带源项的变系数非线性反应扩散方程的精确解*

万晖†

(西北大学数学系非线性科学研究中心, 西安 710069)

(2012 年 11 月 13 日 收到; 2012 年 12 月 9 日 收到修改稿)

本文利用广义条件对称方法对带源项的变系数非线性反应扩散方程 $f(x)u_t = (g(x)D(u)u_x)_x + h(x)P(u)u_x + q(x)Q(u)$ 进行研究. 当扩散项 $D(u)$ 取 $u^m(m \neq -1,0,1)$ 和 e^u 两种重要情形时，对该方程进行对称约化，得到了具有广义泛函分离变量形式的精确解. 这些精确解包含了该方程对应常系数情况下的解.

关键词: 广义条件对称, 精确解, 非线性反应扩散方程

PACS: 02.30.Jr, 02.20.Sv, 02.30.Ik **DOI:** 10.7498/aps.62.090203

1 引 言

众所周知, 非线性偏微分方程可以作为数学模型描述出现在物理学、化学、信息科学、生命科学、空间科学、地理科学和环境科学等领域中的众多问题. 研究非线性偏微分方程的方法很多, 其中对称群方法是求解非线性偏微分方程的一种行之有效的方法. 对称群方法最初是 Sophus Lie (1842—1899) 在通过定义连续变换群用于求解常微分方程而得出的, 通过一个多世纪的发展和演化, 对称群方法大致可分为: Lie 点对称 (古典对称)[1−3]、条件对称 (非古典对称)[4,5]、广义条件对称 (条件的 Lie-Bäcklund 对称)[6−8]、分离变量法 [9−11]、符号不变量和不变子空间 [12,13] 等.

本篇论文研究的方程是 $1+1$ 维的变系数非线性反应扩散方程

$$f(x)u_t = (g(x)D(u)u_x)_x + h(x)P(u)u_x + q(x)Q(u), \qquad (1)$$

其中 $D(u)$, $P(u)$ 和 $Q(u)$ 分别是扩散项, 对流项和热源项, 它们都是关于变量 u 的充分光滑的函数, 变系数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 和 $q(x)$ 是关于变量 x 的任意光滑函数且 $f(x)g(x)h(x)q(x) \neq 0$. 这类方程具有丰富的物理背景, 其中著名的二次多孔介质方程

$$u_t = \left(\frac{u^2}{2}\right)_{xx}$$

和渗流方程

$$x^p u_t = (x^q u^n u_x)_x$$

都是方程 (1) 的特例. 方程 (1) 的常系数形式

$$u_t = (D(u)u_x)_x + P(u)u_x + Q(u),$$

已经被众多学者 [6,14] 研究过, 并且得到了丰富的结果. 不带源项的变系数方程

$$f(x)u_t = (g(x)D(u)u_x)_x + h(x)P(u)u_x$$

是由 Ivanov[15,16] 提出并作了详细的研究, 该方程加上源项就变成方程 (1), 这样此类方程可包括更广的适用范围, 它可模拟数学、物理 [17,18] 等方面的各种实际问题.

本文的目的是利用广义条件对称方法对方程 (1) 进行对称约化, 进而对其进行精确求解. 在文献 [19] 中提到可以利用点变换把变系数 $f(x)$ 消去, 于是我们利用点变换

$$x' = \frac{1}{\alpha}\int f(x)\mathrm{d}x, \quad t' = \frac{t}{\alpha^2}, \quad u' = u,$$

∗ 国家自然科学基金 (批准号: 11001220) 和陕西省教育厅基金 (批准号: 2010jk866) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wanhui1000@163.com

把方程 (1) 映射成

$$u'_{t'} = [g'(x')D(u')u'_{x'}]_{x'} + h'(x')P(u')u'_{x'} + q'(x')Q(u'),$$

这里 $g'(x') = f(x)g(x)$, $h'(x') = \alpha h(x)$, $q'(x') = \alpha^2 \dfrac{q(x)}{f(x)}$, 所以我们将对下面这个方程:

$$u_t = (g(x)D(u)u_x)_x + h(x)P(u)u_x + q(x)Q(u) \tag{2}$$

进行精确解的求解. 因为精确解 [20–24] 包含了相关系统的精确信息, 因此在分析各种物理现象时起到了至关重要的作用.

