

# Airy 加速光束的局域空间频率及其在 光束设计中的应用\*

国承山<sup>†</sup> 王淑贞 荣振宇 沙贝

(山东师范大学物理与电子科学学院, 济南 250014)

(2012年8月7日收到; 2012年11月15日收到修改稿)

Airy 加速光束是近年来备受关注的新型无衍射光束. 它所具有的自由加速、无衍射及自恢复特性使其在光学微操纵、非线性光学、电子加速等诸多领域显示出重要的应用价值. 因此, 如何方便高效地生成加速光束成为近年来的一个热点研究内容. 本文对 Airy 加速光束复振幅分布的空间振荡特性进行了分析, 建立了利用局域空间频率描述其加速特性的理论. 提出了利用零点坐标计算加速光束局域空间频率的方法, 通过非线性拟合给出了可以精确描述 Airy 光束局域空间频率的解析公式; 确定了加速光束的局域空间频率函数与加速轨迹之间的定量关系, 给出了由给定加速轨迹计算相应的局域空间频率以及加速光束的纯相位函数的一种简单计算方法. 将上述分析结果用于设计产生具有给定加速轨迹的加速光束所需的相位函数, 成功求出了能够产生圆弧形加速轨迹的新型加速光束的纯相位函数的解析表达式. 基于该相位函数设计的纯相位衍射光学元件的模拟衍射结果证明了上述方法的可行性.

**关键词:** 衍射光学, 加速光束, 局域空间频率

**PACS:** 42.25.-p, 42.40.Eq

**DOI:** 10.7498/aps.62.084201

## 1 引言

加速光束是指一类在衍射传输过程中具有自由横向加速特性的特殊光场<sup>[1,2]</sup>. 由于这类光束最初是在具有 Airy 函数分布特征的光场中发现的, 因此这类加速光束也常被称为 Airy 加速光束或简称为 Airy 光束. 加速光束所具有的自由加速、无衍射及自恢复特性<sup>[3,4]</sup>使其在光学微操纵<sup>[5,6]</sup>、非线性光学<sup>[7-10]</sup>、电子加速<sup>[11,12]</sup>等诸多领域显示出重要的应用价值. 因此, 如何方便高效地实现具有不同加速轨迹的加速光束已成为近年来的一个热点研究内容<sup>[13-21]</sup>.

为了得到高的衍射效率或光能利用率, 纯相位衍射光学元件<sup>[22]</sup>成为近年来在实验上对入射激光进行高效波前变换的主要工具. 设计或制备产生所需加速光束的纯相位衍射光学元件的关键是根据

所需光束的加速轨迹或复振幅函数求出所对应的纯相位函数. 以前较常采用的方法是对 Airy 光束做傅里叶变换, 然后提取其傅里叶变换函数的相位因子设计傅里叶变换型纯相位衍射光学元件<sup>[13-16]</sup>. 这种方法的不足之处是, 实验中需要用傅里叶变换透镜对透过衍射光学元件的光场做逆傅里叶变换才能得到所需要的加速光束. 另外, 这种方法也难以适用于非 Airy 函数型加速光束的情况. 最近, Cottel 等<sup>[18]</sup>提出了一种从加速轨迹函数直接反推入射面上的相位函数的新方法, 该方法主要基于加速光束的波法线方向与加速轨迹切线方向存在某种对应关系的假设, 不仅避免了傅里叶变换透镜的使用, 也为寻找新型加速光束提供了一种有力的工具<sup>[20,21]</sup>.

本文对加速光束复振幅分布的空间振荡特性进行了分析, 提出了通过相关振荡函数的局域空间频率推算加速光束相位函数及利用该相位函数设

\* 国家自然科学基金(批准号: 11074152, 10934003)和高等学校博士学科点专项科研基金(批准号: 20113704110002)资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: guochsh@sdu.edu.cn

计纯相位衍射光学元件的方法. 分别给出了利用加速光束的零点坐标计算局域空间频率和利用加速轨迹及其斜率计算局域空间频率的算法和公式. 将上述方法用于设计产生具有给定加速轨迹的加速光束所需的相位函数, 成功求出了产生圆弧形加速轨迹的新型加速光束的纯相位函数的解析表达式. 通过相关纯相位衍射光学元件的模拟衍射结果证明了上述方法的可行性.

