构造 Birkhoff 表示的广义 Hojman 方法*

崔金超[1)] 赵喆[2)] 郭永新[1)3)†]

1) (北京理工大学宇航学院, 北京 100081)

2) (沈阳药科大学医疗器械学院, 沈阳 110016)

3) (辽宁大学物理学院, 沈阳 110036)

(2012 年 12 月 3 日 收到; 2013 年 1 月 8 日 收到修改稿)

研究第一积分、Hojman 方法及 Birkhoff 方程之间的内在联系. Hojman 方法构造的 Birkhoff 函数 (组) 满足的一个特定关系, 对此关系加以分析得到更为一般的广义 Hojman 方法. 再将此关系与 Birkhoff 方程相结合, 导出 Birkhoff 系统 Hojman 意义下的循环积分. 举例说明结论的应用.

关键词: Birkhoff 系统, Hojman 方法, 广义 Hojman 方法, 循环积分

PACS: 02.30.Zz, 45.05.+x, 45.10.–b **DOI:** 10.7498/aps.62.090205

1 引 言

经过近 40 年的发展, Birkhoff 力学 [1,2] 在诸如构造方法 [3−7]、几何描述 [8−12]、对称性与守恒量 [13−19]、数值计算方法 [20,21] 及广义 Birkhoff 系统 [22−25] 等方面取得了一系列重要进展. 作为 Hamilton 力学的自然推广, Birkhoff 力学具有更广泛的普适性. 在强调变换过程中保持物理量的物理意义时, Birkhoff 表示可以实现本质非自伴随系统的自伴随化 [2], 而 Lagrange 表示或 Hamilton 表示却无法做到. 因此, 将实际动力学问题纳入到 Birkhoff 系统来考虑要比在 Hamilton 体系中考虑更有优势. 这使得如何构造动力学系统的 Birkhoff 表示成为一个关键问题.

Hojman 方法 [2,3] 是构造可积系统 Birkhoff 表示的经典方法之一, 该方法计算简便、实用性强, 但 Hojman 方法的现有形式仅是满足 Birkhoff 方程的一种特殊取法, 没有涵盖更为一般的情况. 本文对 Hojman 方法做进一步讨论, 突出第一积分在构造 Birkhoff 表示上的重要作用, 并将 Hojman 方法推广为更具一般性的广义形式.

2 Birkhoff 方程及 Hojman 方法

一般非自治 Birkhoff 方程为 [2]

$$\left(\frac{\partial R_\nu(t,a)}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial a^\nu}\right)\dot a^\nu-\left(\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial t}\right)=0,\quad (\mu,\nu=1,\cdots,2n). \tag{1}$$

其中 $B(t,a)$ 为 Birkhoff 函数, $R_\mu(t,a)$ 为 Birkhoff 函数组. 式中对重复指标求和 (下同).

方程 (1) 还可写为

$$\Omega_{\mu\nu}(t,a)\dot a^\nu-\left(\frac{\partial B(t,a)}{\partial a^\mu}+\frac{\partial R_\mu(t,a)}{\partial t}\right)=0. \tag{2}$$

其中

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_\nu}{\partial a^\mu}-\frac{\partial R_\mu}{\partial a^\nu} \tag{3}$$

称为 Birkhoff 张量.

假设动力学系统已表示为标准一阶形式

$$\dot a^\nu=\Xi^\nu(t,a),\quad (\nu=1,\cdots,2n). \tag{4}$$

那么, 只要构造出适当的函数 B 和 R_μ, 总可以将其表为 Birkhoff 方程 (1) 的形式. 对于可积系统, 常用 Hojman 方法构造所需的函数 B 和 R_μ.