2 广义条件对称方法理论

我们设 1+1 维的非线性演化方程的一般形式为

$$u_t = E(x, t, u, u_1, \cdots, u_n), \tag{3}$$

其中 $u_j = \partial^j u/\partial x^j$, 它在非 Lie 点无穷小变换群下是不变的, 这个变换群表示为

$$\begin{aligned} u' &= u + \varepsilon\eta(t, x, u, u_1, \cdots, u_N) + O(\varepsilon^2), \\ u'_t &= u_t + \varepsilon D_t \eta(t, x, u, u_1, \cdots, u_N) + O(\varepsilon^2), \\ u'_x &= u_x + \varepsilon D_x \eta(t, x, u, u_1, \cdots, u_N) + O(\varepsilon^2), \\ &\cdots. \end{aligned}$$

这个变换群对应于下面的向量场 V, η 作为它的特征:

$$V = \sum_{k=0}^{\infty} D_x^k \eta \frac{\partial}{\partial u_k} + \cdots, \tag{4}$$

其中

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{\partial}{\partial x} + \sum_{k=0}^{\infty} u_{k+1} \frac{\partial}{\partial u_k}, \\ D_x^{j+1} &= D_x(D_x^j), \\ D_x^0 &= 1. \end{aligned}$$

定义 1 向量场 (4) 是方程 (3) 的 Lie-Bäcklund 对称, 如果满足

$$V(u_t - E)\,|_L = 0,$$

其中 L 表示方程 $u_t - E = 0$ 的所有关于 x, t 的全微分序列集合, 即

$$\begin{aligned} & u_t - E = 0, \\ & D_x^j D_t^k (u_t - E) = 0, \\ & j, k = 0, 1, 2, \cdots. \end{aligned}$$

定义 2 向量场 (4) 是方程 (3) 的广义条件对称, 如果满足

$$V(u_t - E)\,|_{L \cap M} = 0,$$

其中 L 表示方程 $u_t - E = 0$ 的所有关于 x, t 的全微分序列集合, 即

$$\begin{aligned} & u_t - E = 0, \\ & D_x^j D_t^k (u_t - E) = 0, \\ & j, k = 0, 1, 2, \cdots, \end{aligned}$$

M 表示方程 $\eta = 0$ 的所有关于 x 的全微分序列集合, 即

$$D_x^j \eta = 0, \quad j = 0, 1, 2, \cdots.$$

命题 1 (Fokas 和 Liu[25] 及 Zhdanov[26]) 方程 (3) 容许广义条件对称 (4) 的充分条件是存在一个函数 $W(t, x, u, \eta)$ 满足

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \eta}{\partial t} = [E, \eta] + W(t, x, u, \eta), \\ & W(t, x, u, 0) = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $[E, \eta] = E'\eta - \eta' E$, $'$ 表示 Gateaux 导数, W 关于 $t, x, u, u_1, \cdots$ 和 $\eta, D_x\eta, D_x^2\eta, \cdots$ 解析.

推论 1 若 η 不显含 t, 方程 (3) 容许广义条件对称 (4) 的充分条件是

$$D_t \eta = 0.$$

根据上述理论, 计算广义条件对称的过程可表述成以下 3 个步骤.

第 1 步 把向量场 V 作用到表达式 $u_t - E$ 上, 则此表达式 $V(u_t - E)$ 是关于独立变量 $t, x, u, u_t, u_1, \cdots, u_n$ 的函数.

第 2 步 利用方程 $u_t-E=0$, $\eta=0$ 和它们的所有微分序列 $D_x^j(u_t-E)=0$, $D_x^j\eta=0$, $j=1,2,\cdots$ 消去 u_{tj}, $j=0,1,2,\cdots$ 和 $u_N,u_{N+1},\cdots$, 令所得结果表达式等于零, 得到一个非线性偏微分方程组, 称这个方程组为决定方程组.

第 3 步 解这个决定方程组, 得出广义条件对称的一般形式.

3 主要结果

我们设方程 (2) 容许的二阶广义条件对称的形式如下 [7]:

$$\eta(x,u)=u_{xx}+H(u)u_x^2+a(x)u_x, \tag{6}$$

其中 H 是关于 u 的光滑函数, $a(x)$ 是关于 x 的光滑函数.