## 2 加速光束的局域空间频率

在图 1 所示的坐标几何中, 设  $z = 0$  的平面为加速光束的输入面, 该平面上加速光束的复振幅分布为  $u(x, z = 0)$ . 该加速光束沿  $z$  轴传输过程中形成的加速轨迹 (即主光斑的传输路径) 的横向偏移量是衍射距离  $z$  的函数, 记为  $\xi = T(z)$ . 我们首先考虑最常见的一维有限能量 Airy 加速光束的情况. 此时, 入射面上加速光束的复振幅分布具有以下形式

$$u(x, z = 0) = E_0 \text{Ai}(s) \exp(as), \quad (1)$$

其中,  $\text{Ai}()$  代表 Airy 函数,  $s = x/x_0$  为归一化坐标,  $x_0$  为横向尺度因子,  $a$  为常数. 图 2 给出了 (1) 式所示 Airy 光束的复振幅随坐标  $s$  的变化曲线. 由图 2 可见, 该加速光束的复振幅是一个随坐标的振荡函数, 其振荡幅度随  $s$  迅速衰减, 其振荡频率则是逐渐增加的. 为了突出其振荡特性, 该加速函数可以表示成一个单调衰减因子和一个正弦振荡函数的乘积, 即

$$u(x, z = 0) = R(s) \sin(\varphi(s)) \quad (s < 0), \quad (2)$$

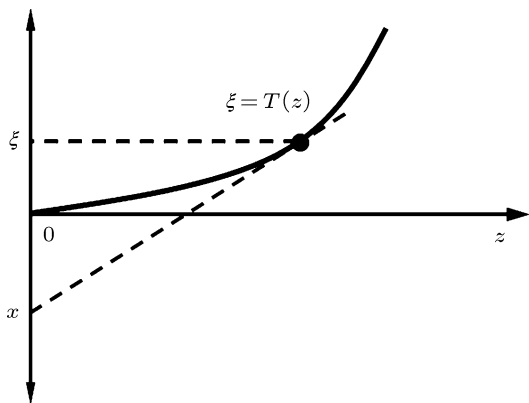


图 1 描述加速光束及其加速轨迹的坐标几何

其中,  $R(s)$  表示振幅衰减因子,  $\varphi(s)$  为正弦振荡函数的综量, 它实际上给出了加速光束波前相位分布函数, 因此可称之为加速光束的相位函数. 显然, 加速光束的传输特性主要由相位函数  $\varphi(s)$  决定. 该相位函数可直接用于设计产生相应 Airy 加速光束的纯相位衍射光学元件.

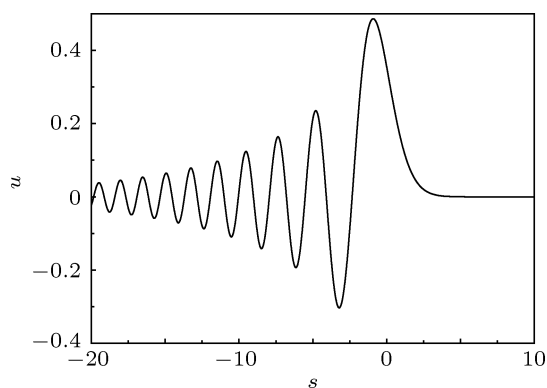


图 2 一维 Airy 光束入射面的复振幅分布曲线

一个振荡函数的空间振动特性可以用它的局域空间频率  $f(x)$  来表征, 其定义为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \frac{d[\varphi(x)]}{dx}. \quad (3)$$

从数学意义上看, 空间某点的局域空间频率就等于该点附近振荡周期的倒数; 从物理意义上看, 局域空间频率与相应振荡光场局域波矢的方向余弦成正比, 即  $f(x) = \cos(\alpha)/\lambda$ ,  $\alpha$  就是局域波矢与  $x$  轴的夹角. 由图 2 可见, Airy 光束的局域空间频率可以利用 Airy 函数的零点坐标求出. 设  $s_m$  为 Airy 函数的第  $m$  个零点的位置坐标, 则相应的 Airy 光束在  $s_m$  点附件的局域空间频率可表示为

$$f(s_m) = \frac{1}{4(s_m - s_{m+1})} + \frac{1}{4(s_{m-1} - s_m)} \\ = \frac{s_{m-1} - s_{m+1}}{4(s_m - s_{m+1})(s_{m-1} - s_m)}. \quad (4)$$

