

# 基于分数阶可停振动系统的周期 未知微弱信号检测方法\*

周薛雪 赖莉 罗懋康†

(四川大学数学学院, 成都 610065)

(2012年9月27日收到; 2013年1月7日收到修改稿)

本文建立了分数阶可停振动系统, 其可停振动状态的改变对周期策动力敏感, 对零均值随机微小扰动不敏感, 这事实上为周期未知微弱信号检测提供了一种新的高效检测方法和判别标准. 与现有的利用混沌系统的大尺度周期状态变化检测周期未知弱信号的方法需逐一尝试设置不同频率内置信号以便期望与待检周期信号发生共振不同, 利用分数阶可停振动系统的可停振动状态变化检测周期未知微弱信号的方法, 除了同样具有因为状态变化对周期信号的敏感性而能够实现极低检测门限的特点外, 还具有混沌系统信号检测所不具有的优点: 1) 无需预先估计待检信号的周期; 2) 无需计算系统状态的临界阈值; 3) 可停振动状态可由本文设计的指数波动函数可靠地进行判断; 4) 通过系统微分阶数的变化, 将检测系统层次化, 从而可得到比整数阶检测系统更低的检测门限, 特别是在色噪声环境下, 通过选取合适的微分阶数, 基于分数阶可停振动系统的微弱周期信号检测方法能够大幅度的降低检测门限, 在本文的仿真试验中, 检测门限可达  $-182$  dB.

**关键词:** 分数阶非线性系统, Duffing 振子, 弱信号检测

**PACS:** 05.45.-a, 05.10.-a, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.090501

## 1 引言

微弱信号检测在信号检测领域占有重要的地位. 传统的基于线性理论的检测方法在信号能量较微弱的情况下潜力有限, 检测门限已无多大的下降空间<sup>[1]</sup>. 而基于混沌控制的混沌检测则是以混沌系统对参数的敏感性、对噪声的免疫性, 周期扰动对混沌的抑制性为基础, 从本质上区别于传统的检测方法, 从而也突破了原有的限制, 达到了极低的检测门限<sup>[2]</sup>. 因此, 利用混沌振子检测微弱周期信号的方法是近年来兴起的一个新的研究方向<sup>[3-5]</sup>. 但是, 现行的混沌检测理论都是以动力系统从混沌状态到大尺度周期状态这一状态变化过程对周期信号的敏感性为基础, 而这一状态变化过程本身就存在模糊性, 不易定量描述或刻画, 使之难以在实际检测中得到广泛应用<sup>[6]</sup>. 于是, 能否构造出一种系

统, 它的某种状态的变化对信号敏感, 对噪声不敏感, 并且这个状态的变化易于描述, 便成为信号处理领域内一个众所关注的问题.

基于以上考虑, 发现 Hamilton 系统中一类以概率 1 渐进稳定的系统的性质更与我们上述思路相符合; 同时, 由于分数阶微分方程很适合刻画具有记忆和遗传性质的过程, 它对复杂系统的描述具有建模简单、物理参数清楚、描述准确等优势<sup>[7-13]</sup>, 因此本文将分数阶算子引入检测系统, 以期在更为复杂的噪声背景下也能获得极低的检测门限.

## 2 分数阶可停振动系统检测理论

**定义 1** 设随机微分方程

$$D^q \mathbf{X} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + e\xi(t), \quad \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (1)$$

其中  $\mathbf{X}$ ,  $\mathbf{F}$  为二维矢量随机过程,  $\mathbf{q} = (q_1, q_2)^T \in \mathbb{R}$  为微分方程阶数,  $\xi(t)$  为系统输入的随机扰动,  $e$

\* 国家自然科学基金(批准号: 11171238)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

为随机扰动幅度,  $\eta_0$  是其平凡解 (即  $F(\eta_0, t) = 0$ ). 如果:

$$1) \quad \lim_{\|x_0 - \eta_0\| \rightarrow 0} P \left\{ \lim_{t \rightarrow \infty, e \rightarrow 0} \|X(t; t_0, x_0) - \eta_0\| \right\} = 1;$$

2) 当系统 (1) 的输入为周期信号时, 系统有周期或者拟周期解.

则称方程 (1) 所对应的系统为可停振动系统.

其中条件 1) 表示系统在受到微小随机扰动时以概率 1 渐进稳定, 本文将对应的状态称为可停振动状态.

由定义直接可知, 可停振动系统的可停振动状态变化对噪声不敏感对周期信号敏感. 因此, 可停振动系统为未知微弱周期未知信号的检测提供了一条新的思路.

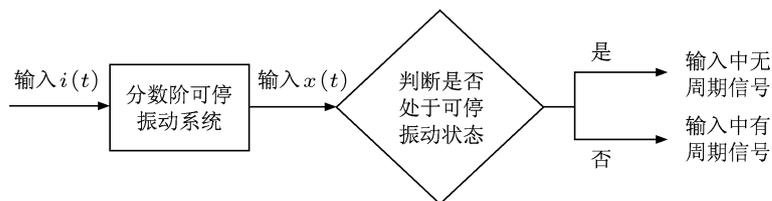


图 1 分数阶可停振动系统检测模型

图 1 即为基于分数阶可停振动系统的未知周期未知形式的微弱周期信号检测模型. 由于分数阶停振系统的可停振动状态变化对噪声不敏感, 对周期信号敏感, 因此通过系统的相平面轨迹可以在预先未知信号周期的情况下判断系统输入是否含有

周期信号.

为了能更方便可靠地描述可停振动系统的可停振动状态的变化, 本文为构造了一个可以量化描述可停振动状态变化的度量函数——指数波动函数:

$$V = \begin{cases} \left[ 1 - \frac{\int_{t_0}^T (x(t) - x(t - \tau))^2 dt}{M} \right]^\alpha, & \int_{t_0}^T (x(t) - x(t - \tau))^2 dt < M, \\ 0, & \int_{t_0}^T (x(t) - x(t - \tau))^2 dt \geq M, \end{cases} \quad (2)$$

其中  $x(t)$  为系统的输出,  $\tau, t_0, M, \alpha, T$  为给定的正常数. 不难发现, 适当设置  $M$  的值, 可以使  $V \in [0, 1]$ ,  $V$  描述了当  $t \in [t_0, T]$  时, 输出信号  $x(t)$  的波动程度,  $V$  越大, 波动越小. 指数  $\alpha$  是刻画波动程度差别的尺度参数, 增大  $\alpha$  的取值, 可以放大波动程度差别. 因此, 仅通过计算  $V$  的值, 就能够确定当前系统是否处于可停振动状态, 从而判断输入中是否含有周期信号. 一般可利用统计的方法确定检测阈值  $\xi$ , 从而对检测结果进行判断, 即当  $V > \xi$  时, 认为系统处于可停振动状态, 输入中无周期信号;  $V \leq \xi$  时, 认为系统不处于可停振动状态, 输入中有周期信号. 本文提出了一种基于区间估计的直属波动函数检测阈值确定方法.

假设背景噪声为  $W(t)$ , 将背景噪声输入系统 (图 1), 即此时  $i(t) = W(t)$ , 然后由系统输出计算出

相应的指数波动函数值  $V$ . 由于  $W(t)$  为一随机过程, 所以  $V$  也为一随机过程. 当采样时间点取定时,  $V$  即为随机变量. 由于影响  $V$  的因素众多, 不妨假设  $V$  服从正态分布<sup>[14]</sup>, 即  $V \sim N(\mu, \sigma^2)$ , 则有:

**定理 1** 设  $V$  是系统输入为背景噪声时系统输出的指数波动函数值,  $V$  服从均值为  $\mu$ , 方差为  $\sigma^2$  的正态分布, 即  $V \sim N(\mu, \sigma^2)$ ;  $\bar{V}$  为来自  $V$  的容量为  $n$  的样本的样本均值,  $S^2$  为样本方差,  $S = \sqrt{S^2}$ . 则  $V$  以至少  $0.9974(1 - \alpha)(1 - \beta)$  ( $0 < \alpha, \beta < 1$ ) 的概率落入区间  $\left( \bar{V} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} - 3 \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\beta/2}^2(n-1)}}, 1 \right)$  中.