命题 2 方程 (2) 容许广义条件对称 (6) 的充分条件是函数 $g(x)$, $h(x)$, $q(x)$, $D(u)$, $P(u)$, $Q(u)$, $H(u)$ 和 $a(x)$ 满足下面的偏微分方程组:

$$\begin{aligned}J_1\equiv{}&D'''-4HD''-3H'D'+5H^2D'\\&-DH''-2DH^3+4DHH'=0,\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}J_2\equiv{}&4gaDH'+9gaD'H-5gaD''\\&-5g'D'H+2g'DH^2-4gaDH^2\\&+3g'D''-2g'DH'+hP''-hHP'=0,\end{aligned}\tag{8}$$

$$\begin{aligned}J_3\equiv{}&qH'Q+3g'aDH-2ga^2DH+2ga'DH\\&+qQ'H-7g'aD'-2haP'\\&+3g''D'+4ga^2D'-4ga'D'\\&-g''DH+2h'P'+qQ''=0,\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}J_4\equiv{}&2q'QH+g''aD+g'a^2D+2gaa'D\\&-h'aP+g'''D-2g''aD-g'a'D\\&-g''aD-2g'a'D-ga''D\\&+h''P-ha'P+2q'Q'=0,\end{aligned}\tag{10}$$

$$J_5\equiv q'aQ+q''Q=0.\tag{11}$$

证明 把 $u_{xx}=-Hu_x^2-au_x$ 代入方程 (2) 得

$$\begin{aligned}u_t={}&(gD'-gDH)u_x^2+(g'D-gaD+hP)u_x\\&+qQ.\end{aligned}$$

再由命题 1 的推论 1 直接计算

$$D_t\eta|_{L\bigcap M}=\sum_{i=0}^{4}J_{i+1}u_x^i=0,$$

就可得到决定方程组 (7)—(11).

由于这个决定方程组, 是 8 个未知函数包含在 5 个方程中, 而且它本身是一个复杂的非线性偏微分方程组, 所以它的一般解不易求出. 我们仅对扩散项 $D(u)$ 取 $u^m(m\neq-1,0,1)$ 和 e^u 两个重要情形来讨论.

情形 1 $D(u)=u^m$.

把 $D(u)=u^m$ 代入决定方程组中的 (7) 式得

$$H(u)=\frac{m-1}{u},\quad \frac{m/2-1}{u}\text{或}\frac{m}{u},$$

从 (11) 式得

$$Q(u)=0\text{或}q''+q'a=0,$$

解决定方程组 (8)—(10), 则有下面 6 种情形:

1) 方程

$$u_t=(g(x)u^mu_x)_x+c_1h(x)u^mu_x\tag{12}$$

容许广义条件对称 $\eta=u_{xx}+(m-1)u^{-1}u_x^2+a(x)u_x$, 这里的 c_1 及下文出现的 c_i, $i=0,1,2,\cdots$ 都是任意常数. 其中函数 $g(x)$, $h(x)$, $a(x)$ 满足下面的约束条件:

$$\begin{aligned}&h'-ha=0,\\&(g''-2g'a-ga'+ga^2)'=0,\\&(1+2m)g''+(2+2m)ga^2\\&-(3+4m)g'a-(2+2m)ga'=0.\end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned}h(x)={}&c_2\exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right),\\g(x)={}&\left(\int^x\frac{c_3(1+2m)}{a(y)}\right.\\&\left.\times\exp\left(-\int^y\frac{a^2(s)-a'(s)}{a(s)}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+c_4\right)\\&\times\exp\left(\int^x\frac{a^2(s)-a'(s)}{a(s)}\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

那么方程 (12) 的精确解由 $\eta=0$ 得

$$u(x,t)=\left[\alpha(t)\int_0^x\exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+\beta(t)\right]^{\frac{1}{m}},$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\alpha' = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)g'(0)-\left(1+\frac{2}{m}\right)g(0)a(0) + c_1h(0)\right]\alpha^2+c_3\alpha\beta,$$
$$\beta' = \frac{1}{m}\alpha^2+\left[g'(0)+c_1h(0)-g(0)a(0)\right]\alpha\beta.$$

2) 方程

$$u_t = (g(x)u^m u_x)_x + c_1h(x)u^m u_x + c_2q(x)u^{1-m} \tag{13}$$

容许广义条件对称 $\eta = u_{xx}+(m-1)u^{-1}u_x^2+a(x)u_x$, 其中函数 $g(x)$, $h(x)$, $q(x)$, $a(x)$ 满足下面的约束条件:

$$h'-ha=0,$$
$$q''+q'a=0,$$
$$(g''-2g'a-ga'+ga^2)'=0,$$
$$(1+2m)g''+(2+2m)ga^2 -(3+4m)g'a-(2+2m)ga'=0,$$

解得

$$h(x)=c_3\exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right),$$
$$q(x)=c_4\int^x\exp\left(-\int^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+c_5,$$
$$g(x)=\left(\int^x\frac{c_6(1+2m)}{a(y)}\times\exp\left(-\int^y\frac{a^2(s)-a'(s)}{a(s)}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+c_7\right)\times\exp\left(\int^x\frac{a^2(s)-a'(s)}{a(s)}\mathrm{d}s\right).$$

