

初态对光波导阵列中连续量子行走影响的研究

任春年¹⁾²⁾ 史鹏¹⁾ 刘凯¹⁾ 李文东¹⁾ 赵洁¹⁾ 顾永建^{1)†}

1) (中国海洋大学, 信息科学与工程学院, 青岛 266100)

2) (青岛科技大学, 信息科学与技术学院, 青岛 266046)

(2012年9月13日收到; 2012年12月7日收到修改稿)

本文使用近邻耦合模型得到的解析解, 分析了周期性波导中输入态对量子行走的粒子数的概率分布函数和二阶相干性的影响. 结果表明: 输入态的对称性质对量子行走过程的二阶相干度有影响, 而对粒子数的概率分布函数影响不大.

关键词: 周期性光波导阵列, 量子行走, 二阶相干度, 纠缠态

PACS: 03.67.Lx, 42.50.Ex, 03.67.Bg

DOI: 10.7498/aps.62.090301

1 引言

由 Aharonov^[1] 提出量子行走是与经典行走对应的量子现象, 可以二次方加速经典行走的运算速度, 量子行走后的粒子具有双正态分布、与初始状态具有密切相关性等特性. 通过投币和移位算符的作用, 量子行走可以形成一个任意大的相干态, 相干态赋予量子行走过程并行运算的能力. 目前已有几个量子行走的算法出现, 并且被广泛应用于某些物理学方程 (狄拉克方程、马尔科夫性动力学方程) 的求解、空间搜索以及隐含子集的求解等问题^[2,3]. 国内从事量子行走的研究工作人员在该领域的理论和实验上都取得了较大的进展. Xue 等人分析了捕陷的铯原子在一维光晶格中行走中的退相干因素^[4], 近期该课题组又提出了高阶量子行走的线性光学实现方案^[5]. Zhang 等人利用 Q-Plates 操纵波导中的模式跳变实现了几百步以上的行走^[6].

量子行走的物理实现是当前研究量子行走的一个热点. 周期性光波导阵列 (图 1) 具有易于集成各类光量子器件、器件之间的耦合程度高、退相干程度小和鲁棒性高等优势. 因而成为量子行走很有竞争力的一类物理实现方案, Rai 等^[7] 在理论上分析了波导型光耦合器中的非经典光子演

化问题. Perets 等在实验上实现了光波导中的量子行走, 指出光子通过光波导间耦合作用的实质是连续量子行走 (CQW)^[8]. Bromberg 等^[9] 将耦合器模型应用到周期阵列波导上, 提出了描述周期阵列波导的全量子理论-近邻耦合模型 (nearest-neighbor couplings), 该模型为耦合光波导阵列的光量子传输提供了精确的解析解. 近期 Peruzzo^[10], Sansoni^[11] 和 Matthews^[9,12] 等实验的结果充分验证了近邻耦合模型的正确性. Solntsev 等^[13] 利用二阶非线性效应实现了阵列波导中的量子行走, 该实验将量子行走与波导中的非线性光学联系起来, 这必将给光波导中的量子行走理论带来内涵丰富的、崭新的研究内容.

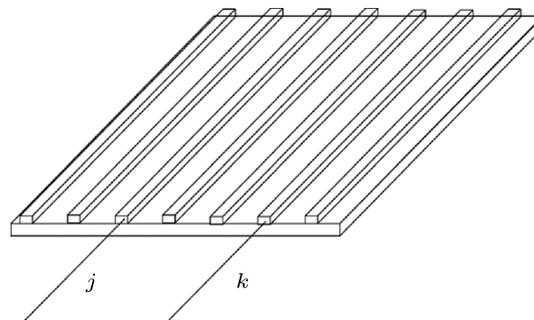


图 1 $N \times N$ 周期性光波导

初始状态对于量子动力学的演化过程影

† 通讯作者. E-mail: yjgu@ouc.edu.cn

响巨大,但以前的文献并没有讨论光波导阵列量子行走动力学的初始状态问题.本文在文献研究基础上,分析初始状态的对称性及输入端口位置变化对光波导中量子行走动力学过程的影响.首先讨论了阵列波导中输入态的不同类型,分别对直积态和纠缠态进行了讨论,并定义了一个对称性参数,以用于描述输入态的特征.其次利用近邻耦合模型的结果分析了不同状态下输出态的概率分布和输出态的相干度.

