

## 时域磁场积分方程时间步进算法稳定性研究\*

李金艳<sup>†</sup> 聂在平 赵延文

(电子科技大学电子工程学院, 成都 611731)

(2012年10月8日收到; 2012年12月12日收到修改稿)

从时域磁场积分方程时间步进算法出发, 结合范数概念, 从理论上推导得到了感应电流稳定的充分条件. 满足该条件, 可以保证任何形式的入射波入射时, 计算结果都后时稳定. 同时通过推导得到了表征感应电流递推关系的因子, 该因子的大小可以表征感应电流收敛性的相对好坏. 最后通过数值算例验证了感应电流稳定的充分条件, 以及利用本文推导的感应电流递推因子表征感应电流后时稳定性的准确性.

**关键词:** 时域磁场积分方程, 时间步进算法, 后时不稳定性

**PACS:** 02.60.Cb, 42.68.Mj, 41.20.Jb, 02.10.Yn

**DOI:** 10.7498/aps.62.090206

## 1 引言

时域积分方程 (TDIE) 方法<sup>[1-4]</sup> 作为分析瞬态电磁波现象最主要的数值算法之一, 在计算均匀散射体或表面散射体时, 具有计算精度高、未知量数目较少、自动满足辐射条件等优点. 然而, 求解时域积分方程的时间步进 (MOT) 算法存在计算量和存储量大, 后时不稳定等缺点. 各类基于 MOT 算法的快速算法研究一直是 TDIE 方法研究的热点, 其中时域平面波展开 (PWTD)<sup>[5,6]</sup> 算法的提出, 使 TDIE 方法的存储与计算效率得到大幅提高, 在 TDIE 方法的计算能力方面有了较大突破. 关于改进 MOT 算法后时不稳定的研究也有很多, 具体方法包括: 精确计算时域阻抗元素<sup>[7]</sup>, 采用新型时间基函数<sup>[8]</sup> 等. 但这些方法并非解决 MOT 算法后时不稳定的通用方法, 它们都具有一定的适用条件, 这是由于 MOT 算法本身并非无条件稳定的. 而目前关于 MOT 算法本身稳定条件的研究还很少, 不仅每种改进算法的适用条件很难得到, 甚至很难定量判断 MOT 算法计算结果稳定性的好坏. 本文针对时域磁场积分方程的 MOT 算法, 结合范数概念, 从理论上推导得到了时域磁场积分方程 MOT 算法稳定的充分条件. 该条件仅与时域阻抗矩阵相

关, 如果满足该条件, 无论入射波是何种形式, 都能保证计算结果后时稳定, 同时可以根据已有时间步的感应电流结果, 得到已计算的感应电流收敛精度, 以此作为计算终止的条件, 从而无需再计算晚时响应, 节省了计算时间. 通过推导同时得到了表征感应电流递推关系的因子, 在不满足感应电流稳定的充分条件时, 该因子的大小可以表征感应电流收敛性的相对好坏, 最后通过算例验证了上述结论.

## 2 时域磁场积分方程 (TDMFIE) 及其时间步进算法

假设闭金属导体的表面为  $S$ , 其外法线方向为  $\hat{n}$ , 入射磁场为  $\mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t)$ , 该磁场在理想导体表面  $S$  所产生的感应电流为  $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ , 利用理想导体表面磁场所满足的边界条件, 可以得到时域磁场积分方程 (TDMFIE)

$$\begin{aligned} & \hat{n} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)}{2} - \hat{n} \times \frac{1}{\mu} \nabla \\ & \times \left( \frac{\mu}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - R/c)}{R} dS' \right), \quad \forall \mathbf{r} \in S, \quad (1) \end{aligned}$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61171046, 60971033, 60931004, 61231001) 和教育部长江学者和创新团队发展计划 (批准号: IRT1113) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: plianji@163.com

其中,  $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$  为导体表面任意场点与源点之间的距离,  $t - R/c$  为推迟时间,  $c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$  为电磁波的传播速度,  $\mu, \epsilon$  分别为周围媒质的介电常数和磁导率.