**证明** 由抽样分布定理<sup>[14]</sup> 知,  $\mu$  的置信度为

$1 - \alpha$  的置信区间是

$$\left( \bar{V} - t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}}, \bar{V} + t_{1-\alpha/2}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} \right);$$

$\sigma$  的置信度为  $1 - \beta$  的置信区间为

$$\left( \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\beta/2}^2(n-1)}}, \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\beta/2}^2(n-1)}} \right).$$

又由于  $V$  落入  $3\sigma$  区域的概率为 0.9974,  $V$  的取值范围为  $[0, 1]$ , 则  $V$  的取值以至少 0.9974 $(1 - \alpha)(1 - \beta)$  的概率落入区间

$$\left( \bar{V} - t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1) \frac{S}{\sqrt{n}} - 3\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\beta/2}^2(n-1)}}, 1 \right).$$

$V$  以至少  $P_0$  的概率落入区间  $(\xi, 1]$ , 其中  $0 < P_0, \xi < 1$ , 即说明如果将检测阈值设为  $\xi$ , 此时检测的虚警概率不高于  $1 - P_0$ , 本文称  $P_0$  为检测阈值  $\xi$  的可靠度.

### 3 基于一类 Duffing 振子的可停振动系统

#### 3.1 基于一类整数阶 Duffing 振子的可停振动系统

考虑由 Duffing 于 1918 年提出的一类硬弹簧 Duffing 振子

$$\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) - x + x^3 = i(t), \quad (3)$$

其中  $i(t)$  为系统输入,  $k$  为阻尼系数.

将 (3) 式改写成一阶微分方程组形式, 并令系统输入  $i(t)$  为 Gauss 白噪声:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -ky + x - x^3 + e\xi(t). \quad (4)$$

设  $k, e$  都为  $\varepsilon$  阶无穷小量 [15], 则方程 (4) 所示系统的 Hamilton 函数为

$$H = \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}.$$

所以其平均 Itô 方程为

$$dH = \bar{m}(H)dt + \bar{\sigma}dB(t), \quad (5)$$

其中  $B(t)$  是标准 Winner 过程,

$$\bar{m}(H) = e^2D - k \int_0^A \left( 2H + x^2 - \frac{x^4}{2} \right)^{1/2} dx \\ \left/ \int_0^A \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^{-1} dx, \right.$$

$$\bar{\sigma}^2(H) = 2e^2D \int_0^A \left( 2H + x^2 - \frac{x^4}{2} \right)^{1/2} dx \\ \left/ \int_0^A \left( \frac{\partial H}{\partial y} \right)^{-1} dx, \right. \\ A = \left[ (1 + 4H)^{1/2} + 1 \right]^{1/2}.$$

因此在 (4) 式的平衡点  $(\pm 1, 0)$ , 方程 (5) 的 Lyapunov 指数为

$$\lambda = \text{Re} \left( \left( \bar{m}'(H) - \frac{(\bar{\sigma}'(H))^2}{2} \right) / 2 \right) \Big|_{H=-\frac{1}{4}}, \quad (6)$$

则当  $k > 0$  时,  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \lambda < 0$ . 因此, 当  $k > 0$  时, Duffing 振子 (3) 满足定义 1 的条件 1) [15, 16]. 又当  $k > 0$  时, 系统输入为周期信号时, Duffing 振子 (3) 是耗散系统 [6]. 所以, 当  $k > 0$  时, Duffing 振子 (3) 是可停振动系统, 因此可以利用其对未知周期, 未知形式的微弱周期信号进行检测.

考虑阻尼系数  $k = 0.5$  时的 Duffing 振子

$$\ddot{x}(t) + k\dot{x}(t) - x + x^3 = i(t), \quad (7)$$

$i(t)$  为系统输入. 本文信噪比计算公式为  $\text{SNR} = 10 \times \lg \frac{P_S}{P_W}$ , 其中  $P_S$  表示不含噪声的信号功率,  $P_W$  表示噪声功率.

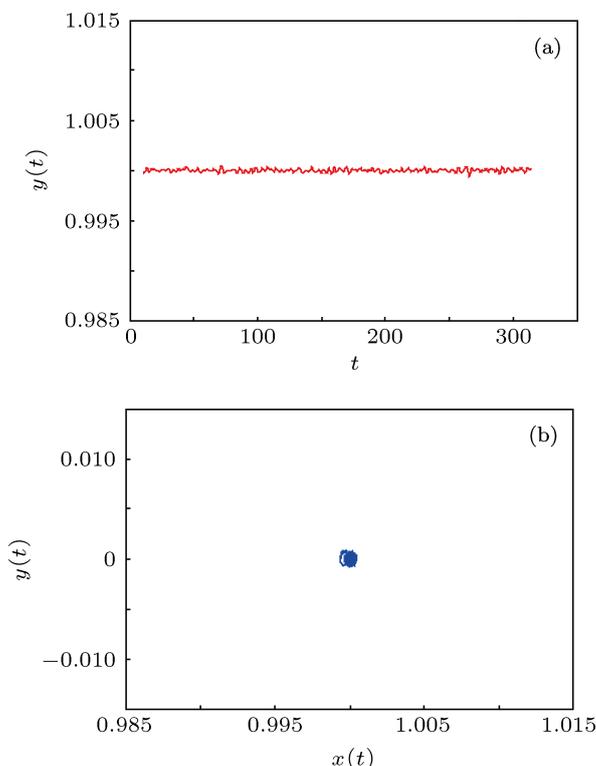


图 2 系统 (7) 输入为 Gauss 白噪声 (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

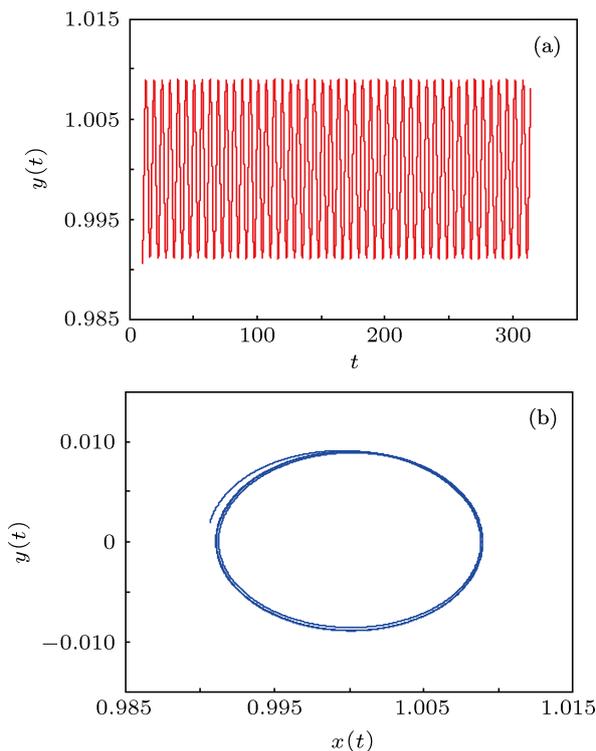


图3 系统(7)输入为余弦信号  $\cos(t)$  (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