2 周期阵列波导输入态分类

量子光学中的常用量子态包括粒子数态、相干态、光学压缩态等,为简化运算本文选取最基本的粒子数态进行相关分析.当阵列波导输入光子处于粒子数态时,其入射位置可以任意选定,因此周期性阵列波导具有多种形式的输入状态.

1) 任意两个及多个远离边界的输入端口,输入无关联的光子态 $\psi_{in} = |m\rangle \otimes |n\rangle$,此时初始状态为两直积态.

2) 任意两个远离边界的输入端,若输入纠缠态, $|\Psi_{input}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|MN\rangle_{jk} + |NM\rangle_{jk})$,为降低计算的复杂性,同时不损失理论的一般性,这里把输入的纠缠态简化为最简单的纠缠态形式: $|\Psi_{input}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|10\rangle_{jk} + |01\rangle_{jk})$.

3 输入光子处于直积态时,均匀的周期波导动力学分析

处于粒子数直积态 $\psi_{in} = |m\rangle \otimes |n\rangle$ 的无关联的光子分别从 j, k 两个端口入射到周期阵列波导.我们可以采用产生算符表示该态

$$\begin{aligned} \psi_{in} &= |m\rangle_j \otimes |n\rangle_k \\ &= \frac{1}{\sqrt{m!n!}} (a_j^\dagger(0))^m (a_k^\dagger(0))^n |00\rangle_{jk}, \end{aligned} \quad (1)$$

光波导的全量子理论在相互作用表象下可以由海森伯方程给出,如果不考虑波导的损耗和热库噪声,只考虑近邻波导之间的相互耦合作用,建立起来的运动方程被称为近邻耦合模型^[1].由近邻耦合模型出发,只要写出该体系的哈密顿量代入到海森伯方程后就可以得到力学量 $a_m^\dagger(z)a_n^\dagger(z)$ 的运动方程

$$i \frac{da_m^\dagger(z)a_n^\dagger(z)}{dz}$$

$$\begin{aligned} &= 2\beta a_m^\dagger(z)a_n^\dagger(z) + Ca_m^\dagger(z)a_{n+1}^\dagger(z) \\ &\quad + Ca_m^\dagger(z)a_{n-1}^\dagger(z) + Ca_n^\dagger(z)a_{m+1}^\dagger(z) \\ &\quad + Ca_n^\dagger(z)a_{m-1}^\dagger(z), \end{aligned} \quad (2)$$

β 是光波导的传播常数; C 是邻近波导的耦合常数,通常假设所有的近邻耦合都相同; a_m^\dagger 表示第 m 个波导中光子的产生算符.

因此时只有两个端口 (j, k 分支) 有光子注入到波导中,使用近邻耦合模型并忽略光波导中的损耗,光子的运动方程的解为

$$\begin{aligned} a_m^\dagger(z) &= e^{i\beta z} \left[i^{m-j} J_{m-j}(2Cz) a_j^\dagger(0) \right. \\ &\quad \left. + i^{m-k} J_{m-k}(2Cz) a_k^\dagger(0) \right], \end{aligned} \quad (3)$$

这里的 J_n 为第 n 阶 Bessel 函数.

可以得到周期阵列波导第 m 个分支的输出状态上的光子数

$$\begin{aligned} N_m(z) &= \langle a_m^\dagger(z) a_m(z) \rangle \\ &= (J_{m-j}(2Cz) J_{m-j}(2Cz))^* n_j \\ &\quad + (J_{m-k}(2Cz) J_{m-k}(2Cz))^* n_k, \end{aligned} \quad (4)$$

$n_j(0)$ 是波导的第 j 个分支中输入的光子数, $n_k(0)$ 是第 k 个分支中输入的光子数.为分析方便,令 $S = \frac{n_j}{n_k}$ 为对称参数,以反映从不同的分支输入的光子的数量的比例关系,从而可以表示入射光子所处量子态的一种对称性.