图 3 所示是利用 Airy 函数的零点坐标和 (4) 式数值计算得到的 Airy 光束的局域空间频率和相对坐标  $s$  的关系曲线. 经非线性拟合可得到以下解析结果

$$f(s) = \frac{1}{2\pi} \sqrt{s} \quad \text{或} \\ f(x) = \frac{1}{2\pi x_0^{3/2}} \sqrt{x}. \quad (5)$$

将 (5) 式代入局域空间频率的定义 (3) 式, 通过简单的积分运算就可以得到 Airy 加速光束的相位函数

为

$$\varphi(x) = \frac{2}{3} \left( \frac{x}{x_0} \right)^{3/2}. \quad (6)$$

该结果与直接通过 Airy 函数的近似公式<sup>[1]</sup>得到的相位函数是一致的.

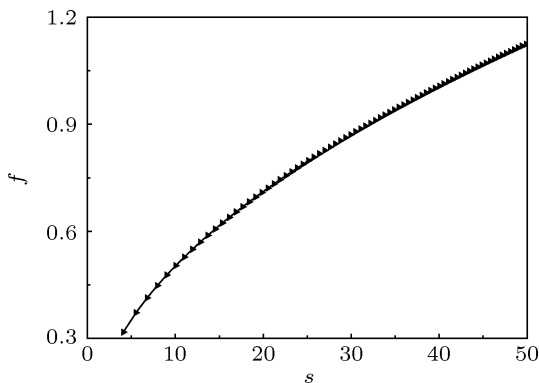


图3 Airy 函数的局域空间频率分布的数值计算结果

### 3 局域空间频率与加速轨迹的关系

将 (1) 式所示的 Airy 光束代入亥姆赫兹方程直接求解可得到其在空间传输的加速轨迹为<sup>[10]</sup>  $\xi = a^2 z^2$ , 其中  $a = \lambda / (4\pi x_0^{3/2})$ . 该加速轨迹的切线斜率为

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} = 2a\sqrt{\xi} = \frac{\lambda}{2\pi x_0^{3/2}} \sqrt{\xi}. \quad (7)$$

(7) 式与 (5) 式相比较可以看到, 在旁轴近似条件下加速光束的局域空间频率与其加速轨迹的切线斜率具有以下对应关系

$$f(x) = \frac{1}{\lambda} \left. \frac{d\xi}{dz} \right|_{\xi=x}. \quad (8)$$

(8) 式表明, 入射加速光束  $x$  处的局域空间频率与  $\xi$  处的加速轨迹的切线斜率成正比, 比例系数刚好是波长的倒数, 这就表明了  $x$  处的加速光束的局域波矢方向与  $\xi$  处的加速轨迹的切线方向重合, 如图 1 所示. (8) 式与 (3) 式相结合提供了从加速轨迹反向计算所需加速光束的相位函数的途径. 与文献 [18] 提出的方法相一致.

进一步的分析表明, (8) 式中  $\xi = x$  的条件实际上只适用于加速轨迹为  $z$  的平方函数的加速光束. 一般情况下, 由图 1 所示的几何关系可知, 局域波矢与加速轨迹切线共线的点的位置坐标应满足以

下条件

$$\frac{d\xi}{dz} = \frac{x + \xi}{z}. \quad (9)$$

基于以上分析, 我们得到以下从预定加速轨迹求加速光束的纯相位函数的一个简单积分公式

$$\varphi(x) - \varphi(0) = \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^x \frac{x + \xi}{z} dx, \quad (10)$$

其中的  $\xi, z$  和  $x$  的关系则可以通过将已知加速轨迹函数  $\xi = T(z)$  代入 (9) 式中求出.

例如, 对于加速轨迹为四次方函数  $\xi = az^4$  的加速光束, 由 (9) 式可求出其坐标对应关系为  $\xi = x/3$  和  $z^4 = x/(3a)$ . 将其代入 (10) 式后可以很容易地求出该加速光束对应的纯相位函数为 (设坐标原点处的初始相位为零)

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{2\pi}{\lambda} \int_0^x \frac{4}{3} (3a)^{1/4} x^{3/4} dx \\ &= \frac{2\pi}{\lambda} \frac{16}{21} (3a)^{1/4} x^{7/4}. \end{aligned} \quad (11)$$

该结果与文献 [17] 中基于一般 Legendre 变换得到的计算结果相比较可见, 两者只相差一个负号, 这是由两者所取坐标系的方向不同引起的.