利用 MOT 算法求解积分方程 (1), 可以得到下面的矩阵方程:

$$\mathbf{M}_0^H \cdot \mathbf{J}_k = \mathbf{V}_k^{\text{inc,H}} - \sum_{l=1}^{k-1} \mathbf{M}_l^H \cdot \mathbf{J}_{k-l}, \quad (2)$$

其中

$$\mathbf{V}_k^{\text{inc,H}}(m) = \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t_k)) dS, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_l^H(m, n) = & \frac{T(l\Delta t)}{2} \int_{S_m} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}_n(\mathbf{r}) dS \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{S_m} \int_{S_n} \mathbf{f}_m(\mathbf{r}) \cdot \left[ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{f}_n(\mathbf{r}') \right. \\ & \left. \times \hat{\mathbf{R}} \left( \frac{T(t)}{R^2} + \frac{1}{cR} \frac{\partial T(t)}{\partial t} \right) \right]_{t=l\Delta t - \frac{R}{c}} \\ & \times dS' dS, \end{aligned} \quad (4)$$

$T(t)$  为时间基函数,  $\mathbf{f}_n(\mathbf{r})$  为空间基函数. 矩阵方程 (2) 是时间步进算法的基础: 该算法就是通过在时间步上递推求解方程 (2) 来获得所需的每一时间步上的感应电流  $\mathbf{J}_k$ .

### 3 时域磁场积分方程时间步进算法稳定性条件

根据文献 [9] 关于时域磁场积分方程 MOT 算法阻抗矩阵的性质, 若记  $N = \text{int}(R/c\Delta t) + 1$ , 当  $0 \leq l \leq N$  时,  $\mathbf{M}_l^H$  是随参数  $l$  变化的矩阵, 而当  $l > N$  时,  $\mathbf{M}_l^H$  为零矩阵. 将矩阵方程 (2) 做适当变化, 并假设时刻  $k > N$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_k = & (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{V}_k^{\text{inc,H}} \\ & - (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \sum_{l=1}^N \mathbf{M}_l^H \cdot \mathbf{J}_{k-l} \\ = & \mathbf{G}_{0,0}(\mathbf{M}^H) \cdot \mathbf{V}_k^{\text{inc,H}} \\ & + \sum_{l=1}^N \mathbf{F}_{l,0}(\mathbf{M}^H) \cdot \mathbf{J}_{k-l}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{k+1} = & (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{V}_{k+1}^{\text{inc,H}} \\ & - (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \sum_{l=1}^N \mathbf{M}_l^H \cdot \mathbf{J}_{k+1-l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = & (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{V}_{k+1}^{\text{inc,H}} \\ & - (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{M}_1^H \cdot (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{V}_k^{\text{inc,H}} \\ & - \sum_{l=1}^{N-1} ((\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{M}_{l+1}^H \\ & - (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{M}_l^H \cdot (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{M}_l^H) \cdot \mathbf{J}_{k-l} \\ & + (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{M}_1^H \cdot (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{M}_N^H \cdot \mathbf{J}_{k-N} \\ = & \sum_{l=0}^1 \mathbf{G}_{l,1}(\mathbf{M}^H) \cdot \mathbf{V}_{k+l}^{\text{inc,H}} \\ & + \sum_{l=1}^N \mathbf{F}_{l,1}(\mathbf{M}^H) \cdot \mathbf{J}_{k-l}, \end{aligned} \quad (6)$$

.....