对于不考虑光子在波导中传输产生的损耗情况,有 (4) 可以得到分布概率

$$P_m = \frac{N_m}{n_j + n_k}. \quad (5)$$

标准偏差反映了随机变量之间的弥散程度,应用于基于量子行走的计算过程,标准偏差能够反映出该计算过程的速度.根据标准偏差的定义,利用上式中得到的概率分布不难得到量子行走的标准偏差.

二阶相干度是能够反映光的量子性的重要的参数,下面我们先导出二阶相干函数,再导出二阶相干度

$$\begin{aligned} \langle a_m^\dagger a_n^\dagger a_n a_m \rangle &= \langle a_j^\dagger a_j^\dagger a_j a_j \rangle + \langle a_k^\dagger a_k^\dagger a_k a_k \rangle \\ &\quad + \langle a_j^\dagger a_k^\dagger a_k a_j \rangle (1 + e^{i\theta}) \\ &\quad + \langle a_k^\dagger a_j^\dagger a_j a_k \rangle (1 + e^{i\theta}), \end{aligned} \quad (6)$$

θ 是第 j 分支光子运动到 m, n 分支与第 k 分支光子运动到 m, n 分支之间的相位差,由于光子运动过程中存在复杂的路径,位相关系 $e^{i\theta}$ 项求平均后为 0.

因此对于粒子数态二阶相干函数可以简化为如下形式:

$$\begin{aligned} \langle a_m^\dagger a_n^\dagger a_n a_m \rangle &= J_{m-j}(2Cz) J_{n-k}(2Cz) \\ &\quad \times J_{m-j}(2Cz)^* J_{n-k}(2Cz)^* n_j^2 \\ &\quad + J_{m-k}(2Cz) J_{n-j}(2Cz) \\ &\quad \times J_{m-k}(2Cz)^* J_{n-j}(2Cz)^* n_k^2. \end{aligned} \quad (7)$$

于是得到二阶相关度的表示为

$$g_{mn}^2 \equiv \frac{\langle a_m^\dagger a_n^\dagger a_n a_m \rangle}{\langle a_m^\dagger a_m \rangle \langle a_n^\dagger a_n \rangle}. \quad (8)$$

把(4)和(6)代入下面表示出二阶相关度的精确地解析形式:

$$\begin{aligned} g_{mn}^2 &= (J_{m-j}(2Cz) J_{n-k}(2Cz) \\ &\quad \times J_{m-j}(2Cz)^* J_{n-k}(2Cz)^* n_j^2 \\ &\quad + J_{m-k}(2Cz) J_{n-j}(2Cz) \\ &\quad \times J_{m-k}(2Cz)^* J_{n-j}(2Cz)^* n_k^2) \\ &\quad \times ((J_{m-j}(2Cz) J_{m-j}(2Cz)^* n_j \\ &\quad + J_{m-k}(2Cz) J_{m-k}(2Cz)^* n_k) \\ &\quad \times (J_{n-j}(2Cz) J_{n-j}(2Cz)^* n_j \\ &\quad + J_{n-k}(2Cz) J_{n-k}(2Cz)^* n_k))^{-1}. \end{aligned} \quad (9)$$

本节我们得到了直积态下,量子行走的概率分布函数和二阶相干度函数.这两个函数对于分析量子行走是非常重要的,对于输出态来讲,有了这两个函数可以很容易的写出粒子数表象下的量子态.这对于研究波导中的量子行走有着重要的意义.

4 输入光子处于纠缠态时,均匀的周期波导动力学分析

处于纠缠态光子对的动力学演化特性是一个重要的研究课题,这里我们通过简单的推导可以给出一个精确的解析解.处于纠缠态光子对分别输入到光波导的 j, k 格子分支时,通过类似处理直积态的方法,得到各个输出端口的概率分布:

假设注入到波导的第 j, k 格子中光子的初态是 $|\Psi_{\text{input}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_{jk} + |01\rangle_{jk})$ 这个初态的在物理上可以解释成光子的路径态,借助于光子的产生和消灭算符可进一步把该初态写成如下形式:

$$\begin{aligned} |\Psi_{\text{input}}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|10\rangle_{jk} + |01\rangle_{jk}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(a_j^\dagger(0) + a_k^\dagger(0)) |00\rangle_{jk}]. \end{aligned} \quad (10)$$