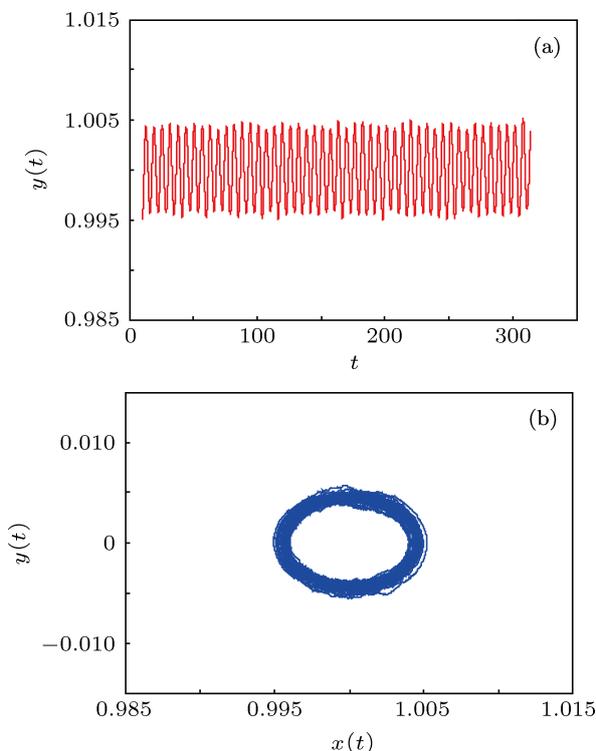


图4 系统(7)输入为信噪比是  $-21.78$  dB 的带噪余弦信号 (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

图2至图5为系统输入分别为 Gauss 白噪声、余弦信号  $\cos(t)$  和不同信噪比的带有 Gauss 白噪声的余弦信号的时域和相平面轨迹. 当系统输入中

仅含有噪声时, 系统处于可停振动状态, 当系统输入中含有周期信号时, 系统立即从可停振动状态变化为小尺度周期状态. 这就从仿真上也验证了系统(7)是可停振动系统, 可以用于微弱未知周期信号的检测.

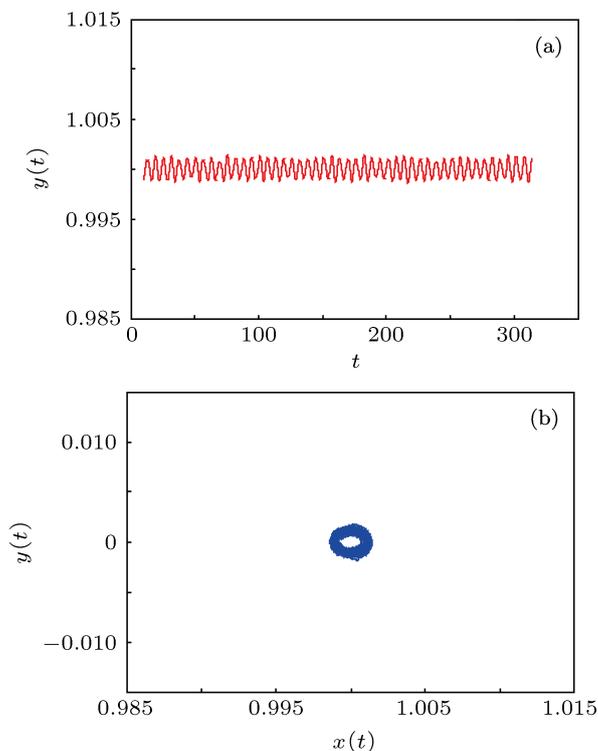


图5 系统(7)输入为信噪比是  $-50.01$  dB 的带噪余弦信号 (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

### 3.2 基于一类分数阶振子的可停振动系统

由于分数阶微分方程很适合刻画具有记忆性质的过程, 它对复杂系统的描述具有建模简单、物理参数清楚、描述准确等优势, 为此我们将上面整数阶可停振动系统推广到分数阶情形. 可停振动性质与稳定性问题密切相关, 系统有渐进稳定的解轨迹是系统具有可停振动状态的充分条件<sup>[6,15]</sup>, 因此, 考虑到分数阶非线性系统稳定性问题的复杂性<sup>[17-21]</sup>, 下面先对分数阶非线性系统稳定状态的定义以及相关定理作一简要介绍.

设有分数阶非线性系统

$$D^q \mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (8)$$

其中  $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ ,  $0 < q_i < 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ .  $\mathbf{f}$  是  $n$  维向量函数,  $\mathbf{x} \in R^n$ . 设  $\mathbf{E}^* = (\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_n^*)$  是系统(8)的平衡点, 即  $\mathbf{f}(\mathbf{E}^*) = 0$ .

定义 2<sup>[9]</sup> 如果

$$\lim_{t \rightarrow 0} \|\mathbf{x}\| = 0,$$

则称系统 (8) 的解轨迹是渐进稳定的.

**定理 2**<sup>[22]</sup> 设分数阶非线性系统 (8) 的阶数  $q_1 = q_2 = \dots = q_n = q$ , 若其 Jacobian 矩阵  $J = \partial f / \partial x$  在平衡点  $E^*$  处的所有特征值  $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$  满足条件

$$|\arg(\lambda_i)| > q \frac{\pi}{2}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

则当系统阶数为  $q$  时, 系统有渐进稳定的解轨迹.

**定理 3**<sup>[23]</sup> 设分数阶非线性系统 (8) 的阶数  $q_1 \neq q_2 \neq \dots \neq q_n$ ,  $q_i = \frac{v_i}{u_i}$ ,  $u_i, v_i \in Z^+$ , 且  $(u_i, v_i) = 1 (i = 1, 2, \dots, n)$ . 令  $m$  为所有  $u_i (i = 1, 2, \dots, n)$  的最小公倍数,  $\gamma = \frac{1}{m}$ ,  $J$  是系统的 Jacobian 矩阵  $J = \partial f / \partial x$ , 如果有

$$|\arg(\lambda)| > \gamma \frac{\pi}{2},$$

其中  $\lambda$  是方程

$$\det(\text{diag}\{\lambda^{mq_1}, \lambda^{mq_2}, \dots, \lambda^{mq_n}\} - J|_{E^*}) = 0$$

的所有根, 则系统有渐进稳定的解轨迹.

考虑分数阶 Duffing 方程

$$\begin{aligned} D^{q_1}x(t) &= y, \\ D^{q_2}y(t) &= -ky + x - x^3, \end{aligned} \quad (9)$$

其中  $k > 0$  为阻尼系数,  $q_1, q_2 > 0$ , 且  $q_1, q_2 \in R$ . 本文采用的分数阶微积分均为 Caputo 定义下的分数阶微积分<sup>[24]</sup>. 当初值确定后, 方程 (9) 的解存在且唯一<sup>[24]</sup>. 其 Jacobian 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 - 3x^2 & -k \end{pmatrix}, \quad (10)$$

平衡点为  $P_0(0, 0), P_1(1, 0), P_2(-1, 0)$ .

由定理 2、定理 3 知, 当  $0 < q_1, q_2 < 2$  时, 令  $q_i = \frac{v_i}{u_i}$  ( $u_i$  与  $v_i$  互素),  $i = 1, 2, m$  为  $u_1, u_2$  的最小公倍数,  $\gamma = \frac{1}{m}$ . 如果

1)  $q_1 = q_2 = q$  时,

$$|\arg(\lambda)| > q \frac{\pi}{2},$$

其中  $\lambda$  是 Jacobian 矩阵 (10) 在平衡点  $P_j (j = 0, 1, 2)$  处的所有特征值, 则系统有渐进稳定的解轨迹;

2)  $q_1 \neq q_2$  时

$$|\arg(\lambda)| > \gamma \frac{\pi}{2},$$

其中  $\lambda$  是方程

$$\det(\text{diag}\{\lambda^{mq_1}, \lambda^{mq_2}\} - J|_{(x,y)=P_j}),$$

$$j = 0, 1, 2 \quad (11)$$

的所有解, 则系统有渐进稳定的解轨迹.

**定理 4** 设系统 (9) 的阶数  $q_1 = q_2 = q (0 < q < 2)$ ,  $k > 2\sqrt{2}$  或者  $k^2 \leq 8$ , 并且  $\frac{\sqrt{8-k^2}}{2} > \tan(q\frac{\pi}{2})$  时, 系统可以达到可停振动状态.