---

* 国家自然科学基金 (批准号: 10932002, 11172120, 11202090, 10972127) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn

Hojman 方法 [2–4]: 假设已求得系统 $2n$ 个独立的第一积分 $I^{\mu}(t,a)$, 那么 Birkhoff 函数组 $R_{\mu}(t,a)$ 由下式确定:

$$R_{\mu}(t,a)=G_{\alpha}\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial a^{\mu}}, \tag{5a}$$

而 Birkhoff 函数 $B(t,a)$ 为

$$B(t,a)=-G_{\alpha}\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial t}, \tag{5b}$$

其中 $2n$ 个函数 $G_{\alpha}=G_{\alpha}(I(a))$ 满足

$$\det\left(\frac{\partial G_{\alpha}}{\partial I^{\beta}}-\frac{\partial G_{\beta}}{\partial I^{\alpha}}\right)\neq 0. \tag{6}$$

3 构造 Birkhoff 表示的广义 Hojman 方法

Hojman 方法表明: 对于给定的动力学系统 (4), 若 $2n$ 个独立的第一积分 $I^{\mu}(t,a)$ 已知, 则其 Birkhoff 表示所需的函数 B 和 R_{μ} 可按 (5) 式计算, 并且通过改变 G_{α} 的取值可以得到多组不同的函数 B 和 R_{μ}, 但对于每一组选定的 $I^{\alpha}(t,a)$ 和 G_{α}, 由 (5) 式只能得到唯一的一组函数 B 和 R_{μ}.

(5) 式显示了 Hojman 方法对第一积分的直接依赖性. 事实上, 第一积分在 Hojman 方法中所起的重要作用还可通过以下分析看出.

1) 用 Hojman 方法构造的 B 和 R_{μ} 总满足如下关系:

$$B(t,a)=R_{\nu}\dot{a}^{\nu}. \tag{7}$$

证明 由于 I^{α} 是系统的第一积分, 故有

$$\frac{\mathrm{d}I^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial t}+\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}\dot{a}^{\nu}=0. \tag{8}$$

两端同乘以满足 (6) 式的 G_{α} 得

$$G_{\alpha}\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial t}+G_{\alpha}\frac{\partial I^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}\dot{a}^{\nu}=0. \tag{9}$$

将 (5) 式代入上式即得 (7) 式.

2) Hojman 方法的一般形式.

注意到 Hojman 方法 (5) 只是满足关系式 (7) 的一组解, 应该存在比 (5) 式更为一般的形式作为 (7) 式的解. 事实上 Hojman 方法可以更一般的写为

$$\begin{aligned}R_{\mu}(t,a)&=\varphi_{\alpha}\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial a^{\mu}},\\ B(t,a)&=-\varphi_{\alpha}\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial t}.\end{aligned} \tag{10}$$

其中 $\psi^{\alpha}=\psi^{\alpha}(I(a))$, $\varphi_{\alpha}=\varphi_{\alpha}(I(a))$ 且满足

$$\det\left(\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial I^{\beta}}-\frac{\partial \varphi_{\beta}}{\partial I^{\alpha}}\right)\neq 0. \tag{11}$$

显然, 当取 $\varphi_{\alpha}=G_{\alpha}$, $\psi^{\alpha}=I^{\alpha}$ 时, (10) 式退化为 (5) 式. 因此, 称 (5) 式为 Hojman 方法的第一形式 (以下简称第一形式), 称 (10) 式为 Hojman 方法的一般形式 (以下简称一般形式), 相应的构造方法称为广义 Hojman 方法.

下面证明 Hojman 方法的一般形式 (10) 使得 Birkhoff 方程恒成立. 将 (10) 式代入 Birkhoff 方程 (1) 得

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\left(\varphi_{\alpha}\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}\right)-\frac{\partial}{\partial a^{\nu}}\left(\varphi_{\alpha}\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial a^{\mu}}\right)\right]\dot{a}^{\nu}\\ &-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\varphi_{\alpha}\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial a^{\mu}}\right)-\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\left(\varphi_{\alpha}\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial t}\right)\right]=0,\end{aligned} \tag{12}$$