当只考虑输入端的第 j 个端口有一个光子输入时, $a_j^\dagger(0)$ 在波导中演化后,在第 m 个分支的产生算符演化为 $a_m^\dagger(z)_I = e^{i\beta z} [i^{m-j} J_{m-j}(2Cz) a_j^\dagger(0)]$,当只考虑输入端的第 k 个端口有一个光子输入时, $a_k^\dagger(0)$ 演化后在第 m 个分支的产生算符演化为 $a_m^\dagger(z)_{II} = e^{i\beta z} [i^{m-k} J_{m-k}(2Cz) a_k^\dagger(0)]$.最后根据叠加原理将上面得到的两部分相加,则可以计算出第 m 个分支的产生算符为

$$a_m^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} (a_m^\dagger(z)_I + a_m^\dagger(z)_{II}), \quad (11)$$

输出端第 m 个波导中的光子数为

$$\begin{aligned} N_m &= \langle a_m^\dagger(z) a_m(z) \rangle \\ &= \left\langle \frac{1}{2} (a_m^\dagger(z)_I + a_m^\dagger(z)_{II}) (a_m(z)_I + a_m(z)_{II}) \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} \left\langle \left\{ e^{i\beta z} [i^{m-j} J_{m-j}(2Cz) a_j^\dagger(0)] \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + e^{i\beta z} [i^{m-k} J_{m-k}(2Cz) a_k^\dagger(0)] \right\} \right. \\ &\quad \cdot \left\{ e^{-i\beta z} [-i^{m-j} J_{m-j}(2Cz)^* a_j(0)] \right. \\ &\quad \left. + e^{-i\beta z} [-i^{m-k} J_{m-k}(2Cz)^* a_k(0)] \right\} \left. \right\rangle \\ &= \frac{1}{2} J_{m-j}(2Cz) J_{m-j}(2Cz)^* n_j \\ &\quad + J_{m-k}(2Cz) J_{m-k}(2Cz)^* n_k. \end{aligned} \quad (12)$$

输出端任意的两个波导分支 m, n 的二阶相关函数可表示为

$$\begin{aligned} \langle a_m^\dagger a_n^\dagger a_n a_m \rangle &= \frac{1}{4} \left\langle J_{m-j} J_{n-j} J_{n-j} J_{m-j} a_j^\dagger a_j^\dagger a_j a_j \right. \\ &\quad \left. + J_{m-k} J_{n-k} J_{n-k} J_{m-k} a_k^\dagger a_k^\dagger a_k a_k \right. \\ &\quad \left. + J_{m-j} J_{n-k} J_{n-k} J_{m-j} a_j^\dagger a_k^\dagger a_k a_j \right. \\ &\quad \left. + J_{m-k} J_{n-j} J_{n-j} J_{m-k} a_k^\dagger a_j^\dagger a_j a_k \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} (J_{m-j} J_{n-j} J_{n-j} J_{m-j} n_j^2 \\ &\quad + J_{m-k} J_{n-k} J_{n-k} J_{m-k} n_k^2 \\ &\quad + J_{m-j} J_{n-k} J_{n-k} J_{m-j} n_j n_k \\ &\quad + J_{m-k} J_{n-j} J_{n-j} J_{m-k} n_k n_j). \end{aligned} \quad (13)$$

将(12)和(13)式代入到(10)式就可以得到处于纠缠态的光子在光波导中量子行走后,输出端各端口之间的二阶相干度的表达式.

$$g_{mn}^2 = \left(\frac{1}{4} (J_{m-j} J_{n-j} J_{n-j} J_{m-j} n_j^2 \right. \\ \left. + J_{m-k} J_{n-k} J_{n-k} J_{m-k} n_k^2 \right)$$

$$\begin{aligned}
 & +J_{m-j}J_{n-k}J_{n-k}J_{m-j}n_jn_k \\
 & +J_{m-k}J_{n-j}J_{n-j}J_{m-k}n_kn_j)) \\
 & \times ((J_{m-j}(2Cz)J_{m-j}(2Cz)^*n_j \\
 & +J_{m-k}(2Cz)J_{m-k}(2Cz)^*n_k) \\
 & \times (J_{n-j}(2Cz)J_{n-j}(2Cz)^*n_j \\
 & +J_{n-k}(2Cz)J_{n-k}(2Cz)^*n_k))^{-1}. \quad (14)
 \end{aligned}$$