那么方程 (13) 的精确解为

$$u(x,t)=\left[\alpha(t)\int_0^x\exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+\beta(t)\right]^{\frac{1}{m}},$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\alpha' = \left[\left(1+\frac{1}{m}\right)g'(0)-\left(1+\frac{2}{m}\right)g(0)a(0)+c_1h(0)\right]\alpha^2 +c_6\alpha\beta+mc_2q'(0),$$
$$\beta' = \frac{1}{m}\alpha^2+\left[g'(0)+c_1h(0)-g(0)a(0)\right]\alpha\beta +mc_2q(0).$$

3) 方程

$$u_t=(g(x)u^m u_x)_x+c_1h(x)u^{\frac{m}{2}}u_x \tag{14}$$

容许广义条件对称 $\eta = u_{xx}+\left(\frac{m}{2}-1\right)u^{-1}u_x^2+a(x)u_x$, 其中函数 $g(x)$, $h(x)$, $a(x)$ 满足下面的约束条件:

$$h'-ha=0,$$
$$(2+2m)g'-(4+3m)ga=0,$$
$$(g''-2g'a-ga'+ga^2)'=0,$$
$$(2+5m)g''-(6+11m)g'a-(4+6m)ga' +(4+6m)ga^2=0.$$

解得

$$h(x)=c_2\exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right),$$
$$g(x)=\left(\int^x\frac{-c_3}{2a(y)}\exp\left(-\frac{1}{4(m+1)(5m+2)}\int^y\frac{(4+6m+2m^2)a'(s)+(20+56m+31m^2)a^2(s)}{a(s)}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+c_4\right)\times\exp\left(\frac{1}{4(m+1)(5m+2)}\int^x\frac{(4+6m+2m^2)a'(s)+(20+56m+31m^2)a^2(s)}{a(s)}\mathrm{d}s\right).$$

那么方程 (14) 的精确解为

$$u(x,t)=\left[\alpha(t)\int_0^x\exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+\beta(t)\right]^{\frac{2}{m}},$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\alpha' = \left(1+\frac{2}{m}\right)g(0)\alpha^3 +\left[\left(3+\frac{2}{m}\right)g'(0)-\left(4+\frac{4}{m}\right)g(0)a(0)\right]\alpha^2\beta +c_3\alpha\beta^2+c_1h(0)\alpha^2,$$
$$\beta' = \left(1+\frac{2}{m}\right)g(0)\alpha^2\beta +\left[g'(0)-g(0)a(0)\right]\alpha\beta^2+c_1h(0)\alpha\beta.$$

4) 方程

$$u_t=(g(x)u^m u_x)_x+c_1h(x)u^{\frac{m}{2}}u_x+c_2q(x)u^{1-\frac{m}{2}} \quad (15)$$

容许广义条件对称 $\eta=u_{xx}+\left(\frac{m}{2}-1\right)u^{-1}u_x^2+a(x)u_x$, 其中函数 $g(x)$, $h(x)$, $q(x)$, $a(x)$ 满足下面的约束条件:

$$h'-ha=0,$$
$$q''+q'a=0,$$
$$(2+2m)g'-(4+3m)ga=0,$$
$$(g''-2g'a-ga'+ga^2)'=0,$$
$$(2+5m)g''-(6+11m)g'a-(4+6m)ga'+(4+6m)ga^2=0.$$

解得

$$h(x)=c_3\exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right),$$
$$q(x)=c_4\int^x\exp\left(-\int^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+c_5,$$
$$g(x)=\left(\int^x\frac{-c_6}{2a(y)}\exp\left(-\frac{1}{4(m+1)(5m+2)}\times\int^y\frac{(4+6m+2m^2)a'(s)+(20+56m+31m^2)a^2(s)}{a(s)}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+c_7\right)\times\exp\left(\frac{1}{4(m+1)(5m+2)}\int^x\frac{(4+6m+2m^2)a'(s)+(20+56m+31m^2)a^2(s)}{a(s)}\mathrm{d}s\right).$$

那么方程 (15) 的精确解为

$$u(x,t)=\left[\alpha(t)\int_0^x\exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+\beta(t)\right]^{\frac{2}{m}},$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\alpha'=\left(1+\frac{2}{m}\right)g(0)\alpha^3+\left[\left(3+\frac{2}{m}\right)g'(0)-\left(4+\frac{4}{m}\right)g(0)a(0)\right]\alpha^2\beta+c_6\alpha\beta^2+c_1h(0)\alpha^2+c_2\frac{m}{2}q'(0),$$
$$\beta'=\left(1+\frac{2}{m}\right)g(0)\alpha^2\beta+\left[g'(0)-g(0)a(0)\right]\alpha\beta^2+c_1h(0)\alpha\beta+c_2\frac{m}{2}q(0).$$