由此可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{k+a} = & \sum_{l=0}^a \mathbf{G}_{l,a}(\mathbf{M}^H) \cdot \mathbf{V}_{k+l}^{\text{inc,H}} \\ & + \sum_{l=1}^N \mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H) \cdot \mathbf{J}_{k-l}, \end{aligned} \quad (7)$$

( $a = 0, 1, \dots$ ),

其中  $\mathbf{G}_{l,a}(\mathbf{M}^H), \mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)$  为与参数  $l, a$  相关的, 对  $\mathbf{M}_m^H$  ( $m = 0, 1, \dots, N$ ) 进行矩阵运算的计算式. 对 (7) 式取相容的算子范数, 并经过推导可以得到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}_{k+a}\| = & \left\| \sum_{l=0}^a \mathbf{G}_{l,a}(\mathbf{M}^H) \cdot \mathbf{V}_{k+l}^{\text{inc,H}} \right. \\ & \left. + \sum_{l=1}^N \mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H) \cdot \mathbf{J}_{k-l} \right\| \\ \leq & \sum_{l=0}^a \|\mathbf{G}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\| \|\mathbf{V}_{k+l}^{\text{inc,H}}\| \\ & + \sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\| \|\mathbf{J}_{k-l}\|. \end{aligned} \quad (8)$$

根据入射波的特性, 当  $k$  很大时,  $\|\mathbf{V}_{k+l}^{\text{inc,H}}\| \rightarrow 0$ . 因此可以得到当  $k$  很大时,

$$\|\mathbf{J}_{k+a}\| \leq \sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\| \|\mathbf{J}_{k-l}\|. \quad (9)$$

实际上, 根据 (5) 式可知, 感应电流  $\mathbf{J}_k$  取决于入射波的贡献 (等式右边第一项) 与前面时刻感应电流的累积 (等式右边第二项), 当  $k$  很大时, 入射波的贡献很小 (第 4 部分数值算例中将给出), 因此感应电流  $\mathbf{J}_k$  的稳定性主要取决于前面时刻电流的累积, 这也是 MOT 算法稳定性普遍认可的结论. 若记  $\max \{\|\mathbf{J}_{k-l}\|, l = 1, 2, \dots, N\} = J_{k,\text{max}}$ , 那么 (9) 式可

以变为

$$\|\mathbf{J}_{k+a}\| \leq J_{k,\max} \sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\|. \quad (10)$$

同理可以得到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}_{k+1+a}\| &\leq J_{k+1,\max} \sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\| \cdots \|\mathbf{J}_{k+2a}\| \\ &\leq J_{k+a,\max} \sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\|, \end{aligned} \quad (11)$$

其中  $\sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\|$  与参数  $k$  无关,

$$\max \{ \|\mathbf{J}_{k+p-l}\|, l=1, 2, \dots, N \} = J_{k+p,\max} \quad (p=0, 1, \dots, a).$$

若记

$$\begin{aligned} &\max \{ \|\mathbf{J}_q\|, q=k-N, k-N+1, \dots, k+a-1 \} \\ &= J_{q,\max}, \end{aligned}$$

那么有  $J_{k+p,\max} \leq J_{q,\max}$  ( $p=0, 1, \dots, a$ ). 若满足条件  $\sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\| < 1$ , 可以得到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{J}_{k+a}\| &\leq J_{k,\max} \sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\| \leq J_{q,\max}, \\ &\vdots \\ \|\mathbf{J}_{k+2a}\| &\leq J_{k+a,\max} \sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\| \leq J_{q,\max}, \\ \|\mathbf{J}_{k+1+2a}\| &\leq \max(J_{k+a,\max}, \|\mathbf{J}_{k+a}\|) \\ &\quad \times \sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\| \leq J_{q,\max}, \quad (12) \\ \|\mathbf{J}_{k+2+2a}\| &\leq \max(J_{q,\max}, \|\mathbf{J}_{k+a+1}\|) \\ &\quad \times \sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\| \leq J_{q,\max}, \\ &\vdots \\ \|\mathbf{J}_{k+a+n}\| &\leq J_{q,\max} (n=0, 1, \dots). \end{aligned}$$

