum_{m=-\infty}^{n-1} \mathbf{E}_m^+ + \mathbf{E}_n + \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbf{E}_m^- \\ &= \sum_{m=-\infty}^{n-1} -\frac{1}{2}(M_s + J_s \eta_0) e^{-j\beta md - jk_0(z-md)} \mathbf{e}_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & -\frac{J_s \eta_0 e^{-j\beta nd}}{2} \mathbf{e}_x + \sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2}(M_s - J_s \eta_0) \\ & \times e^{-j\beta md + jk_0(z-md)} \mathbf{e}_x \\ & = \frac{j[J_s \eta_0 \sin(k_0 d) + M_s \sin(\beta d)] e^{-j\beta nd}}{2[\cos(\beta d) - \cos(k_0 d)]} \mathbf{e}_x, \quad (25) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{\text{total},n} &= \sum_{m=-\infty}^{n-1} \mathbf{H}_m^+ + \mathbf{H}_n + \sum_{m=n+1}^{\infty} \mathbf{H}_m^- \\ &= \sum_{m=-\infty}^{n-1} -\frac{1}{2} \left( \frac{M_s}{\eta_0} + J_s \right) e^{-j\beta md - jk_0(z-md)} \mathbf{e}_y \\ & - \frac{M_s}{2\eta_0} e^{-j\beta nd} \mathbf{e}_y + \sum_{m=n+1}^{\infty} -\frac{1}{2} \left( \frac{M_s}{\eta_0} - J_s \right) \\ & \times e^{-j\beta md + jk_0(z-md)} \mathbf{e}_y, \\ & = \frac{j \left[ \frac{M_s}{\eta_0} \sin(k_0 d) + J_s \sin(\beta d) \right] e^{-j\beta nd}}{2[\cos(\beta d) - \cos(k_0 d)]} \mathbf{e}_y. \quad (26) \end{aligned}$$

根据 (5)—(8) 式, 并令  $m = n$  可以得到

$$J_s e^{-j\beta nd} \mathbf{e}_x = j\omega \epsilon_r \epsilon_0 h \mathbf{E}_{n,\text{total}}, \quad (27)$$

$$M_s e^{-j\beta nd} \mathbf{e}_y = j\omega \mu_r \mu_0 h \mathbf{H}_{n,\text{total}}. \quad (28)$$

在上式推导过程中, 使用了等式  $\mathbf{E}(nd) = \mathbf{E}_{n,\text{total}}$  和  $\mathbf{H}(nd) = \mathbf{H}_{n,\text{total}}$ , 也就是说  $\mathbf{E}(nd)$  和  $\mathbf{E}_{n,\text{total}}$  都是描述在  $z = nd$  平面上的总电场,  $\mathbf{H}(nd)$  和  $\mathbf{H}_{\text{total},n}$  都是描述在  $z = nd$  平面上的总磁场. 将 (25) 和 (26) 式分别代入 (27) 和 (28) 式得到

$$\frac{j[J_s \eta_0 \sin(k_0 d) + M_s \sin(\beta d)]}{2[\cos(\beta d) - \cos(k_0 d)]} = \frac{J_s}{j\omega \epsilon_r \epsilon_0 h}, \quad (29)$$

$$\frac{j \left[ \frac{M_s}{\eta_0} \sin(k_0 d) + J_s \sin(\beta d) \right]}{2[\cos(\beta d) - \cos(k_0 d)]} = \frac{M_s}{j\omega \mu_r \mu_0 h}. \quad (30)$$

从 (29) 和 (30) 式可以发现, 面电流幅度  $J_s$  和面磁流幅度  $M_s$  并不相互独立, 它们要受到上面两个方程的约束. 求解 (29) 式, 可以得到

$$M_s = \frac{J_s [2\cos(k_0 d) - 2\cos(\beta d) - \eta_0 \omega \epsilon_r \epsilon_0 h \sin(k_0 d)]}{\omega \epsilon_r \epsilon_0 h \sin(\beta d)}. \quad (31)$$

将 (31) 式代入 (30) 式, 可以得到周期性磁电超材料的色散关系:

$$\begin{aligned} \cos(\beta d) &= \frac{4 - k_0^2 \mu_r \epsilon_r h^2}{4 + k_0^2 \mu_r \epsilon_r h^2} \cos(k_0 d) \\ & - \frac{2k_0 h (\epsilon_r + \mu_r)}{4 + k_0^2 \mu_r \epsilon_r h^2} \sin(k_0 d), \quad (32) \end{aligned}$$