5 仿真结果与分析

方程 (4) 和 (11) 中唯一的一个参数就是耦合常数, 我们用硅的耦合常数 ($C = 1.53 \times 10^{11}$ Hz) 作为仿真参数, 仿真的结构如图 2 所示, 其中图 2(a) 和 (b) 为输入端的对称参数分别为 $S = 1$ 和 $S = 0.1$ 时周期阵列波导的输出端光子的分布概率的仿真结果. 图 2(c) 和 (b) 分别为 $S = 1$ 和 $S = 0.1$ 输出端口间的二阶相关度分布情况的仿真结果. 方程 (12) 和

(14) 式分别表示输入光子处于纠缠态时光子的分布概率和二阶相干度, 仿真的结果在图 3 中表示.

图 2(a), (b) 是输入光子分别在对称性参数为 $S = 1$ (对称性最高) 和 $S = 0.1$ (代表不对称的情况) 时光波导输出端光子的分布概率. 反映了两个端口输入态的对称性越高, 光子的分布概率越集中, 反之输入态对称性越差光子概率分布越均匀. 图 2(c), (d) 说明各端口之间的二阶相干度与输入态对称性也有依赖关系, 输入态对称性较高时, 二阶相关度全部小于 1, 输入态对称性较低时, 二阶相关度的值的分布非常不均匀, 大多数端口的二阶相关度的值大于 1. 说明光子在对称性参数变化时关联特性出现从负关联到正关联的变化.

图 3(a), (b) 结果表明: 双光子的纠缠态量子行走在输出端的光子数概率分布并没有明显的差异, 但是二阶相干度与直积态的量子行走在输出端的分布是不同的.