### 4 具有圆弧形轨迹加速光束的纯相位函数及应用实例

最近, 一类具有圆弧形加速轨迹的加速光束引起了人们极大的兴趣<sup>[23,24]</sup>, 但至今尚未有人给出在空域直接产生这种加速光束的纯相位函数的解析式. 下面, 我们就试着用上述方法求出它的纯相位函数的解析表达式.

在图 1 所示的坐标系中, 设圆弧形加速轨迹的轨迹方程为

$$(\xi - a)^2 + z^2 = a^2, \quad (12)$$

其中  $a$  为轨迹半径. 对 (12) 式求微分, 得到圆形轨迹的切线斜率为  $d\xi/dz = z/(a - \xi)$ . 将其代入 (9) 式并与 (12) 式联立可解得

$$\xi = \frac{ax}{a+x}, \quad z = \frac{a\sqrt{2ax+x^2}}{a+x}. \quad (13)$$

将 (13) 式代入 (10) 式, 经积分运算和化简就得到产生圆形轨迹加速光束所需要的纯相位函数的解析表达式为

$$\varphi(x) = \frac{2\pi}{\lambda} \int \frac{x + \xi}{z} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2\pi}{\lambda a} \int \sqrt{x(2a+x)} dx \\
 &= \frac{2\pi}{\lambda} \left[ \frac{x+a}{2a} \sqrt{x^2+2ax} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{a}{2} \ln \left[ \frac{x+a+\sqrt{x^2+2ax}}{a} \right] \right]. \quad (14)
 \end{aligned}$$

在基于(14)式制备纯相位型衍射光学元件时,可使其复振幅透过率正比于 $\exp(-i\varphi(x))$ .图4(a)所示就是基于(14)式得到的一个一维纯相位衍射光学元件的包裹相位图,图4(b)所示是图4(a)所示纯相位衍射光学元件的模拟衍射结果.模拟实验中采用的纯相位衍射光学元件的设计参数为:入射激光波长为632.8 nm;圆弧形加速轨迹的圆弧半径为 $2 \times 10^5$  mm.图4(b)中的点划线表示的是由(12)式确定的理想圆弧轨迹曲线.由图4(b)可见,该曲线

与加速光场的主焦斑传输轨迹相重合.模拟结果表明上述设计方法的可行性以及(14)式给出的圆弧形加速光场的纯相位函数解析表达式的准确性.

由于二维加速光束一般可看作是由两个一维正交加速光束的乘积构成,因此基于(14)式也可以制备产生二维圆弧轨迹加速光束的纯相位衍射光学元件.图4(c)给出的就是基于(14)式得到的一个二维纯相位衍射光学元件的相位分布图样.当用高斯平面波照明该纯相位图样时,其透射光中的衍射主焦斑随衍射距离同样沿圆弧轨迹弯曲,同时主焦斑也显示出具有无衍射特征.图4(d)给出了加速光束传输到800 mm处时的衍射光强度图样,图中其主焦斑从入射面上的中心位置沿对角线方向的偏移量也满足(12)式的要求.