解出  $\beta$ , 可得

$$\beta = \frac{1}{d} \arccos \left( \frac{4 - k_0^2 \mu_r \epsilon_r h^2}{4 + k_0^2 \mu_r \epsilon_r h^2} \cos(k_0 d) - \frac{2k_0 h (\epsilon_r + \mu_r)}{4 + k_0^2 \mu_r \epsilon_r h^2} \sin(k_0 d) \right). \quad (33)$$

如果定义平均相对磁导率和平均相对介电常数为

$$\bar{\mu}_r = \frac{\mu_r h}{d}, \quad \bar{\epsilon}_r = \frac{\epsilon_r h}{d}, \quad (34)$$

(33) 式可以表示为

$$\beta = \frac{1}{d} \arccos \left( \frac{4 - (k_0 d)^2 \bar{\mu}_r \bar{\epsilon}_r}{4 + (k_0 d)^2 \bar{\mu}_r \bar{\epsilon}_r} \cos(k_0 d) - \frac{2(\bar{\epsilon}_r + \bar{\mu}_r)(k_0 d)}{4 + (k_0 d)^2 \bar{\mu}_r \bar{\epsilon}_r} \sin(k_0 d) \right), \quad (35)$$

(35) 式与文献 [18] 中推导的色散关系计算公式完全不同, 这是因为文献 [18] 的推导过程没有考虑电元件和磁元件之间的相互作用. 周期性结构的传播常数  $\beta$  与其折射率  $n$  有下列关系

$$\beta = nk_0. \quad (36)$$

将 (36) 式代入 (33) 式得到周期性磁电超材料的折射率

$$n = \frac{1}{k_0 d} \arccos \left( \frac{4 - k_0^2 \mu_r \epsilon_r h^2}{4 + k_0^2 \mu_r \epsilon_r h^2} \cos(k_0 d) - \frac{2k_0 h (\epsilon_r + \mu_r)}{4 + k_0^2 \mu_r \epsilon_r h^2} \sin(k_0 d) \right). \quad (37)$$

上式说明, 由相对介电常数为  $\epsilon_r$  的电元件和相对磁导率为  $\mu_r$  的磁元件构成的周期性磁电超材料, 其材料的折射率  $n$  与相对介电常数  $\epsilon_r$  和相对磁导率  $\mu_r$  之间存在着复杂的函数关系. 从前面的分析可知, 电元件与面电流相联系、磁元件与面磁流相联系, 同时面电流幅度  $J_s$  和面磁流幅度  $M_s$  通过 (29) 式和 (30) 式相互约束, 因此是磁电超材料中的电元件和磁元件之间的相互作用导致了折射率  $n$  与相对介电常数  $\epsilon_r$ , 相对磁导率  $\mu_r$  之间的复杂的数学关系. 而这种复杂的数学关系对于人们研究磁电元件的相互作用和相互影响, 以及设计负折射率磁电超材料等方面将提供重要的理论依据. 利用 (34) 式, (37) 式可表示为

$$n = \frac{1}{k_0 d} \arccos \left( \frac{4 - (k_0 d)^2 \bar{\mu}_r \bar{\epsilon}_r}{4 + (k_0 d)^2 \bar{\mu}_r \bar{\epsilon}_r} \cos(k_0 d) - \frac{2(\bar{\epsilon}_r + \bar{\mu}_r)(k_0 d)}{4 + (k_0 d)^2 \bar{\mu}_r \bar{\epsilon}_r} \sin(k_0 d) \right), \quad (38)$$

(38) 式表明周期性磁电超材料的折射率还是空间色散 (spatial dispersion) 项  $k_0 d$  的函数.

### 3 磁电超材料折射率理论值与仿真实验结果的比较

为了验证 (37) 式的正确性, 我们选取了如图 2(a) 所示的导体线作为磁电超材料的电元件, 电元件附在介质表面, 线的宽度  $a = 0.2 \text{ mm}$ ; 选取了图 2(b) 所示的导体开口谐振环作为磁电超材料的磁元件, 其结构参数  $b = 2.6 \text{ mm}$ ,  $c = 0.4 \text{ mm}$ ,  $g = 0.04 \text{ mm}$ , 磁元件也是附在介质表面; 图 2(c) 中的电元件和磁元件分别附在介质的两个表面, 其中电元件和磁元件的尺寸分别与图 2(a) 和 2(b) 相同. 这三个图中的介质材料是 Rogers RT/duroid 5880 (tm), 其相对介电常数为 2.2, 损耗正切为 0.0009, 介质板厚度  $e = 0.25 \text{ mm}$ . 电元件和磁元件的导体材料均为铜, 其厚度为  $0.017 \text{ mm}$ . 图 2(d) 是一个磁电超材料单元仿真图, 单元的周期  $d = 3 \text{ mm}$ , 波的极化和传播方向如图 2(d) 所示.