因此条件

$$\sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\| < 1 \quad (13)$$

为感应电流稳定的充分条件. 通过以上推导可以看出, 对于任意的  $a$  满足条件 (13), 都有 (12) 式的结论, 即可判断感应电流稳定. 并且当  $k' \geq k+a$  时, 有  $\|\mathbf{J}_{k'}\| \leq J_{q,\max}$ , 根据此结论, 可以仅计算  $k+a$  时刻前的感应电流, 即可满足收敛精度小于  $J_{q,\max}$ .  $\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)$  的计算可以通过以下递推关系得到:

$$\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)$$

$$= \begin{cases} -(\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{M}_l^H, & a=0, \\ -\sum_{v=1}^a (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{M}_v^H \cdot \mathbf{F}_{l,a-v}(\mathbf{M}^H) \\ \quad - (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \mathbf{M}_{a+l}^H, & 0 < a < N, \\ -\sum_{v=1}^N (\mathbf{M}_0^H)^{-1} \cdot \mathbf{M}_v^H \\ \quad \times \mathbf{F}_{l,a-v}(\mathbf{M}^H), & a \geq N. \end{cases} \quad (14)$$

但是在实际计算中, 很难计算  $a$  取值较大时的  $\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)$ , 并且条件 (13) 是感应电流稳定的充分条件, 即无论入射波是何种形式, 感应电流均稳定, 对于某一入射波的情况, 不满足条件 (13), 感应电流仍有可能收敛. 因此, 一般情况下只计算  $a$  较小时  $\sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\|$  的值, 即使不满足条件 (13),  $\sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\|$  也是表征电流递推关系的因子, 它的大小可以表征感应电流收敛性的相对好坏.

## 4 数值算例

本节中, 采用的入射高斯脉冲表达式为

$$\mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) = \frac{4\hat{x}}{T\sqrt{\pi}} \exp(-\gamma^2), \quad (15)$$

其中  $\gamma = 4(ct - ct_w - \mathbf{r} \cdot \mathbf{k})/T$ , 入射方向  $\mathbf{k} = \hat{z}$ , 脉冲宽度  $T = 4$  m.

采用的入射调制高斯脉冲表达式为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{\text{inc}}(\mathbf{r}, t) &= \hat{x} \cos \left[ 2\pi f_0 \left( t - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{c} \right) \right] \\ &\quad \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left( \frac{ct - ct_w - \mathbf{r} \cdot \mathbf{k}}{c\sigma} \right)^2 \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

其中入射方向  $\mathbf{k} = \hat{z}$ ,  $\sigma = 6/(2\pi f_w)$ ,  $f_0 = 150$  MHz,  $f_w = 100$  MHz,  $t_w = 3.5\sigma$ .

并令

$$A_a = \sum_{l=1}^N \|\mathbf{F}_{l,a}(\mathbf{M}^H)\|_2, \quad (17)$$

其中算子范数  $\|\cdot\|_2$  为矩阵的谱范数.

首先验证本文实现的时域磁场积分方程时间步进算法的准确性. 算例是半径为 0.5 m、中心位于原点的理想导体球, 导体球被剖分为 400 个三角形单元, 未知电流数目为 600 个. 入射波为高斯平面波 (如 (15) 式所示, 其最高频率  $f_{\max} = 180$  MHz, 为高斯平面波频谱相对幅度下降为 2% 时的频率), 时间步长  $\Delta t = 0.2$  ns. 图 1 给出了利用本文实现的 TDMFIE-MOT 算法计算的时域响应再进行傅里叶变换得到的双站雷达散射截面 (RCS) 与球的 Mie

解析解的比较,从图中可以看出各频点上的计算结果与 Mie 解析结果符合得都比较好,验证了本文实现的 TDMFIE-MOT 算法的正确性.