**证明** 系统 (9) 在平衡点  $P_0$  处 Jacobian 矩阵的特征方程为

$$\lambda^2 + k\lambda - 1 = 0,$$

于是方程有两个根  $\lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 4}}{2}$ . 由于  $\lambda_1 = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2} > 0$ , 即  $|\arg(\lambda_1)| = 0 < q\frac{\pi}{2}$ , 所以  $P_0$  不稳定.

又在点  $P_{1,2}$  处有相同的 Jacobian 矩阵的特征方程

$$\lambda^2 + k\lambda + 2 = 0,$$

于是方程有两个根  $\lambda_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - 8}}{2}$ .

当  $k^2 > 8$ , 即  $k > 2\sqrt{2}$  时,  $\lambda_{1,2}$  都为小于零的实数, 则  $|\arg(\lambda_{1,2})| = \pi > q\frac{\pi}{2}$ .

当  $k^2 \leq 8$ , 方程的两个根为  $\lambda_{1,2} = \frac{-k}{2} \pm i\frac{\sqrt{8-k^2}}{2}$ , 则

$$\arg(\lambda_1) = \arctan\left(-\frac{\sqrt{8-k^2}}{2}\right),$$

$$\arg(\lambda_2) = \arctan\left(\frac{\sqrt{8-k^2}}{2}\right).$$

所以当  $k > 2\sqrt{2}$  或者  $k^2 \leq 8$ , 并且  $\frac{\sqrt{8-k^2}}{2} > \tan\left(q\frac{\pi}{2}\right)$  时,  $P_{1,2}$  是稳定的, 系统有渐进稳定的解轨迹, 可以达到可停振动状态. 由于分数阶微积分难以借由解析法求得解析解<sup>[9,24]</sup>, 并且在工程实际中系统输入也多以离散点列的形式给出, 所以这里用求数值解的方法来寻求分数阶可停振动系统.

考察系统

$$\begin{aligned} D^{0.95}x(t) &= y, \\ D^{0.95}y(t) &= -0.15y + x - x^3 + i(t), \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $i(t)$  是系统输入.

图 6 至图 9 为系统输入分别为 Gauss 白噪声、余弦信号  $\cos(t)$  和不同信噪比的带有 Gauss 白噪声的余弦信号的时域和相平面轨迹. 当系统输入中仅

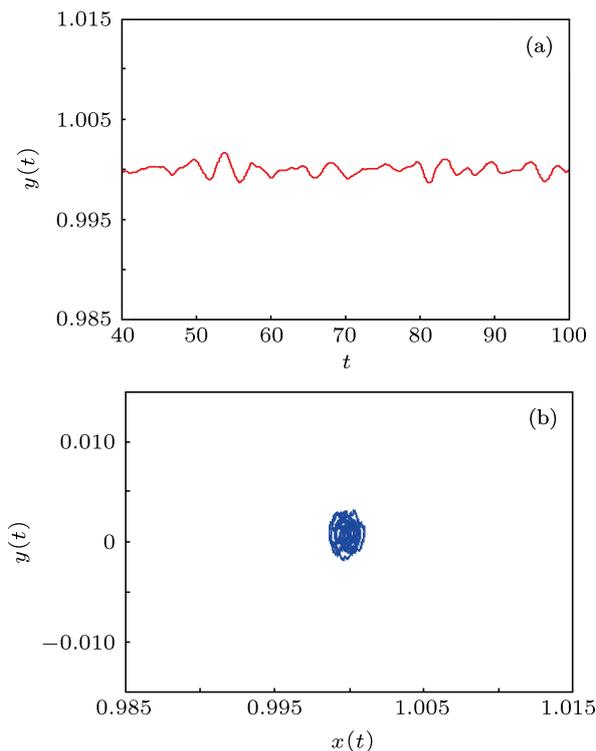


图6 系统 (12) 输入为 Gauss 白噪声 (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

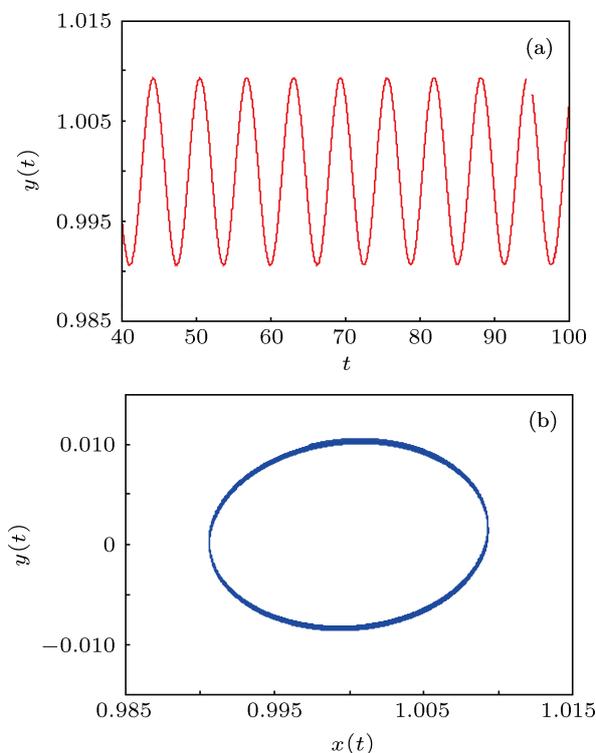


图7 系统 (12) 输入为余弦信号  $\cos(t)$  (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

含有噪声时, 系统处于可停振动状态, 当系统输入中含有周期信号时, 系统立即从振动状态变化为小尺度周期状态. 这就从仿真上验证了系统 (12) 是分

数阶可停振动系统, 可以用于微弱未知周期信号的检测.

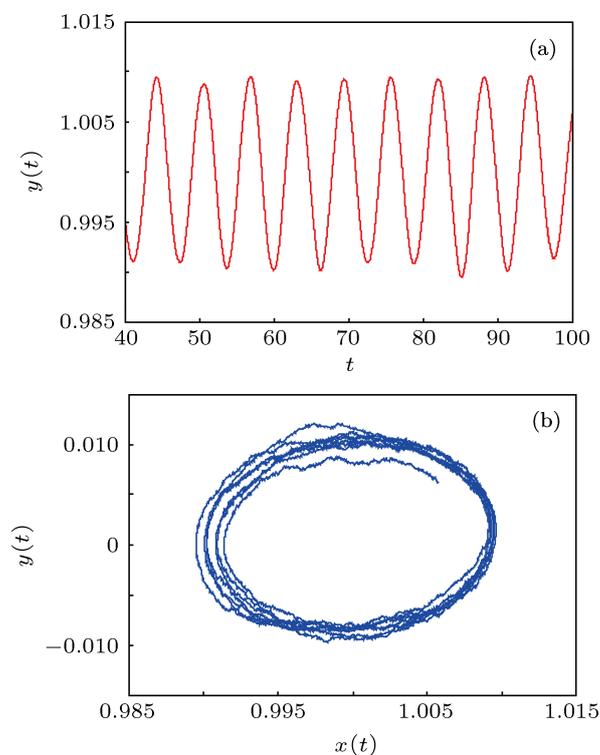


图8 系统 (12) 输入为信噪比是  $-28.92$  dB 的带噪余弦信号 (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

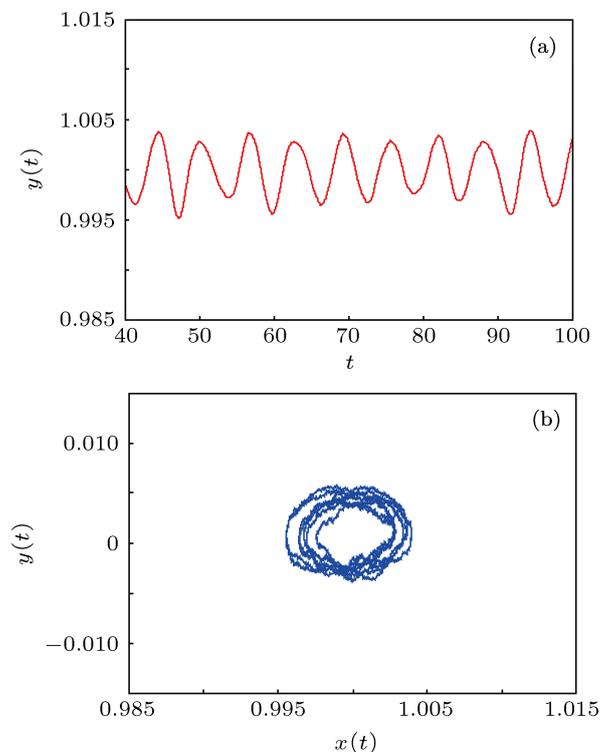


图9 系统 (12) 输入为信噪比是  $-50.81$  dB 的带噪余弦信号 (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