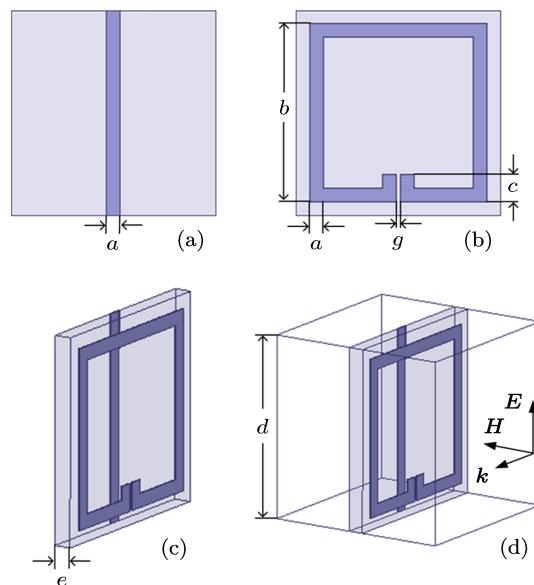


图 2 磁电超材料单元 (a) 电元件; (b) 磁元件; (c) 电元件和磁元件的组合; (d) 一个磁电超材料单元的 HFSS 仿真图

作为电元件的导体线的相对介电常数为 [20]

$$\epsilon_r = \epsilon_a \left( 1 - \frac{f_{0e}^2}{f^2} \right), \quad (39)$$

作为磁元件的导体谐振环的相对磁导率为 [1]

$$\mu_r = \mu_a - \frac{f_{pm}^2}{f^2 - f_{0m}^2 + j\gamma_m f}, \quad (40)$$

(39) 和 (40) 式中的  $\epsilon_a$ ,  $f_{0e}$ ,  $\mu_a$ ,  $f_{pm}$ ,  $f_{0m}$  和  $\gamma_m$  是与电或磁元件的结构、导体材料有关的参数. 利用高频电磁仿真软件 HFSS 13 分别对仅电元件构成的负介电常数人工材料 (图 2(a))、仅磁元件构成的负磁

导率人工材料(图 2(b))、以及电元件和磁元件构成的磁电超材料(图 2(c))进行了仿真,根据文献 [13, 15] 提取了电元件的相对介电常数、磁元件的相对磁导率和磁电超材料的折射率,结果分别如图 3—6 所示. 从这些图可以发现,由导体线(电元件)组成的人工材料在 5—15 GHz 频率范围内其相对介电常数的实部均小于零,开口谐振环(磁元件)组成的人工材料在 10.2—12 GHz 频率范围内其相对磁导率的实部小于零,磁电超材料折射率实部的提取值(图 5 中的虚线)在 9.8—12.2 GHz 频率范围内小于零.