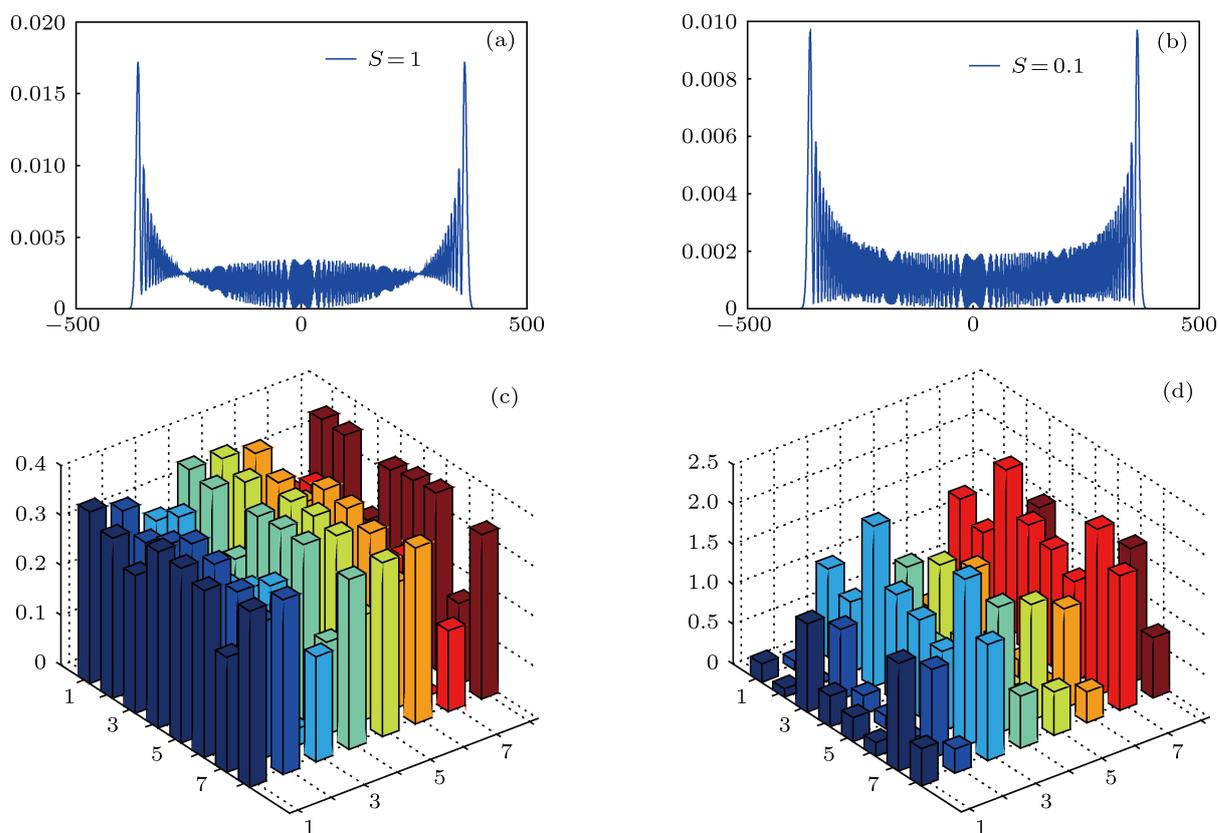


图 2 (a) $S = 1$ 时输出端各端口光子的分布概率, 纵坐标表示分布概率, 横坐标表示端口标号; (b) $S = 0.1$ 时输出端各端口光子的分布概率, 纵坐标表示分布概率, 横坐标表示端口标号; (c) $S = 1$ 时输出端各端口二阶相干度分布, 纵坐标表示分布概率, 横坐标表示端口标号; (d) $S = 0.1$ 时输出端各端口二阶相干度分布, 纵坐标表示分布概率, 横坐标表示端口标号

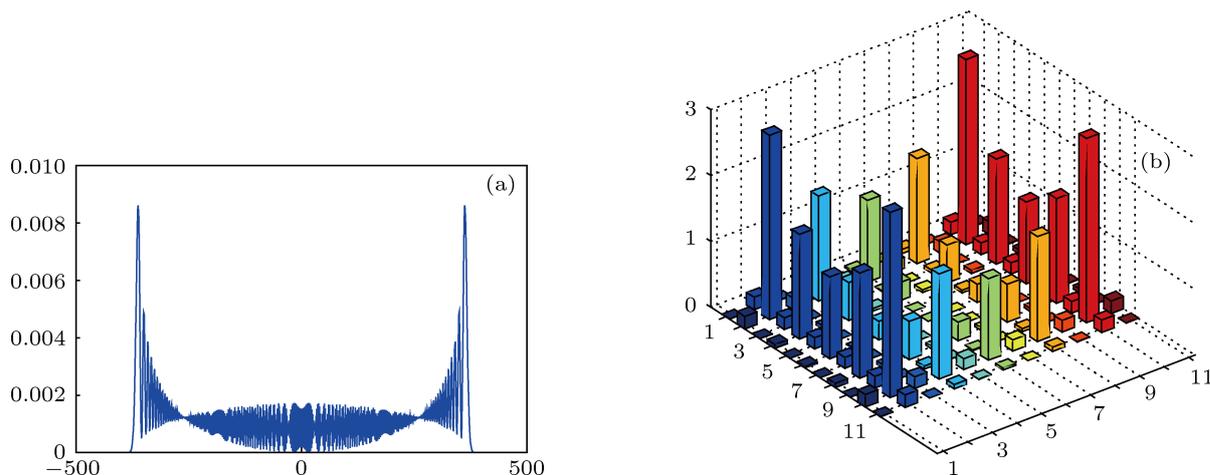


图3 (a) 纠缠态输入的条件下, 输出端光子数分布; (b) 纠缠态输入时, 不同端口之间的二阶相关度分布

6 结论

本文给出了阵列波导中量子行走过程进行分析, 分析了直积态和纠缠态两类量子态分别作为初始状态时, 光波导阵列的动力学演化问题. 使用近邻耦合模型推导了输出端光子分布概率的和不同波导分支之间的二阶相干度精确地解析解. 1) 对于初始状态为直积态的情况, 随着对称性参数 S 的减弱, 量子行走的输出端光子数概率分布出现变化, 振荡的曲线也与前者不同. 部分端口之间的二阶相干度 g_{mn}^2 值从小于 1 的值变成大于 1 的值, 光子从负关联特性变成部分正关联. 2) 对于初始状态为纠

缠态时, 输出端光子的分布概率和二阶相干度与直积态下的情况非常相似.