设系统 (9) 的阶数  $q_1 = 0.95, q_2 = 1$ , 阻尼系数

$k = 0.15$ , 系统的 Jacobian 矩阵为  $J$ , 将其代入方程 (11), 则在平衡点  $P_0$  处可得

$$\lambda^{39} + 0.15\lambda^{19} - 1 = 0,$$

其中一根为  $\lambda = 0.9962 > 0$ , 因此  $|\arg(\lambda)| = 0 < \frac{1}{20} \frac{\pi}{2}$ , 所以平衡点  $P_0$  不稳定.

方程 (11) 在  $P_1, P_2$  处有相同形式:

$$\lambda^{39} + 0.15\lambda^{19} + 2 = 0,$$

它的所有根中幅角最小的为  $0.0832 > \frac{1}{20} \frac{\pi}{2}$ , 所以平衡点  $P_1, P_2$  是稳定的, 系统有渐进稳定的解轨迹, 能够达到可停振动状态.

考察系统

$$\begin{aligned} D^{0.95}x(t) &= y, \\ D^1y(t) &= -0.15y + x - x^3 + i(t), \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $i(t)$  是系统输入.

图 10、图 11 为系统输入为不同信噪比的带有 Gauss 白噪声的余弦信号的系统 (13) 输出的时域和相平面轨迹. 系统输入为 Gauss 白噪声、余弦信号  $\cos(t)$  时的情况同系统 (12). 系统输入中仅含有噪声时, 系统处于可停振动状态, 当系统输入中含有周期信号时, 系统立即从振动状态变化为小尺度周期状态. 这就从仿真上验证了系统 (13) 是可停振动状系统, 可以用于微弱未知周期信号的检测.

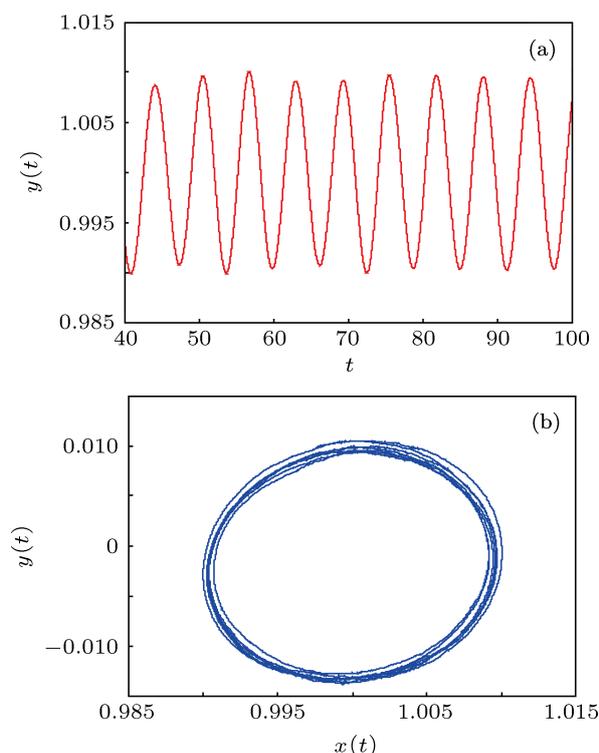


图 10 系统 (13) 输入为信噪比是  $-7.00$  dB 的带噪余弦信号 (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

## 4 仿真

考虑将

$$\begin{aligned} D^{q_1}x(t) &= y, \\ D^{q_2}y(t) &= -0.15y + x - x^3 + i(t), \end{aligned} \quad (14)$$

作为检测系统, 其中  $i(t)$  为系统输入. 引入波动指数函数对可停振动状态进行判断, 并通过仿真来验证第 3 节中的几个系统对未知微弱周期未知信号的检测门限, 以及分析不同的系统阶数对检测门限的影响.

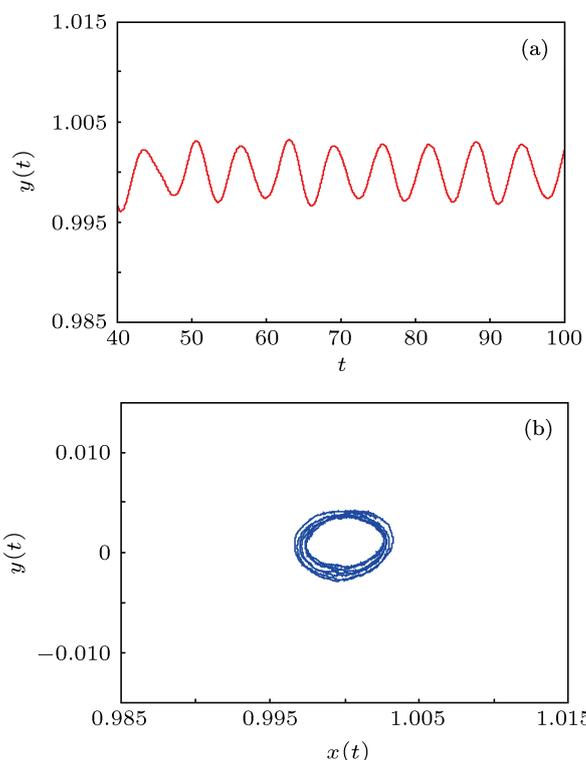


图 11 系统 (13) 输入为信噪比是  $-31.04$  dB 的带噪余弦信号 (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

### 4.1 背景噪声为 Gauss 白噪声

#### 4.1.1 系统阶数 $q_1 = q_2 = 1$

设背景噪声为方差  $\sigma^2 = 0.01$  的 Gauss 白噪声, 指数波动函数 ((2) 式) 的指数  $\alpha = 3$ , 时延  $\tau = 3$ , 初始时刻  $t_0 = 10$  s, 结束时刻  $T = 157$  s,  $M = 100$ . 利用第 2 节的方法计算出  $\xi_1 = 0.9971$  为此时可靠度不小于  $0.9776$  的检测阈值. 令待检测周期信号  $s(t) = \gamma \cos(t)$ ,  $x_0 = (1, 0)$ , 不断调节  $\gamma$ , 则可得到系统输入信噪比 SNR 同其相应输出的指数波动函数值  $V$  的关系图 12 由于当系统输入信号信噪比 SNR =  $-66.8017$  dB 时, 输出的指数波动函数值为

$V = 0.9965 < \xi_1$ , 因此结合指数波动函数的可停振动检测法在噪声为 Gauss 白噪声时, 检测门限可达到  $-66$  dB.