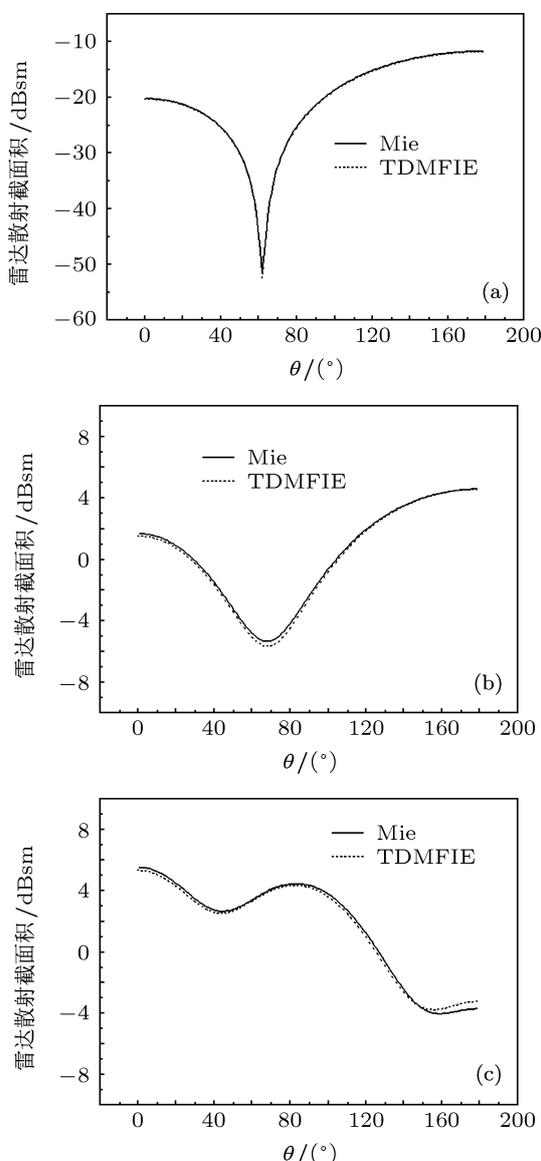


图1 利用 TDMFIE-MOT 算法计算金属球各频点双站 RCS 与 Mie 级数解的对比 (a) 频率为 30 MHz; (b) 频率为 100 MHz; (c) 频率为 180 MHz

然后通过算例对本文推导出的电流递推因子  $A_a$  做相关讨论. 同样计算半径为 0.5 m、中心位于原点的理想导体球. 当入射波为高斯脉冲 (如 (15) 式所示) 时, 图 2 给出了仅有入射波贡献而不考虑感应电流累积 (即只考虑矩阵方程 (2) 右端第一项的贡献) 的情况下, 与利用 TDMFIE-MOT 算法时间步长分别取 0.4 ns, 0.7 ns, 1.0 ns 时, 计算的位于球面 (0.5 m, 0, 0) 处的感应电流结果, 从图中可以看出, 入射波的贡献在时间  $t$  较大 ( $t > 100$  ns) 时已非常小, 说明感应电流后时稳定性主要取决于矩阵方程

(2) 右端第二项的贡献, 即前面时刻感应电流的累积. 图 3 给出了入射波为 (16) 式所示调制高斯脉冲, 利用 TDMFIE-MOT 算法时间步长分别取 0.4 ns, 0.7 ns, 1.0 ns 时, 计算的位于球面 (0.5 m, 0, 0) 处的感应电流结果. 图 3 中感应电流后时稳定性结果与入射波为高斯脉冲时的结果类似, 都具有相近的后时收敛性.