5) 方程

$$u_t=(g(x)u^m u_x)_x+c_1h(x)u^{m+1}u_x \quad (16)$$

容许广义条件对称 $\eta=u_{xx}+mu^{-1}u_x^2+a(x)u_x$, 其中函数 $g(x)$, $h(x)$, $a(x)$ 满足下面的约束条件

$$g'-ga=0,$$
$$h'-ha=0,$$

解得

$$g(x)=h(x)=c_2\exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right).$$

那么方程 (16) 的精确解为

$$u(x,t)=\left[\alpha(t)\int_0^x\exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+\beta(t)\right]^{\frac{1}{1+m}},$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\alpha'=c_1h(0)\alpha^2,$$
$$\beta'=\left(\frac{2m}{1+m}\right)g(0)\alpha^2\beta^{-1/(1+m)}+c_1h(0)\alpha\beta.$$

6) 方程

$$u_t=(g(x)u^m u_x)_x+c_1h(x)u^{m+1}u_x+c_2q(x)u^{-m} \quad (17)$$

容许广义条件对称 $\eta=u_{xx}+mu^{-1}u_x^2+a(x)u_x$, 其中函数 $g(x)$, $h(x)$, $q(x)$, $a(x)$ 满足下面的约束条件

$$g'-ga=0,$$
$$h'-ha=0,$$
$$q''+q'a=0,$$

解得

$$g(x)=h(x)=c_3\exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right),$$

$$q(x)=c_4\int^x\exp\left(-\int^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+c_5.$$

那么方程 (17) 的精确解为

$$u(x,t)=\left[\alpha(t)\int_0^x\exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+\beta(t)\right]^{\frac{1}{1+m}},$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\begin{aligned}\alpha'&=c_1h(0)\alpha^2+c_2(1+m)q'(0),\\ \beta'&=\left(\frac{2m}{1+m}\right)g(0)\alpha^2\beta^{-1/(1+m)}\\ &\quad+c_1h(0)\alpha\beta+c_2(1+m)q(0).\end{aligned}$$

情形 2 $D(u)=e^u$. 把 $D(u)=e^u$ 代入决定方程组中的 (7) 式得

$$H(u)=\frac{1}{2},\quad 1\text{或}1-\frac{1}{u},$$

从 (11) 式得

$$Q(u)=0\text{或}q''+q'a=0,$$

解决定方程组 (8)—(10), 则有下面 6 种情形:

1) 方程

$$u_t=(g(x)e^u u_x)_x+c_1h(x)e^{\frac{u}{2}}u_x \tag{18}$$

容许广义条件对称 $\eta=u_{xx}+\frac{1}{2}u_x^2+a(x)u_x$, 其中函数 $g(x), h(x), a(x)$ 满足下面的约束条件

$$\begin{aligned}&h'-ha=0,\\ &2g'-3ga=0,\\ &5g''-11g'a-6ga'+6ga^2=0,\\ &(g''-2g'a-ga'+ga^2)'=0.\end{aligned}$$

解得

$$h(x)=c_2\mathrm{e}^{\int^x a(s)\mathrm{d}s},$$

$$\begin{aligned}g(x)=&\left(\int^x\frac{-c_3}{2a(y)}\exp\left(-\int^y\frac{31a^2(s)+2a'(s)}{20a(s)}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y\right.\\ &\left.+c_4\right)\exp\left(\int^x\frac{31a^2(s)+2a'(s)}{20a(s)}\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

那么方程 (18) 的精确解为

$$\begin{aligned}u(x,t)=2\ln&\left[\alpha(t)\int_0^x\exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y\right.\\ &\left.+\beta(t)\right],\end{aligned}$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\begin{aligned}\alpha'&=g(0)\alpha^3\beta+[3g'(0)-4g(0)a(0)]\alpha^2\beta\\ &\quad+c_3\alpha\beta^2+c_1h(0)\alpha^2,\\ \beta'&=[g'(0)-g(0)a(0)]\alpha\beta^2\\ &\quad+g(0)\alpha^2\beta+c_1h(0)\alpha\beta.\end{aligned}$$

2) 方程

$$\begin{aligned}u_t=&(g(x)e^u u_x)_x+c_1h(x)e^{\frac{u}{2}}u_x\\ &+c_2q(x)e^{-\frac{u}{2}}\end{aligned} \tag{19}$$