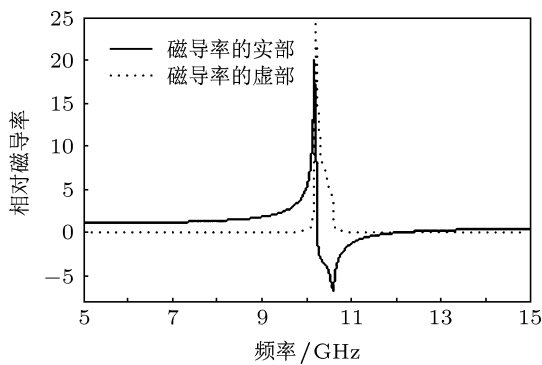


图3 电元件人工材料的相对介电常数提取值曲线

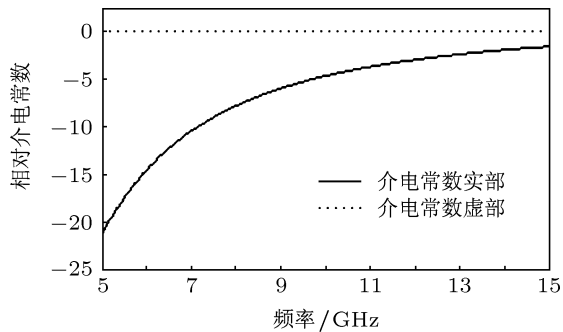


图4 磁元件人工材料的相对磁导率提取值曲线

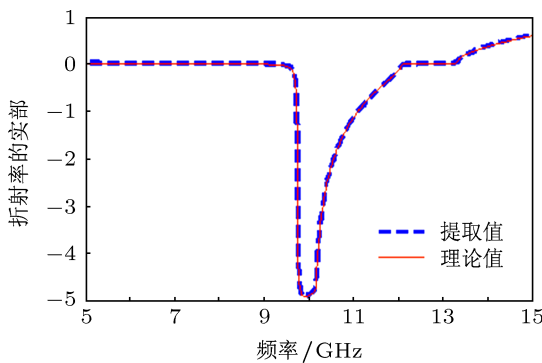


图5 磁电超材料折射率实部的理论值和提取值曲线

为了绘制磁电超材料折射率与频率关系的理

论曲线,必须要确定 (37), (39) 和 (40) 式中  $\epsilon_a$ ,  $f_{0e}$ ,  $\mu_a$ ,  $f_{pm}$ ,  $f_{0m}$ ,  $\gamma_m$  和  $h$  等参数数值. 为此,把 (39) 和 (40) 式代入 (37) 式后,对图 5 中的虚线(磁电超材料折射率实部的提取值)进行非线性拟合,得到了这些参数的数值,结果如表 1 所示.

表1 (37), (39) 和 (40) 式的参数数值

$\epsilon_a$	$f_{0e}/\text{GHz}$	$\mu_a$	$f_{pm}/\text{GHz}$	$f_{0m}/\text{GHz}$	$\gamma_m/\text{GHz}$	$h/\text{mm}$
1.87	35.14	10.12	26.65	10.09	0.0224	0.3

有了表 1 中的参数,根据折射率计算的理论公式 (37) 式,可以绘制出磁电超材料折射率实部和虚部与频率关系的理论曲线,如图 5 和图 6 中的实线所示. 从图 5 和图 6 可以看出,无论是折射率实部还是虚部的理论曲线与基于仿真实验数据的提取值曲线符合得非常好,这说明本文推导的磁电超材料折射率 (37) 式是正确的.

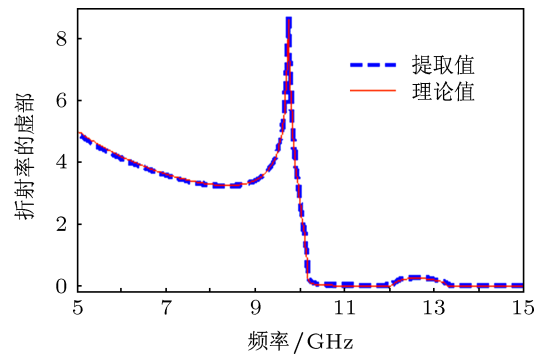


图6 磁电超材料折射率虚部的理论值和提取值曲线

## 4 结论

传统的电磁理论认为,材料的折射率是材料的相对磁导率与相对介电常数积的平方根,即  $n = \sqrt{\mu_r \epsilon_r}$ , 但此公式不适合描述周期性磁电超材料折射特性. 原因有两个: 1) 磁电超材料空间的周期性决定了磁电超材料的折射率必定包含空间色散项即  $k_0 d$ ; 2) 磁电超材料的电元件和磁元件之间存在相互作用. 本文将磁电超材料等效为面电流和面磁流,利用周期性边界条件和叠加原理,通过计算空间总电场和总磁场,建立了关于面电流密度幅度和面磁流密度幅度方程组. 从方程组可以看出,面电流和面磁流并不是独立的物理量,它们的取值要受到方程组的约束. 这说明磁电超材料中电元件和磁元件存在着相互作用,因此磁电超材料的折射率与电元件的介电常数、磁元件的磁导率和空间

色散项有着复杂的函数关系,而这种关系对于研究介电常数、磁导率和空间色散项对磁电超材料折射率的影响提供了重要的理论基础.另外,磁电超材料折射率理论值曲线与基于仿真实验数据的提

取值曲线之间误差很小,这说明本文推导的折射率理论计算公式在描述周期性磁电超材料的负折射特性方面是十分有效的.