图 4 给出了时间步长分别取 0.4 ns, 0.7 ns, 1.0 ns 时, 电流递推因子  $A_a$  的计算曲线 ( $A_a$  与入射波无关). 从图中可以看出, 随着  $a$  取值的增大,  $A_a$  具有减小的趋势, 当时间步长  $\Delta t = 1.0$  ns,  $a = 5$  时, 已满足  $A_a < 1$  的条件, 根据第 3 部分的推导, 可以得到感应电流稳定不会出现后时发散的结论. 从图 2 与图 3 中可以看到, 无论入射波为高斯脉冲还是调制高斯脉冲, 感应电流后时均收敛, 验证了上述结论. 同时以入射波为高斯脉冲为例, 如果假设计算精度要求为  $1.0 \times 10^{-5}$ , 根据计算结果, 当  $k = 100, \dots, 110$  时, 有  $J_{q\max} < 1.0 \times 10^{-5}$ , 根据第 3 部分的结论, 可以得到  $k > 110$  时, 有  $\|J_k\|_2 < 1.0 \times 10^{-5}$ , 那么只需计算 110 个时间步长的感应电流即可达到要求.

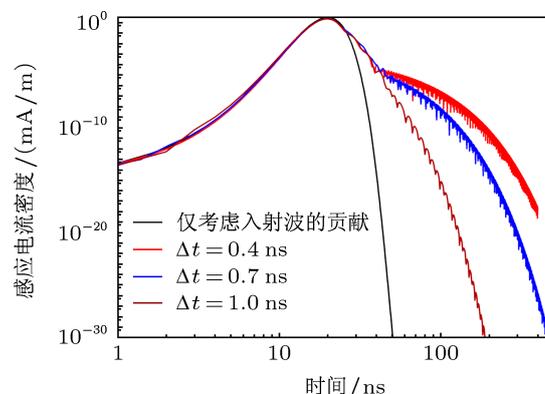


图2 入射波为高斯脉冲, 中心位于原点、半径 0.5 m 的理想导体球表面 (0.5 m, 0, 0) 处的感应电流计算结果 (仅考虑入射波贡献, 与利用 TDMFIE-MOT 算法时间步长分别取 0.4 ns, 0.7 ns, 1.0 ns 时的比较)

当计算的  $A_a$  ( $a \leq 10$ ) 不满足条件 (13) 式时, 通过算例验证  $A_a$  大小可以表征感应电流稳定性的相对好坏. 由于不同情况下  $A_a$  随参数  $a$  减小的趋势不同, 为更具有普遍性, 这里以  $A_0$  作为判断标准. 在上一个算例中, 当时间步长分别取 0.4 ns, 0.7 ns, 1.0 ns 时,  $A_0$  分别为 2.6763, 2.3671, 1.5109. 从图 2 与图 3 中可以看出,  $A_0$  越小对应的感应电流收敛性越好, 后时越稳定.

再利用 TDMFIE-MOT 算法计算边长为 1.0 m, 中心位于原点的立方体, 立方体被剖分为 240 个三

角形单元, 未知电流数目为 360 个. 入射波为 (15) 式所表述的高斯平面波. 图 5 给出了时间步长分别取 0.3 ns, 0.5 ns, 0.7 ns 时, 位于立方体表面 (0.5 m, 0, 0) 处的感应电流计算结果. 时间步长 0.3 ns, 0.5 ns, 0.7 ns 所对应  $A_0$  的大小分别为 5.5824, 4.1338, 3.5608, 可以看出  $A_0$  越大时, 对应的感应电流收敛性越差, 当时间步长  $\Delta t = 0.3$  ns 时, 感应电流计算结果已经发散.