容许广义条件对称 $\eta=u_{xx}+\frac{1}{2}u_x^2+a(x)u_x$, 其中函数 $g(x), h(x), q(x), a(x)$ 满足下面的约束条件

$$\begin{aligned}&h'-ha=0,\\ &q''+q'a=0,\\ &2g'-3ga=0,\\ &5g''-11g'a-6ga'+6ga^2=0,\\ &(g''-2g'a-ga'+ga^2)'=0.\end{aligned}$$

解得

$$h(x)=c_3\exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right),$$

$$q(x)=c_4\int^x\exp\left(-\int^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y+c_5,$$

$$\begin{aligned}g(x)=&\left(\int^x\frac{-c_6}{2a(y)}\exp\left(-\int^y\frac{31a^2(s)+2a'(s)}{20a(s)}\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y\right.\\ &\left.+c_7\right)\exp\left(\int^x\frac{31a^2(s)+2a'(s)}{20a(s)}\mathrm{d}s\right).\end{aligned}$$

那么方程 (19) 的精确解为

$$\begin{aligned}u(x,t)=2\ln&\left[\alpha(t)\int_0^x\exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y\right.\\ &\left.+\beta(t)\right],\end{aligned}$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\begin{aligned}\alpha'&=g(0)\alpha^3\beta+[3g'(0)-4g(0)a(0)]\alpha^2\beta\\ &\quad+c_6\alpha\beta^2+c_1h(0)\alpha^2+\frac{1}{2}c_2q'(0),\\ \beta'&=[g'(0)-g(0)a(0)]\alpha\beta^2+g(0)\alpha^2\beta\\ &\quad+c_1h(0)\alpha\beta+\frac{1}{2}c_2q(0).\end{aligned}$$

3) 方程

$$u_t=(g(x)e^u u_x)_x+c_1h(x)e^u u_x \tag{20}$$

容许广义条件对称 $\eta = u_{xx} + u_x^2 + a(x)u_x$, 其中函数 $g(x), h(x), a(x)$ 满足下面的约束条件

$$\begin{aligned} &h' - ha = 0,\\ &g'' - 2g'a - ga' + ga^2 = 0,\\ &(g'' - 2g'a - ga' + ga^2)' = 0. \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} h(x) &= c_2 \exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right),\\ g(x) &= (c_3x + c_4)\exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

那么方程 (20) 的精确解为

$$\begin{aligned} u(x,t) = \ln\bigg[&\alpha(t)\int_0^x \exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y\\ &+\beta(t)\bigg], \end{aligned}$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\begin{aligned} \alpha' &= [c_1h(0) - g'(0) - g(0)a(0)]\alpha^2\\ &\quad + 2g'(0)\alpha^2\beta,\\ \beta' &= [g'(0) - g(0)a(0) + c_1h(0)]\alpha\beta. \end{aligned}$$

4) 方程

$$u_t = (g(x)e^u u_x)_x + c_1h(x)e^u u_x + c_2q(x)e^{-u} \qquad (21)$$

容许广义条件对称 $\eta = u_{xx} + u_x^2 + a(x)u_x$, 其中函数 $g(x), h(x), q(x), a(x)$ 满足下面的约束条件

$$\begin{aligned} &h' - ha = 0,\\ &q'' + q'a = 0,\\ &g'' - 2g'a - ga' + ga^2 = 0,\\ &(g'' - 2g'a - ga' + ga^2)' = 0. \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} h(x) &= c_3 \exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right),\\ q(x) &= c_4\int^x \exp\left(-\int^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y + c_5,\\ g(x) &= (c_6x + c_7)\exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right). \end{aligned}$$

那么方程 (21) 的精确解为

$$\begin{aligned} u(x,t) = \ln\bigg[&\alpha(t)\int_0^x \exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y\\ &+\beta(t)\bigg], \end{aligned}$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\begin{aligned} \alpha' &= [c_1h(0) - g'(0) - g(0)a(0)]\alpha^2\\ &\quad + 2g'(0)\alpha^2\beta + c_2q'(0),\\ \beta' &= [g'(0) - g(0)a(0) + c_1h(0)]\alpha\beta + c_2q(0). \end{aligned}$$

5) 方程

$$\begin{aligned} u_t &= (g(x)e^u u_x)_x\\ &\quad + c_1h(x)u_x\int^u e^s\cdot s^{-1}ds \end{aligned} \qquad (22)$$