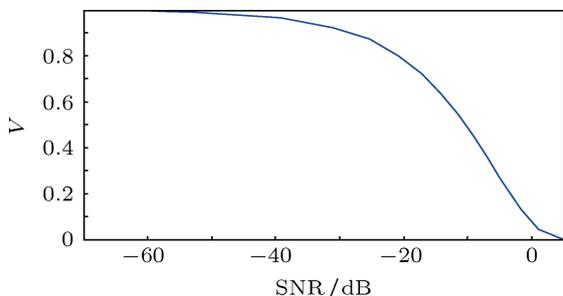


图 12 系统输入 SNR 与系统输出  $V$  的对应关系 ( $q_1 = q_2 = 1$ , 白噪声)

#### 4.1.2 系统阶数 $q_1 = 0.95, q_2 = 1$

背景噪声和试验方法同 4.1.1, 指数波动函数 ((2) 式) 的指数  $\alpha = 3$ , 时延  $\tau = 3$ , 初始时刻  $t_0 = 55$  s, 结束时刻  $T = 100$  s,  $M = 10$ . 利用第 2 节的方法计算出  $\xi_2 = 0.9842$  为此时可靠度不小于 0.9776 的检测阈值. 通过仿真可得到系统输入信噪比 SNR 同其相应输出的指数波动函数值  $V$  的关系图 13 由于当系统输入信号信噪比  $\text{SNR} = -57.9815$  dB 时, 输出的指数波动函数值为  $V = 0.9817 < \xi_2$ , 因此结合指数波动函数的可停振动检测法在噪声为 Gauss 白噪声时, 检测门限可达到  $-57$  dB. 这比当系统的阶数  $q_1 = q_2 = 1$  时检测门限更高. 可见系统的阶数影响系统的检测能力.

#### 4.1.3 系统阶数 $q_1 = q_2 = 0.95$

仿真设置同 4.1.2, 用第 2 节的方法计算出  $\xi_3 = 0.9934$  为此时可靠度不小于 0.9776 的检测阈值. 通过仿真可得到系统输入信噪比 SNR 同其相应输出的指数波动函数值  $V$  的关系图 14 由于当系统输入信号信噪比  $\text{SNR} = -71.3197$  dB 时, 输出的指数波动函数值为  $V = 0.9920 < \xi_3$ , 因此结合指数波动函数的可停振动检测法在噪声为 Gauss 白噪声时, 检测门限可达到  $-71$  dB. 由上面 3 个仿真不难发现, 适当的选取系统的阶数可以获得更低的检测门限.

### 4.2 背景噪声为 Gauss 色噪声

这里用方差  $\sigma^2 = 0.01$  的高斯白噪声通过一个四阶带通滤波器产生高斯色噪声. 该滤波器的传递函数为

$$H(z)$$

$$= \frac{0.0201(1 - z^{-2} + z^{-4})}{1 - 1.637z^{-1} + 2.237z^{-2} - 1.307z^{-3} + 0.641z^{-4}}, \quad (15)$$

滤波器的上限截止频率为 0.2, 下限截止频率为 0.15 (均为归一化的频率).

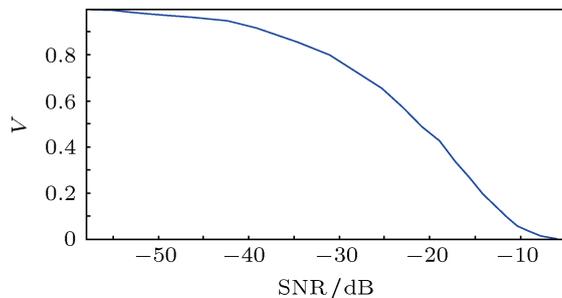


图 13 系统输入 SNR 与输出  $V$  对应关系 ( $q_1 = 0.95, q_2 = 1$ , 白噪声)

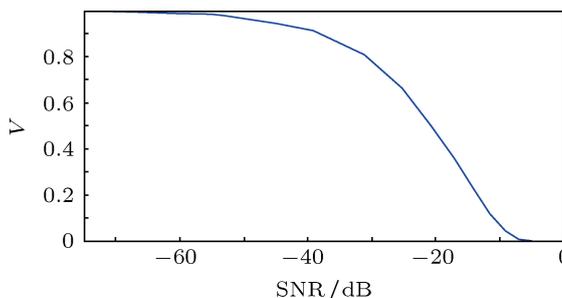


图 14 系统输入 SNR 与输出  $V$  对应关系 ( $q_1 = q_2 = 0.95$ , 白噪声)

#### 4.2.1 系统阶数 $q_1 = q_2 = 1$

设指数波动函数 ((2) 式) 的指数  $\alpha = 5$ , 时延  $\tau = 3$ , 初始时刻  $t_0 = 10$  s, 结束时刻  $T = 157$  s,  $M = 100$ . 利用第 2 节的方法计算出  $\xi_4 = 0.9513$  为此时可靠度不小于 0.9776 的检测阈值, 令待检测周期信号  $s(t) = \gamma \cos(t), x_0 = (1, 0)$ , 不断调节  $\gamma$ , 则可得到系统输入信噪比 SNR 同其相应输出的指数波动函数值  $V$  的关系.

图 15 为系统输入仅为 Gauss 色噪声时, 系统输出的时域和相平面轨迹. 图 16 和图 17 为系统输入为不同信噪比的带噪信号时, 系统输出的时域和相平面轨迹. 图 18 表示了系统输入信噪比 SNR 同其相应输出的指数波动函数值  $V$  的关系. 由于当系统输入信号信噪比  $\text{SNR} = -42.1847$  dB 时, 输出的波动指数函数值为  $V = 0.9452 < \xi_4$ , 因此结合指数波动函数的可停振动检测法在背景噪声为形如 (15) 式的 Gauss 色噪声时, 检测门限可达到  $-42$  dB, 这时门限比噪声为 Gauss 白噪声时高.

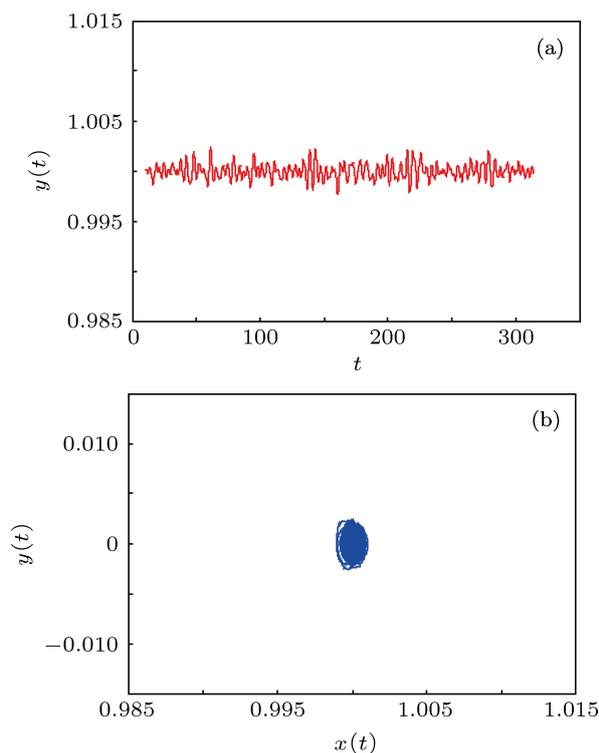


图 15 系统输入仅为 Gauss 色噪声 ( $q_1 = q_2 = 1$ , 色噪声) (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

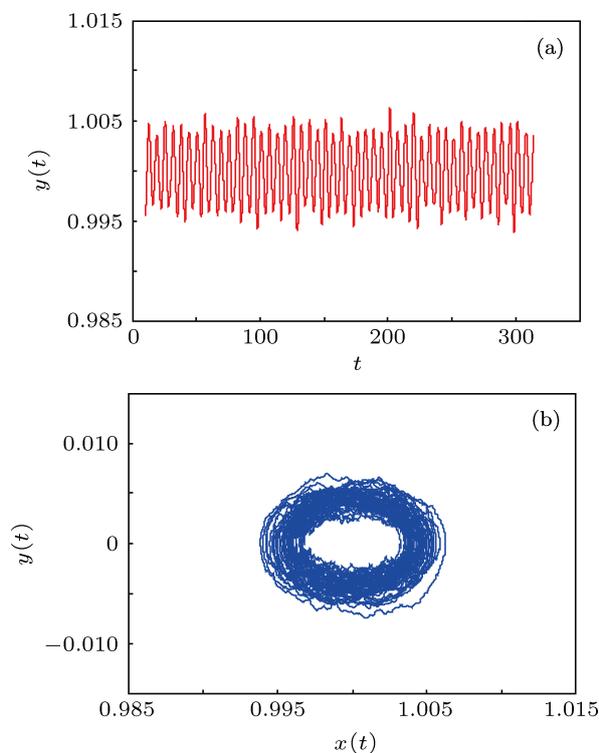


图 16 系统输入为信噪比是  $-20.61$  dB 的带噪余弦信号 ( $q_1 = q_2 = 1$ , 色噪声) (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

#### 4.2.2 系统阶数 $q_1 = 0.95, q_2 = 1$

背景噪声和试验方法同 4.2.1, 指数波动函数 ((2) 式) 的指数  $\alpha = 3$ , 时延  $\tau = 3$ , 初始时刻  $t_0 = 55$

s, 结束时刻  $T = 100$  s,  $M = 1/100$ . 利用第 2 节的方法计算出  $\xi_5 = 0.9927$  为此时可靠度不小于 0.9776 的检测阈值. 通过仿真可得到系统输入信噪比 SNR 同其相应输出的指数波动函数值  $V$  的关系.