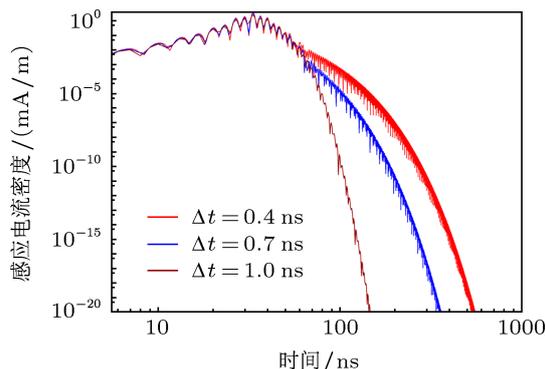


图 3 入射波为调制高斯脉冲, 中心位于原点、半径 0.5 m 的理想导体球表面 (0.5 m, 0, 0) 处的感应电流计算结果 (时间步长分别取 0.4 ns, 0.7 ns, 1.0 ns)

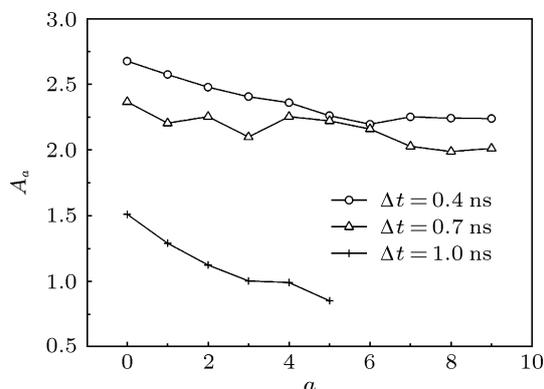


图 4 利用 TDMFIE-MOT 算法计算中心位于原点、半径 0.5 m 的理想导体球时, 电流递推因子  $A_0$  随参数  $a$  的变化曲线 (时间步长分别取 0.4 ns, 0.7 ns, 1.0 ns)

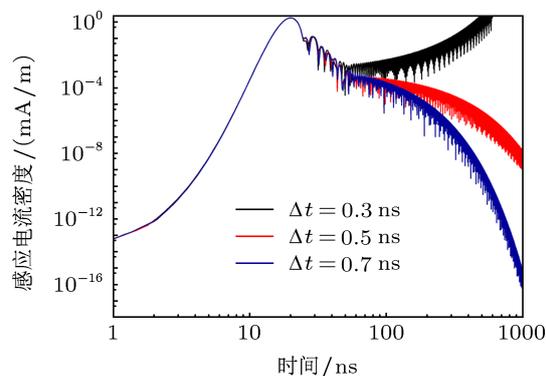


图 5 入射波为高斯脉冲, 中心位于原点、边长 1 m 的立方体表面 (0.5 m, 0, 0) 处的感应电流计算结果 (时间步长分别取 0.3 ns, 0.5 ns, 0.7 ns)

图 6 给出了入射波为 (15) 式所述的高斯平面波, 采用 TDMFIE-MOT 算法, 导体球目标时间步长分别取 0.2 ns 和 0.4 ns 以及立方体目标时间步长分别取 0.5 ns 与 0.7 ns 的感应电流后时稳定性结果比较, 球目标时间步长  $\Delta t = 0.2$  ns 时,  $A_0 = 3.8353$ . 从图中可以看出, 当  $A_0$  越小时, 对应的感应电流收敛性越好, 后时越稳定, 结论与同一目标的结果一致, 进一步验证了相同入射波的情况下,  $A_0$  值越小, 对应的感应电流收敛性越好.

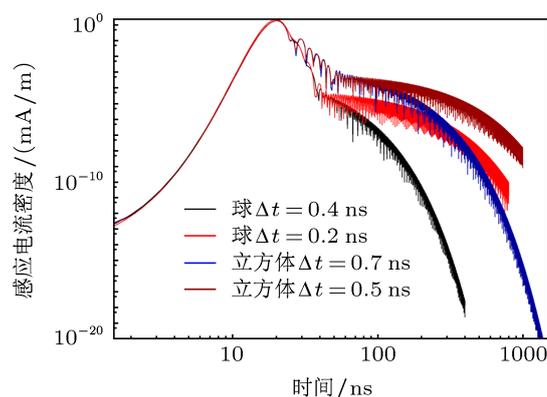


图 6 入射波为高斯脉冲, 半径 0.5 m 的理想导体球时间步长分别为 0.4 ns, 0.2 ns, 以及边长 1 m 的立方体时间步长分别为 0.7 ns, 0.5 ns 时, 感应电流后时稳定性结果比较