- 
- [1] Smith D R 2010 *Phys. Rev. E* **81** 036605
- [2] Pendry J B, Holden A J, Stewart W J, Youngs I 1996 *Phys. Rev. Lett.* **76** 4773
- [3] Pendry J B, Holden A J, Robbins D J, Stewart W J 1999 *IEEE Trans. Microw. Theor. Techniq.* **47** 2075
- [4] Smith D R, Padilla W J, Vier D C, Nemat-Nasser S C, Schultz S 2000 *Phys. Rev. Lett.* **84** 4184
- [5] Schurig D, Mock J J, Justice B J, Cummer S A, Pendry J B, Starr A F, Smith D R 2006 *Science* **314** 977
- [6] Liu R, Ji C, Mock J J, Chin J Y, Cui T J, Smith D R 2009 *Science* **323** 366
- [7] Soukoulis C M, Wegener M 2010 *Science* **330** 1633
- [8] Guney D O, Koschny Th, Soukoulis C M 2011 *Phys. Rev. B* **83** 045107
- [9] Tassin P, Koschny Th, Soukoulis C M 2012 *Physica B* **407** 4062
- [10] Guney D O, Koschny Th, Kafesaki M, Soukoulis C M 2009 *Opt. Lett.* **34** 506
- [11] Liu Y H, Liu H, Zhao X P 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 084103 (in Chinese) [刘亚红, 刘辉, 赵晓鹏 2012 物理学报 **61** 084103]
- [12] Xu X H, Xiao S Q, Gan Y H, Fu C F, Wang B Z 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 124103 (in Chinese) [徐新河, 肖绍球, 甘月红, 付崇芳, 王秉中 2012 物理学报 **61** 124103]
- [13] Smith D R, Schultz S 2002 *Phys. Rev. B* **65** 195104
- [14] Smith D R, Pendry J B 2006 *J. Opt. Soc. Am. B* **23** 391
- [15] Smith D R, Vier D C, Koschny Th, Soukoulis C M 2005 *Phys. Rev. E* **71** 036617
- [16] Chen X, Grzegorzczuk T M, Wu B I, Pacheco Jr J, Kong J A 2004 *Phys. Rev. E* **70** 016608
- [17] Gong J Q, Liang C H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 059204 (in Chinese) [龚建强, 梁昌洪 2011 物理学报 **60** 059204]
- [18] Liu R, Cui T J, Huang D, Zhao B, Smith D R 2007 *Phys. Rev. E* **76** 026606
- [19] Zhang K Q, Li D J 2007 *Electromagnetic Theory for Microwave and Optoelectronics* (2nd Ed.) (New York: Berlin Heidelberg) p20
- [20] Jackson J D 1999 *Classical Electrodynamics* (New York: Wiley) p51

# Analysis of refractive index characteristics for magnetoelectric metamaterials\*

Xu Xin-He<sup>1)2)†</sup> Wu Xia<sup>1)</sup> Xiao Shao-Qiu<sup>2)</sup>  
Gan Yue-Hong<sup>1)</sup> Wang Bing-Zhong<sup>2)</sup>

1) (Nanchang Hangkong University, Nanchang 330063, China)

2) (Institute of Applied Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China)

( Received 13 November 2012; revised manuscript received 28 December 2012 )

## Abstract

Based on Maxwell's curl equations, the electric component and the magnetic component in magnetoelectric metamaterial plate are equivalent to the surface electric current and the surface magnetic current respectively. By calculating the total electric field and the total magnetic field in a magnetoelectric metamaterial plate generated by these periodic surface electric currents and magnetic currents, we obtain two equations about the surface current density and the surface magnetic current density, and thus deduce the analytical formulas for relationship between the refractive index of periodic magnetoelectric metamaterial and permeability of the magnetic component, and that between permittivity of the electric component and spatial dispersion. Unlike traditional index formula, the analytical formulas fully consider the spatial dispersion and the interaction of the electrical component and the magnetic component. The theoretical curves for refractive index are found to be in good agreement with the retrieval curves from simulation data, which shows that the analytical formulas for the refractive index can correctly describe the negative refraction characteristics of the magnetoelectric metamaterials. Our work will provide important theoretical reference for researchers to analyze interaction between electromagnetic components and to design magnetoelectric metamaterials with negative refractive indexes which meet certain requirements.

**Keywords:** magnetoelectric metamaterials, periodic structure, negative refractive index

**PACS:** 41.20.Jb, 42.25.Bs, 41.20.-q

**DOI:** 10.7498/aps.62.084101

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 60971029, 61271028).

† Corresponding author. E-mail: xxh\_rifc@hotmail.com