展开并整理得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial a^{\mu}}\left(\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial t}+\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial a^{\nu}}\dot{a}^{\nu}\right)\\ &=\left(\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial t}+\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial a^{\nu}}\dot{a}^{\nu}\right)\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial a^{\mu}},\end{aligned} \tag{13}$$

即

$$\frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial a^{\mu}}\frac{\mathrm{d}\psi^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\varphi_{\alpha}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial a^{\mu}}. \tag{14}$$

再注意到 I^{α} 是系统的第一积分, ψ^{α} 和 φ_{α} 均是 I^{α} 的函数, 故有

$$\frac{\mathrm{d}\varphi_{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \varphi^{\alpha}}{\partial I^{\alpha}}\frac{\mathrm{d}I^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=0, \tag{15}$$

$$\frac{\mathrm{d}\psi^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial \psi^{\alpha}}{\partial I^{\alpha}}\frac{\mathrm{d}I^{\alpha}}{\mathrm{d}t}=0. \tag{16}$$

由此知 (14) 式 (因而 (12) 式) 恒成立.

此外, 容易证明 (10) 式给出的 B 和 R_{μ} 也满足 (7) 式. 进一步, 在 (10) 式中若取 $\varphi_{\alpha}=I_{\alpha}$, $\psi^{\alpha}=G^{\alpha}$, 则有

$$\begin{aligned}\tilde{R}_{\mu}(t,a)&=I_{\alpha}\frac{\partial G^{\alpha}}{\partial a^{\mu}},\\ \tilde{B}(t,a)&=-I_{\alpha}\frac{\partial G^{\alpha}}{\partial t}.\end{aligned} \tag{17}$$

显然, 将 (5) 式中的 G_{α} 与 I^{α} 对换即得上式. 对应于 Hojman 第一形式 (5), 称 (17) 式为 Hojman 方法的第二形式 (以下简称第二形式). 一般来说, 由第一形式 (5) 得到的 (B,R_{μ}) 与由第二形式 (17) 得到的 $(\tilde{B},\tilde{R}_{\mu})$ 不同, 这表明对每一组选定的 $I^{\alpha}(t,a)$ 和 G_{α}, 利用广义 Hojman 方法可以得到不同的 Birkhoff 函数且满足

$$\left(B+\tilde{B}\right)=\left(R_{\mu}+\tilde{R}_{\mu}\right)\dot{a}^{\mu}. \tag{18}$$

事实上, 此关系可以推广到由广义 Hojman 方法给出的任意多组函数 B 和 R_{μ} 上.

3) Birkhoff 系统 Hojman 意义下的循环坐标和循环积分.

将 (7) 式代入 Birkhoff 方程 (1) 展开并整理得

$$\frac{\mathrm{d}R_\rho}{\mathrm{d}t} = -R_\nu \frac{\partial \dot{a}^\nu}{\partial a^\rho}. \tag{19}$$

显然, 当 $\dot{a}^\nu = \varXi^\nu$ 不显含变量 a^ρ 时, 相应的 $R_\rho =$ const. 是系统的第一积分. 称 a^ρ 为 Hojman 意义下的循环坐标, 而 $R_\rho =$ const. 为相应的 Hojman 意义下的循环积分.

4 Whittaker 方程的 Birkhoff 表示及其循环积分

例 用 Hojman 方法和广义 Hojman 方法构造 Whittaker 方程 [1]

$$\ddot{x} - x = 0, \quad \ddot{y} - \dot{x} = 0 \tag{20}$$

的 Birkhoff 函数 B 和 R_μ, 并验证两种方法具有的三条性质.