## 5 结论

本文从理论上推导得到了时域磁场积分方程时间步进算法感应电流稳定的充分条件, 如果满足该条件, 无论入射波是何种形式, 都能保证计算结果后时稳定. 同时可以根据已有时间步的感应电流结果, 得到已计算的感应电流收敛精度, 以此作为计算终止的条件, 从而无需再计算晚时响应, 节省了计算时间.

通过推导同时得到了表征感应电流递推关系的因子, 该因子的大小可以表征感应电流稳定性的相对好坏. 在数值算例中, 先后验证了相同入射波与目标、不同时间步长感应电流稳定性与该因子的关系, 以及相同入射波、不同目标与时间步长感应电流稳定性与该因子的关系.

最后需要说明, 按照第三部分的推导, 任意相容的算子范数都可以用于 (13) 式的判断, 相比之下采用谱范数更适合 TDMFIE-MOT 算法稳定性的判断, 因为谱范数既可以体现矩阵所有元素的贡献, 又是与向量 2 范数相容的最小的算子范数, 因此采用谱范数更为准确.

- [1] Shi Y, Jin J M 2011 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **59** 969
- [2] Qin S T, Guo L X, Dai S Y, Gong S X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 074217 (in Chinese) [秦三团, 郭立新, 代少玉, 龚书喜 2011 物理学报 **60** 074217]
- [3] Shi Y F, Xia M Y, Chen R S, Michielssen E, Lu M Y 2011 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **59** 574
- [4] Wei B, He Q, Li J, Ge D B, Guo L X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 104102 (in Chinese) [魏兵, 何琼, 李杰, 葛德彪, 郭立新 2011 物理学报 **60** 104102]
- [5] Shanker B, Ergin A A, Aygün K, Michielssen E 2000 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **48** 510
- [6] Shanker B, Ergin A A, Lu M Y, Michielssen E 2003 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **51** 628
- [7] Zhao Q G, Zhao Y W, Bi H Y, Nie Z P 2008 *Acta Electronica Sin.* **36** 1135 (in Chinese) [赵庆广, 赵延文, 毕海燕, 聂在平 2008 电子学报 **36** 1135]
- [8] Daniel S W, Greeshma P, Chen N W, Shanker B, Michielssen E 2004 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **52** 283
- [9] Li J Y, Zhao Y W, Nie Z P 2010 *Electromagnetics* **30** 448

# Investigation of the stability of time-domain magnetic field integral equations based on marching on-in time algorithm\*

Li Jin-Yan<sup>†</sup> Nie Zai-Ping Zhao Yan-Wen

(School of Electronic Engineering, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 611731, China)

(Received 8 October 2012; revised manuscript received 12 December 2012)

## Abstract

A sufficient stability condition for time-domain magnetic field integral equations (TDMFIE) based on marching on-in time (MOT) algorithm is obtained through theoretical derivation using the norm. If the condition is satisfied, it can be ensured that the computational results will always be stable in late-time no matter what kind of incident wave is. Moreover, a factor expressing the recursive relationship of the currents is obtained, which can represent the constringency of the currents. Finally, the sufficient stability condition is validated by numerical results. Meanwhile, the numerical results also verify that the factor can be used to represent the stability of the currents.

**Keywords:** time-domain magnetic field integral equations (TDMFIE), marching on-in time (MOT), late-time instability

**PACS:** 02.60.Cb, 42.68.Mj, 41.20.Jb, 02.10.Yn

**DOI:** 10.7498/aps.62.090206

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61171046, 60971033, 60931004, 61231001), and the Program for Changjiang Scholars and Innovative Research Team in University of Ministry of Education of China (Grant No. IRT1113).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: plianji@163.com