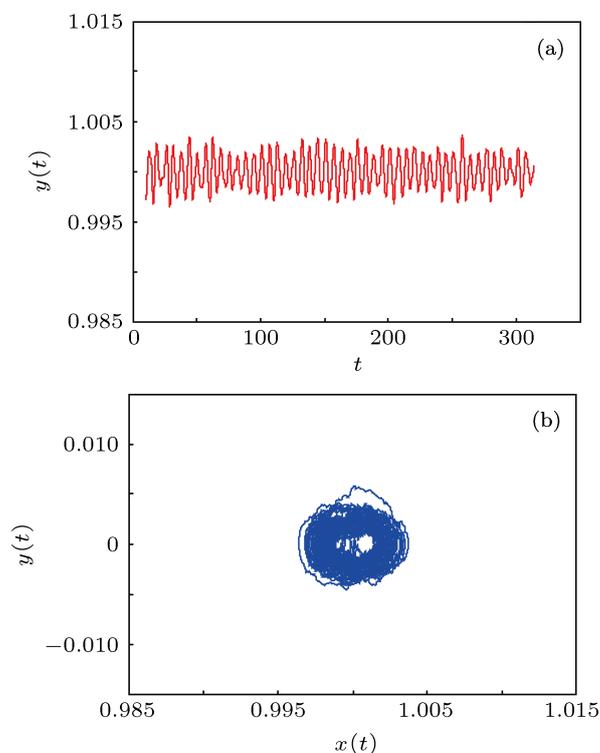


图 17 系统输入为信噪比是  $-35.29$  dB 的带噪余弦信号 ( $q_1 = q_2 = 1$ , 色噪声) (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

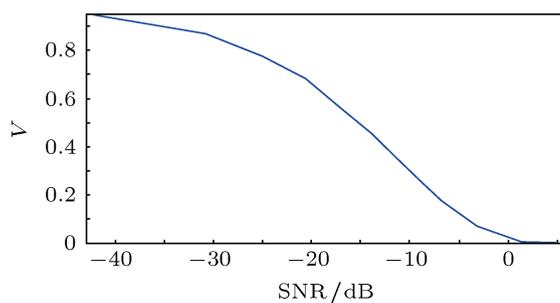


图 18 系统输入 SNR 与系统输出  $V$  的对应关系 ( $q_1 = q_2 = 1$ , 色噪声)

图 19 为系统输入仅为 Gauss 色噪声时, 系统输出的时域和相平面轨迹. 图 20 和图 21 为系统输入为不同信噪比的带噪信号时, 系统输出的时域和相平面轨迹. 图 22 表示了统输入信噪比 SNR 同其相应输出的指数波动函数值  $V$  的关系. 由于当系统输入信号信噪比  $\text{SNR} = -149.3529$  dB 时, 输出的波动指数函数值为  $V = 0.9926 < \xi_5$ , 因此结合指数波动函数的可停振动检测法在背景噪声为形如 (15)

式的 Gauss 色噪声时, 检测门限可达到  $-149$  dB.

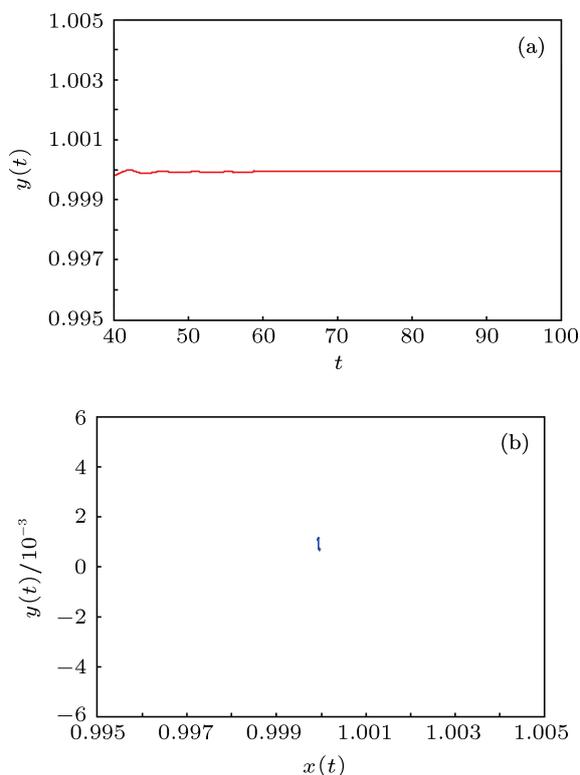


图 19 系统输入仅为 Gauss 色噪声 ( $q_1 = 0.95, q_2 = 1$ , 色噪声) (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

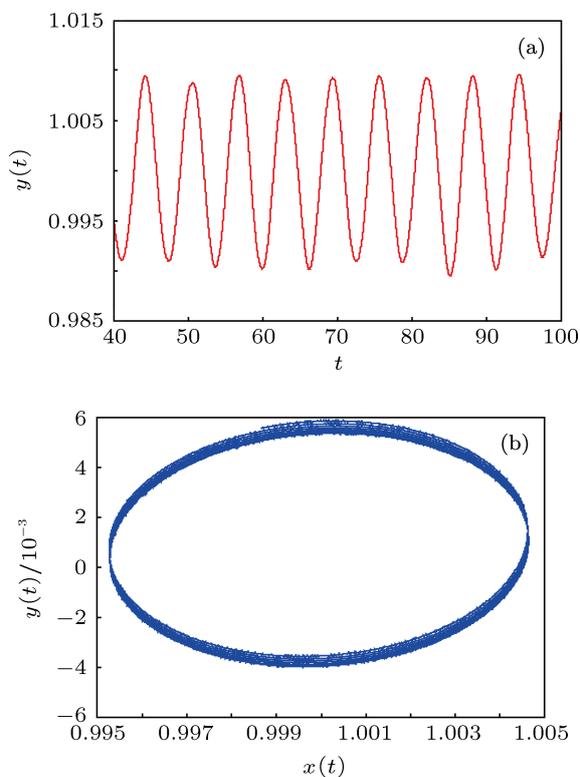


图 20 系统输入为信噪比是  $-28.90$  dB 的带噪余弦信号 ( $q_1 = 0.95, q_2 = 1$ , 色噪声) (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

### 4.2.3 系统阶数 $q_1 = q_2 = 0.95$

仿真设置同 4.2.2, 用第 2 节的方法计算出  $\xi_6 = 0.9998$  为此时可靠度不小于 0.9999 的检测阈值. 通过仿真可得到系统输入信噪比 SNR 同其相应输出的指数波动函数值  $V$  的关系图 23 由于当系统输入信号信噪比  $\text{SNR} = -182.9905$  dB 时, 输出的指数波动函数值为  $V = 0.9996 < \xi_6$ , 因此结合指数波动函数的可停振动检测法在噪声为 Gauss 白噪声时, 检测门限可达到  $-182$  dB.