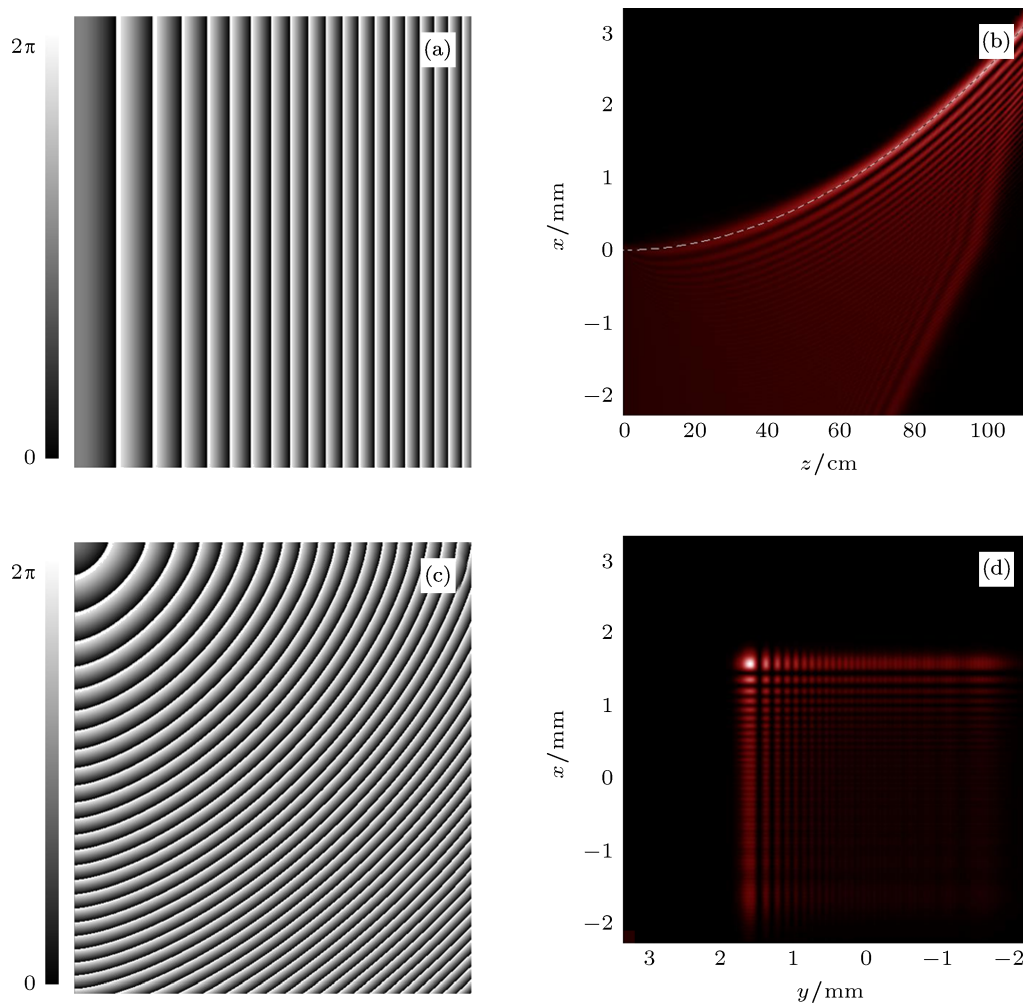


图4 (a)和(b)分别为产生具有圆弧形加速轨迹的一维加速光束的纯相位衍射光学元件(部分)相位分布及其衍射输出光场的强度分布;(c)和(d)为相应的二维情况,其中(d)为衍射距离为800 mm处的强度图样

## 5 结论

上述理论和分析计算结果表明, 一般情况下一束加速光束可表示成一个单调振幅衰减函数和一个等幅振荡函数的乘积. 决定加速光束衍射传输过程中主焦斑加速轨迹形状的关键参数是其中的振荡函数的局域空间频率分布. 通过局域空间频率不仅可以方便地求解光束的加速轨迹, 还可以反过来计算产生预定加速轨迹所需的加速光束的纯相位函数. 文中首先给出了从加速光束的非解析复振幅分布函数(如 Airy 函数) 计算其局域空间频率分布

并进而计算相应的纯相位函数的方法和公式; 然后进一步给出了从预定的加速轨迹方程计算相应的局域空间频率以及相应加速光束的纯相位函数的一种简单计算方法和公式; 最后作为应用实例, 利用上述方法成功求出了产生圆弧形加速轨迹所需加速光束的纯相位函数的解析表达式, 并基于该相位函数设计了相应的纯相位衍射光学元件, 通过模拟实验结果进一步证明了该解析表达式的准确性. 上述研究结果将有助于我们更好地理解加速光束的传输特性和更方便地设计产生各种新型加速光束的纯相位衍射光学元件.