令

$$\begin{aligned} a^1 &= x, \quad a^2 = y, \\ a^3 &= \dot{x}, \quad a^4 = \dot{y}, \end{aligned} \tag{21}$$

则系统 (20) 可表为如下标准一阶形式:

$$\begin{aligned} \dot{a}^1 &= a^3, \quad \dot{a}^2 = a^4, \\ \dot{a}^3 &= a^1, \quad \dot{a}^4 = a^3. \end{aligned} \tag{22}$$

容易找到 4 个独立的第一积分

$$\begin{aligned} I^1 &= (a^1 + a^3)e^{-t}, \quad I^2 = (a^1 - a^3)e^t, \\ I^3 &= a^4 - a^1, \quad I^4 = a^3 + a^4 t - a^2 - a^1 t. \end{aligned} \tag{23}$$

取满足条件 (6) 的 G_α 为

$$\begin{aligned} G_1 &= I^2, \quad G_2 = -I^1, \\ G_3 &= -I^4, G_4 = I^3, \end{aligned} \tag{24}$$

则由 Hojman 方法 (5) 可求得 R_μ 为

$$\begin{aligned} R_1 &= -a^2 - a^3, \quad R_2 = a^1 - a^4, \\ R_3 &= a^1 + a^4, \quad R_4 = a^2 - a^3. \end{aligned} \tag{25}$$

Birkhoff 函数为

$$B = (a^1)^2 - 2(a^3)^2 - (a^4)^2 + 2a^1 a^4. \tag{26}$$

容易验证, 此组 B 和 R_μ 满足等量关系 (7) 和 Birkhoff 方程 (1). 由于系统的一阶形式 (22) 不含坐标 a^2 且关于 R_2 有

$$\frac{\mathrm{d}R_2}{\mathrm{d}t} = \dot{a}^1 - \dot{a}^4 = \ddot{y} - \dot{x} \equiv 0. \tag{27}$$

此即说明当 a^2 是循环坐标时, $R_2 =$ const. 是系统 Hojman 意义下的循环积分.

由广义 Hojman 方法知, 对选定的同一组 I^α 与 G_α(即 (23), (24) 式), 还可按 (17) 式求得另外一组 B 和 R_μ. 将 (23), (24) 式代入 (17) 式易得

$$\begin{aligned} \tilde{R}_1 &= 2e^{-t}(a^1 + a^4)(a^1 + a^3) + a^2 - a^1, \\ \tilde{R}_2 &= a^4 - a^1, \\ \tilde{R}_3 &= -4e^{-t}(a^1 + a^3)a^3 + a^3 - a^4, \\ \tilde{R}_4 &= 2e^{-t}(a^1 - a^4)(a^1 + a^3) + a^3 - a^2. \end{aligned} \tag{28}$$

而 Birkhoff 函数为

$$\tilde{B} = (a^3)^2 + (a^4)^2 - 2a^1 a^4. \tag{29}$$

容易验证, 函数 $\tilde{B}$ 和 $\tilde{R}_\mu$ 也满足等量关系 (7) 和 Birkhoff 方程 (1). 同时函数 $\tilde{R}_2 =$ const. 也是系统的循环积分, 且 $\left(B, R_\mu\right)$ 与 $\left(\tilde{B}, \tilde{R}_\mu\right)$ 满足 (18) 式.

5 结 论

文章主要讨论了 Hojman 方法、广义 Hojman 方法及 Birkhoff 系统 Hojman 意义下的循环坐标和循环积分. 利用系统所具有的对称性来构造 Birkhoff 函数 B 和 R_μ 是 Hojman 方法的主要特点, 其另一个特点是所构造的函数 B 和 R_μ 总满足关系式 (7). 对 (7) 式的解加以分析即可得出构造 Birkhoff 函数的广义 Hojman 方法. 从广义 Hojman 方法出发则容易得到 Hojman 方法的第二形式. 最后, 将关系式 (7) 与 Birkhoff 方程相结合则可导出 Birkhoff 意义下的循环坐标和循环积分.