容许广义条件对称 $\eta = u_{xx} + \left(1 - \frac{1}{u}\right)u_x^2 + a(x)u_x$, 其中函数 $g(x), h(x), a(x)$ 满足下面的约束条件:

$$\begin{aligned} &g' - ga = 0,\\ &h'' - (ha)' = 0,\\ &2h' - 2ha - ga' = 0,\\ &g'' - 2g'a + ga^2 - ga' = 0. \end{aligned}$$

解得

$$\begin{aligned} h(x) &= \left[\int^x c_2\exp\left(-\int^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y + c_3\right]\\ &\quad\times\exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right),\\ g(x) &= \int^x \frac{2c_2a(s)}{a'(s)}\mathrm{d}s + c_3, \quad a'(x) \neq 0. \end{aligned}$$

那么方程 (22) 的精确解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= U^{-1}\bigg[\alpha(t)\int_0^x \exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y\\ &\qquad +\beta(t)\bigg],\\ U(u) &= \int^u e^s\cdot s^{-1}\mathrm{d}s, \end{aligned}$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$\begin{aligned} \alpha' &= [c_1h(0) + 2g'(0) - 3g(0)a(0)]\alpha^2\\ &\quad + c_1(h' - ha)\alpha^3\beta,\\ \beta' &= g(0)\alpha^2 + c_1h(0)\alpha\beta. \end{aligned}$$

6) 方程

$$\begin{aligned} u_t &= (g(x)e^u u_x)_x\\ &\quad + c_1h(x)u_x\int^u e^s\cdot s^{-1}\mathrm{d}s\\ &\quad + c_2q(x)ue^{-u} \end{aligned} \qquad (23)$$

容许广义条件对称 $\eta = u_{xx} + \left(1-\dfrac{1}{u}\right)u_x^2 + a(x)u_x$, 其中函数 $g(x)$, $h(x)$, $q(x)$, $a(x)$ 满足下面的约束条件:

$$
\begin{aligned}
&g' - ga = 0,\\
&q'' + q'a = 0,\\
&h'' - (ha)' = 0,\\
&2h' - 2ha - ga' = 0,\\
&g'' - 2g'a + ga^2 - ga' = 0.
\end{aligned}
$$

解得

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \left[\int^x c_3 \exp\left(-\int^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y + c_4\right]\\
&\quad\times \exp\left(\int^x a(s)\mathrm{d}s\right),\\
q(x) &= c_5 \int^x \exp\left(-\int^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y + c_6,\\
g(x) &= \int^x \frac{2c_3 a(s)}{a'(s)}\mathrm{d}s + c_7, \quad a'(x) \neq 0.
\end{aligned}
$$

那么方程 (23) 的精确解为

$$
u(x,t) = U^{-1}\left[\alpha(t)\int_0^x \exp\left(-\int_0^y a(s)\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}y + \beta(t)\right],
$$

$$
U(u) = \int^u e^s \cdot s^{-1}\mathrm{d}s,
$$

其中 $\alpha(t)$ 和 $\beta(t)$ 满足二维动力系统

$$
\begin{aligned}
\alpha' &= [c_1 h(0) + 2g'(0) - 3g(0)a(0)]\alpha^2\\
&\quad + c_1(h' - ha)\alpha^3\beta + c_2 q'(0),\\
\beta' &= g(0)\alpha^2 + c_1 h(0)\alpha\beta + c_2 q(0).
\end{aligned}
$$

说明 1 在情形 2 的 6) 中, 当 $a'(x) = 0$, 则 $a(x) = c_0$, 则由约束条件得 $g(x) = h(x) = c_3\mathrm{e}^{c_0 x}$, $q(x) = c_4\mathrm{e}^{-c_0 x}$, 特别地, 当 $c_0 = 0$ 时, 方程 (2) 退化为常系数方程

$$
\begin{aligned}
u_t &= (c_3 e^u u_x)_x + c_1 c_3 \int^u e^s \cdot s^{-1}\mathrm{d}s u_x\\
&\quad + c_2 c_4 u e^{-u},
\end{aligned}
$$

广义条件对称 (6) 变成

$$
\eta = u_{xx} + \left(1 - \frac{1}{u}\right)u_x^2,
$$

由 $\eta = 0$ 得此方程的精确解为

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= U^{-1}(\alpha(t)x + \beta(t)),\\
U(u) &= \int^u e^s \cdot s^{-1}\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

这个精确解的形式与文献 [27] 中 (5.26) 式结果一样, 说明本文所得变系数偏微分方程的精确解包含了与其对应的常系数偏微分方程的解.