基于光波导量子行走的实用化的量子仿真器有可能被率先研制出来^[14,15], 但目前仍有一些问题亟待研究, 例如输入的初态特性、光波导的结构特性以及边界条件等对该量子系统的影响等问题. 我们研究了其中的输入态的初态特性对光波导中量子行走影响的问题. 另外, 本文的研究结果可为基于连续量子行走的量子算法开发和验证提供物理实现方案. 又可为进一步研究光波导基本量子动力学现象, 例如高阶量子行走、退相干环境^[16]下的量子行走等方面的相关研究提供理论支持.

- [1] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N 1993 *Phys. Rev. A* **48** 1687
- [2] Bacon D, Childs A M, Chuang I L, Kempe J, Leung D W, Zhou X 2001 *Phys. Rev. A* **64** 062302
- [3] Childs A M, Goldstone J 2004 *Phys. Rev. A* **70** 042312
- [4] Xue P, Sanders B C, Leibfried D 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 183602
- [5] Luo H, Hu X L, Xue P 2011 **3** 198 (in Chinese) [骆浩, 胡小龙, 薛鹏 2011 量子光学学报 **3** 198]
- [6] Zhang P, Ren X F, Zou X B, Liu B H Y, Huang Y F, Guo G C 2007 *Phys. Rev. A* **75** 052310
- [7] Amit Rai, Perk J H H 2008 *Phys. Rev. A* **78** 042304
- [8] Perets H B, Lahini Y, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Silberberg Y 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 170506
- [9] Bromberg Y, Lahini Y, Morandotti R, Silberberg Y 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 253904
- [10] Peruzzo A, Lobino M, Matthews J C, Matsuda N, Politi A, Poulios K, Zhou X Q, Lahini Y, Ismail N, Wörhoff K, Bromberg Y, Silberberg Y, Thompson M G 2010 *Science* **329** 1500
- [11] Sansoni L, Sciarrino F, Vallone G, Mataloni P, Crespi A, Ramponi R, Osellame R 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 010502
- [12] Matthews J C F, Thompson M G 2012 *Nature Photonics* **6** 45
- [13] Solntsev A S, Sukhorukov A A, Neshev D N, Kivshar Y S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 023601
- [14] Aspuru-Guzik, Alan Walther, Philip 2012 *Nature Physics* **8** 285
- [15] Liu K, Li W D, Zhang W Z, Shi P, Ren C N, Gu Y J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120301 (in Chinese) [刘凯, 李文东, 张闻钊, 史鹏, 任春年, 顾永建 2012 物理学报 **61** 120301]
- [16] Guo G C, Zhou Z W 2000 *Physics* **11** 695 (in Chinese) [郭光灿, 周正威 2000 物理 **11** 695]

Effects of initial states on continuous-time quantum walk in the optical waveguide array

Ren Chun-Nian¹⁾²⁾ Shi Peng¹⁾ Liu Kai¹⁾ Li Wen-Dong¹⁾
Zhao Jie¹⁾ Gu Yong-Jian^{1)†}

¹⁾ (College of Information Science and Engineering, Ocean University of China, Qingdao 266100, China)

²⁾ (College of Information Science and Technology, Qingdao University of Science and Technology, Qingdao 266042, China)

(Received 13 September 2012; revised manuscript received 7 December 2012)

Abstract

Continuous-time quantum random walk is constructed when photons propagate passing the branches of the waveguide array. It is possible to make quantum simulator, based on the quantum walk in waveguides, on a commercial scale firstly, but there are still some problems such as input state, the structure and boundary of the waveguides that should be treated at present. A nearest-neighbor coupling model is used to deal with the question of coupled waveguides and an explicit analytical solution can be derived. Using the analytical solution, we analyze the effects of input state on particle number probability distribution function and the second-order coherence degree of the quantum walk process in periodic waveguides. The results show that the symmetry properties of the input state would influence the distribution of second-order coherence degree, but have little effect on the probability distribution function.

Keywords: periodic waveguide array, quantum walk, second-order coherence degree, entanglement state

PACS: 03.67.Lx, 42.50.Ex, 03.67.Bg

DOI: 10.7498/aps.62.090301

† Corresponding author. E-mail: yjgu@ouc.edu.cn