[1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical systems* (Providence R I: AMS College Publ)
[2] Santilli R M 1983 *Foundations of theoretical mechanics* Ⅱ (New York: Springer-Verlag)
[3] Hojman S, Urrutia L F 1981 *J. Math. Phys.* **22** 1896
[4] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京: 北京理工大学出版社)]
[5] Guo Y X, Liu C, Liu S X 2010 *Commun. Math.* **18** 21

[6] Mei F X 2009 *Inverse Problems of Dynamics* (Beijing: National Defense Industry Press) (in Chinese) [梅凤翔 2009 动力学逆问题 (北京: 国防工业出版社)]

[7] Ding G T 2008 *Acta. Phys. Sin.* **57** 7415 (in Chinese) [丁光涛 2008 物理学报 **57** 7415]

[8] Guo Y X, Liu C, Liu S X, Chang P 2009 *Sci. Chin.* E **52** 761

[9] Guo Y X, Liu S X, Liu C 2009 *Phys. Lett.* A **373** 3915

[10] Shang M, Mei F X 2009 *Chin. Phys.* B **18** 3155

[11] Zhang Y 2010 *Chin. Phys.* B **19** 080301

[12] Chen X W 2002 *Global Analysis of Birkhoffian System* (Henan: Henan University Press) (in Chinese) [陈向炜 2002 Birkhoff 系统的全局分析 (河南大学出版社)]

[13] Mei F X 1993 *Sci. Chin.* A **36** 1456

[14] Wu H B, Mei F X 2011 *Chin. Phys.* B **20** 104501

[15] Luo S K, Cai J L 2003 *Chin. Phys.* **12** 357

[16] Zheng S W, Jia L Q 2006 *Acta. Phys. Sin.* **55** 5590 (in Chinese) [郑世旺, 贾利群 2006 物理学报 **55** 5590]

[17] Ding G T 2010 *Acta. Phys. Sin.* **59** 3643 (in Chinese) [丁光涛 2010 物理学报 **59** 3643]

[18] Zhang H B, Chen L Q, Gu S L, Liu C Z 2007 *Chin. Phys.* **16** 582

[19] Fu J L, Chen L Q, Xue Y 2003 *Acta. Phys. Sin.* **52** 256 (in Chinese) [傅景礼, 陈立群, 薛纭 2003 物理学报 **52** 256]

[20] Liu S X, Liu C, Guo Y X 2011 *Chin. Phys.* B **20** 034501

[21] Liu S X, Liu C, Guo Y X 2011 *Acta. Phys. Sin.* **60** 064501 (in Chinese) [刘世兴, 刘畅, 郭永新 2011 物理学报 **60** 064501]

[22] Mei F X, Cui J C 2011 *J. Beijing Ins. Tech.* **20** 285

[23] Li Y M, Mei F X 2010 *Chin. Phys.* B **19** 080302

[24] Liu C, Liu S X, Guo Y X 2011 *Sci. Chin.: Tech. Sci.* **54** 2100

[25] Cui J C, Mei F X 2010 *J. Dyn. Control* **8** 297 (in Chinese) [崔金超, 梅凤翔 2010 动力学与控制学报 **8** 297]

General Hojman's method for the construction of Birkhoffian representation*

Cui Jin-Chao[1)] Zhao Zhe[2)] Guo Yong-Xin[1)3)]†

1) (*School of Aerospace Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing* 100081*, China*)

2) (*School of Medical Devices, Shenyang Pharmaceutical University, Shenyang* 110016*, China*)

3) (*College of Physics, Liaoning University, Shenyang* 110036*, China*)

(Received 3 December 2012; revised manuscript received 8 January 2013)

Abstract

We have investigated the internal relation among the first integral, Hojman's method and Birkhoff's equations. There is a special equivalent relationship between Birkhoffian and Birkhoffian functions constructed by Hojman's method, and from this we can derive a more general form of Hojman's method. Then, combining the special equivalent relationship and Birkhoff's equations, we can derive the cyclic integral in Birkhoffian sense. An example is given to illustrate the application of the results.

Keywords: Birkhoffian systems, Hojman's method, General Hojman's method, cyclic integral

PACS: 02.30.Zz, 45.05.+x, 45.10.–b **DOI:** 10.7498/aps.62.090205

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10932002, 11172120, 11202090, 10972127).

† Corresponding author. E-mail: yxguo@lnu.edu.cn