4 结 论

本文利用二阶广义条件对称 (6) 从 $D(u) = u^m$ 和 $D(u) = e^u$ 两种情形对方程 (2) 进行对称约化, 得到了一些与约化后的方程相对应的精确解, 这些解具有广义泛函分离变量形式: $U(u) = c_1(t)g_1(x) + c_2(t)$. 在一般情况下, 这些精确解是不能由 Lie 点对称和非 Lie 点对称得到的. 在文献 [28] 中提到高阶的广义条件对称

$$
\begin{aligned}
\eta &= [U(u)]_{nx} + a_1(x)[U(u)]_{(n-1)x}\\
&\quad + \cdots + a_n(x)U(u),
\end{aligned}
$$

通过变换 $U(u) = v$, 可把方程具有广义泛函分离变量形式的解变成了广义分离变量形式的解

$$
\begin{aligned}
v &= c_1(t)g_1(x) + c_2(t)g_2(x)\\
&\quad + \cdots + c_n(t)g_n(x),
\end{aligned}
$$

这些广义分离变量解可由与广义条件对称相关的不变子空间方法获得. 所以, 我们将利用高阶的广义条件对称研究方程 (2), 相信会得到一些新的有意思的精确解.

[1] Olver P J 1993 *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (New York: Springer) p75

[2] Saied E A 1994 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **27** 4867

[3] King J R 1990 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **23** 3681

[4] Sophocleous C 1998 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **31** 6293

[5] Gandarias M L, Bruzón M S 2008 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **13** 508

[6] Qu C Z 1999 *IMA J. Appl. Math.* **62** 283

[7] Qu C Z, Estévez P G 2004 *Nonlinear Anal. TMA* **37** 549

[8] Qu C Z, Ji L N 2009 *Nonlinear Analysis* **71** 243

[9] Lou S Y 1996 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **29** 4209

[10] Lou S Y 2000 *Phys. Lett.* A **277** 94

[11] Ji F Y, Zhang S L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080202 (in Chinese) [吉飞宇, 张顺利 2012 物理学报 **61** 080202]
[12] Galaktionov V A 1995 *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **125** 225
[13] Galaktionov V A, Posashkov S A 1996 *Physica* D **99** 217
[14] Goard J M 2000 *Eur. J. Appl. Math.* **11** 215
[15] Ivanova N M 2008 *Dynamics of PDE* **5** 139
[16] Ivanova N M, Popovych R O, Sophocleous C 2010 *Lobachevskii Journal of mathematics* **31** 100
[17] Crank J 1979 *Mathematics of Diffusion (2nd ed.)* (London: Oxford)
[18] Peletier L A 1981 *Applications of Nonlinear Analysis in the Physical Sciences* (London: Pitman)
[19] Sophocleous C 2003 *Physica* A **320** 169
[20] Tao G T S, Si R D E J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]
[21] Ma Y L, Li B Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [马玉兰, 李帮庆 2009 物理学报 **58** 4373]
[22] Zhang S L, Qu C Z 2006 *Chin. Phys. Lett.* **23** 527
[23] Zhang H Q, Fan E G, Lin G 1998 *Chin. Phys.* **7** 649
[24] Mo J Q 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2930 (in Chinese) [莫嘉琪 2009 物理学报 **58** 2930]
[25] Fokas A S, Liu Q M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3293
[26] Zhdanov R Z 1995 *J. Phys.* A: *Math. Gen.* **128** 3841
[27] Qu C Z 1997 *Stud. Appl. Math.* **99** 107
[28] Ji L N 2012 *J. Math. Anal. Appl.* **389** 979

Exact solutions to the nonlinear diffusion-convection equation with variable coefficients and source term*

Wan Hui†

(*Center for Nonlinear Studies, Department of Mathematics, Northwest University, Xi'an* 710069*, China*)

(Received 13 November 2012; revised manuscript received 9 December 2012)

Abstract

The nonlinear diffusion-convection equation $f(x)u_t = (g(x)D(u)u_x)_x + h(x)P(u)u_x + q(x)Q(u)$ with variable coefficients and source term has been studied. This equation is symmetrically reduced by the generalized conditional symmetry method. Some exact solutions to the resulting equations are constructed, with the diffusion terms $D(u) = u^m(m \neq -1,0,1)$ and $D(u) = e^u$. These exact solutions are also the generalized functional separable solutions. Solutions to the equation with constant coefficients are covered by those exact solutions to the equation with variable coefficients.

Keywords: generalized conditional symmetry, exact solution, the nonlinear diffusion-convection equation

PACS: 02.30.Jr, 02.20.Sv, 02.30.Ik **DOI:** 10.7498/aps.62.090203

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11001220), and the Educational Science Foundation of Shaanxi Province, China (Grant No. 2010JK866).

† Corresponding author. E-mail: wanhui1000@163.com