- [1] Siviloglou G A, Christodoulides D N 2007 *Opt. Lett.* **32** 979
- [2] Xu J, Liu J, Xie J H, Wang Y T 2010 *Laser & Optoelectron. Prog.* **47** 070501 (in Chinese) [徐佳, 刘娟, 谢敬辉, 王涌天 2010 激光与光电子学进展 **47** 070501]
- [3] Wu F T, Jiang X G, Liu B, Qiu Z X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3125 (in Chinese) [吴逢铁, 江新光, 刘彬, 邱振兴 2009 物理学报 **58** 3125]
- [4] Zheng W T, Wu F T, Zhang Q A, Cheng Z M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 144201 (in Chinese) [郑维涛, 吴逢铁, 张前安, 程治明 2012 物理学报 **61** 144201]
- [5] Zhang P, Prakash J, Zhang Z, Mills M S, Efremidis N K, Christodoulides D N, Chen Z 2011 *Opt. Lett.* **36** 2883
- [6] Cao R, Yang Y, Wang J, Bu J, Wang M, Yuan X C 2011 *Appl. Phys. Lett.* **99** 261106
- [7] Kaminer I, Segev M, Christodoulides D N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 213903
- [8] Dolev I, Kaminer I, Shapira A, Segev M, Arie A 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 113903
- [9] Ren Z J, Fan C J, Zhou W D 2011 *Chin. J. Lasers* **38** 1202005 (in Chinese) [任志君, 范长江, 周卫东 2011 中国激光 **38** 1202005]
- [10] Ren Z J, Wu Q, Zhou W D, Wu G Z, Shi Y L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 174207 (in Chinese) [任志君, 吴琼, 周卫东, 吴根柱, 施逸乐 2012 物理学报 **61** 174207]
- [11] Li J, Zang W, Tian J 2010 *Opt. Express* **18** 7300
- [12] Wang G H, Wang X F, Dong K G 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 165201 (in Chinese) [王广辉, 王晓方, 董克攻 2012 物理学报 **61** 165201]
- [13] Siviloglou G A, Broky J, Dogariu A, Christodoulides D N 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 213901
- [14] Dai H T, Sun X W, Luo D, Liu Y J 2009 *Opt. Express* **17** 19365
- [15] Ellenbogen T, Voloch N, Ganany-Padowicz A, Arie A 2009 *Nat. Photon.* **3** 395
- [16] Davis J A, Mityr M J, Bandres M A, Ruiz I 2009 *Appl. Opt.* **48** 3170
- [17] Hu Y, Zhang P, Lou C, Huang S, Xu J, Chen Z 2010 *Opt. Lett.* **35** 2260
- [18] Cottrell D M, Davis J A, Hazard T M 2009 *Opt. Lett.* **34** 2634
- [19] Wang J, Bu J, Wang M, Yang Y, Yuan X C 2011 *Appl. Opt.* **50** 6627
- [20] Froehly L, Courvoisier F, Mathis A, Jacquot M, Furfaro L, Giust R, Lacourt P A, Dudley J M 2011 *Opt. Express* **19** 16455
- [21] Greenfield E, Segev M, Walasik W, Raz O 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 213902
- [22] Qi X Q, Gao C Q, Liu Y D 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 264 (in Chinese) [齐晓庆, 高春清, 刘义东 2010 物理学报 **59** 264]
- [23] Kaminer I, Bekenstein R, Nemirowsky J, Segev M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 163901
- [24] Zhang P, Hu Y, Cannan D, Salandrino A, Li T, Morandotti R, Zhang X, Chen Z 2012 *Opt. Lett.* **37** 2820

# Local spatial frequency of Airy accelerating beams and its applications in the beam design\*

Guo Cheng-Shan<sup>†</sup> Wang Shu-Zhen Rong Zhen-Yu Sha Bei

(College of Physics and Electronics, Shandong Normal University, Jinan 250014, China)

(Received 7 August 2012; revised manuscript received 15 November 2012)

## Abstract

Airy accelerating beams have aroused a great deal of interest because of their non-diffracting and self-accelerating properties, which have many potential applications such as in optical micromanipulations, nonlinear optics and vacuum electron acceleration. A key issue in research of the acceleration beam and its applications is how to generate this specific type of beams with high energy efficiency. In this paper, the spatial oscillation properties of the complex amplitude of an accelerating beam are analyzed and a theory describing the accelerating properties of the beam based on its local spatial frequency is proposed. The local spatial frequency of a general Airy beam is calculated through the zero-point coordinates of the Airy function, and an analytical formula accurately describing the local spatial frequency distribution is given. The relationship between the local spatial frequency and the accelerating trajectory of the beam is also given, based on which a simple algorithm for finding the pure-phase expression of an acceleration beam from its given accelerating trajectory is presented. Finally an analytical expression of the pure-phase function of an acceleration beam for generating a circle-arc trajectory is found out, based on which a pure-phase diffractive optical element is designed and demonstrated successfully.

**Keywords:** diffractive optics, accelerating beam, local spatial frequency

**PACS:** 42.25.-p, 42.40.Eq

**DOI:** 10.7498/aps.62.084201

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11074152, 10934003) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant No. 20113704110002).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: guochsh@sdu.edu.cn