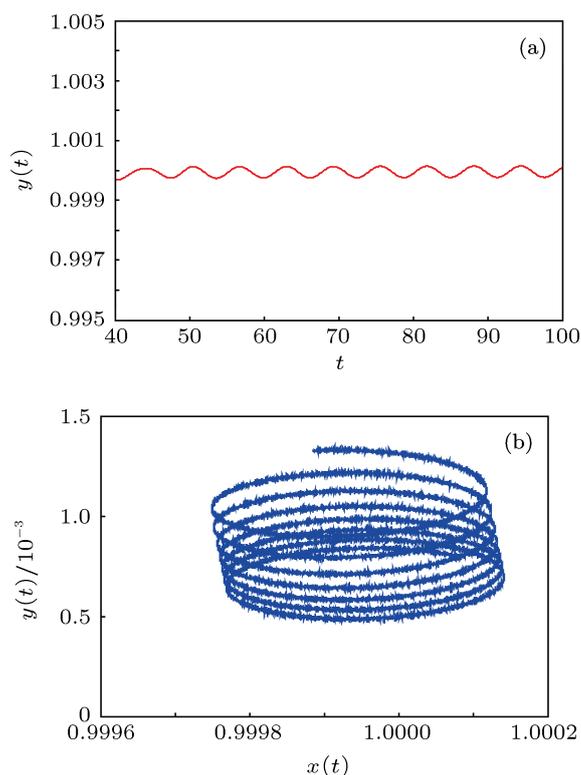


图 21 系统输入为信噪比是  $-84.95$  dB 的带噪余弦信号 ( $q_1 = 0.95, q_2 = 1$ , 色噪声) (a) 系统输出时域轨迹; (b) 系统输出相轨迹

这一节中, 我们分别在高斯白噪声和高斯色噪声环境下, 用整数阶和分数阶 (两种不同的分数阶) 的可停振动系统检测周期信号. 从仿真结果可知, 利用可停振动系统的可停振动状态变化检测未知周期微弱信号, 是一种具有很低检测信噪比和很强实用性的微弱周期信号检测方法, 而且, 可停振动检测法还具有以下一些特点:

1) 在高斯色噪声背景下, 分数阶检测系统总的来说比整数阶系统更具优势; 在高斯白噪声背景下, 这个优势有时并不是十分明显.

2) 不同分数阶的可停振动系统会带来不同的检测效果, 因此, 针对环境噪声, 适当选取可停振动系统的阶数, 可以带来更好的检测效果.

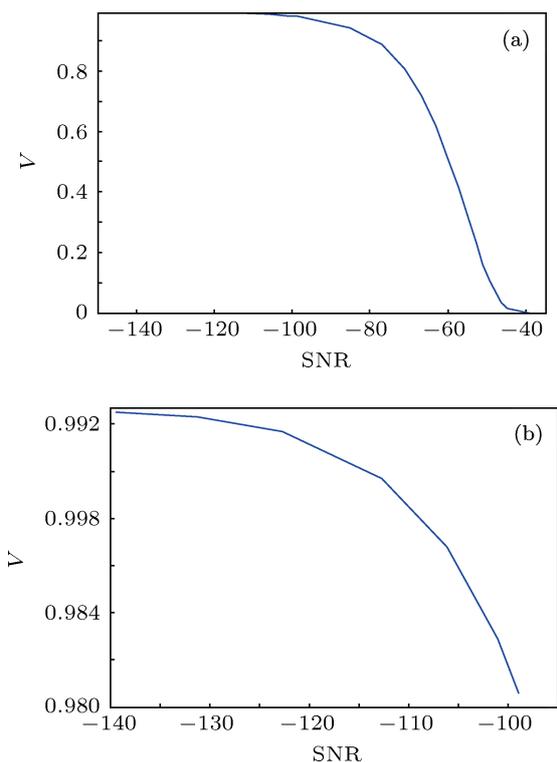


图 22 系统输入 SNR 与系统输出  $V$  的对应关系 ( $q_1 = 0.95$ ,  $q_2 = 1$ , 色噪声) (a) 整体; (b) 局部

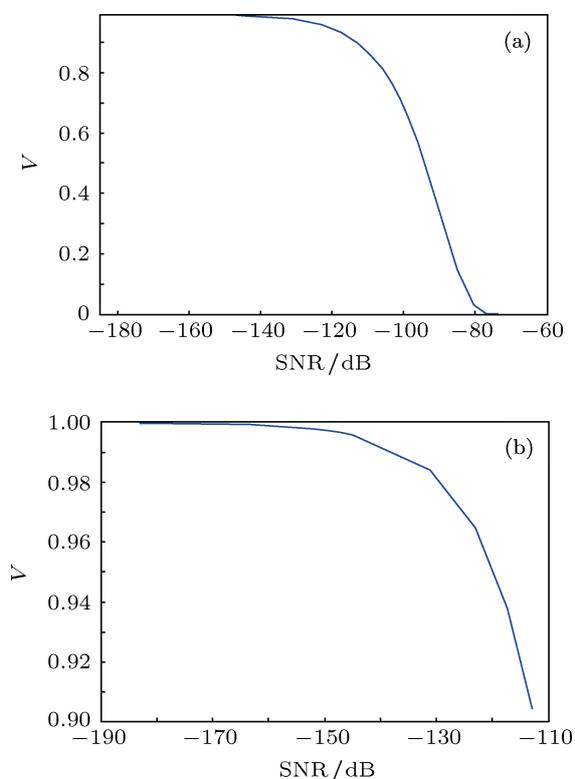


图 23 系统输入 SNR 与系统输出  $V$  的对应关系 ( $q_1 = q_2 = 0.95$ , 色噪声) (a) 整体; (b) 局部

这是两个非常有意义的结果, 所以, 进一步分析在不同噪声环境中, 不同分数阶的可停振动系统

对周期信号的检测能力, 并针对具体种类的环境噪声和具体的可停振动系统, 分析其具有相对最低可检信噪比的分数阶数是一个非常值得研究的问题. 不过, 由于分数阶非线性系统的稳定性是一个相当复杂的问题, 对一个整数阶可停振动系统进行分数阶化, 得到的分数阶非线性系统不一定是分数阶可停振动系统, 所以我们将针对这个问题开展后续研究.

## 5 结论

本文定义的分数阶可停振动系统的可停振动状态的改变对周期扰动高度敏感的同时对随机微小扰动却十分不敏感, 因此为周期未知和形式未知的微弱信号检测提供了一种新的高效检测方法和判别标准. 与利用混沌系统的大尺度周期状态变化检测已知周期的微弱周期信号相比, 利用可停振动系统的可停振动状态变化检测微弱周期信号除了同样具有因为状态变化对周期信号的敏感性而能够实现非常低信噪比的信号检测的特点外, 还具有混沌检测所不具有的优点:

1) 由于无需预先设置内置信号, 因而无需预先知道待检信号的周期, 更无需逐一盲目尝试设置不同频率内置信号以便期望与待检周期信号发生共振.

2) 同样由于无需预先设置内置信号, 因而无需对具体的内置信号具体计算系统的临界阈值.

3) 可停振动状态的变化易于用函数描述, 所以可以方便而可靠地由函数判断信号的有无, 无需通过对状态往往不够确定的相图进行可靠性并不充分的视觉识别或模式识别, 也无需计算由于过渡带具有不确定性而同样并不充分可靠的 Lyapunov 指数.

4) 利用分数阶算子将检测系统层次化. 由于分数阶微积分的良好保记忆性和强大的细节刻画能力, 分数阶可停振动系统能够更好地刻画色噪声背景下的检测模型. 因此, 当背景噪声为色噪声时, 相对于基于整数阶可停振动系统的可停振动检测, 基于分数阶可停振动系统的可停振动检测可以大大降低检测信噪比. 所以, 在色噪声背景下, 分数阶的检测模型比整数阶的检测模型更具优势. 根据不同的色噪声, 选择不同的检测模型阶数, 能够进一步降低可检测信噪比.

本文还建立了描述可停振动状态变化的度量函数——指数波动函数  $V$ , 通过  $V$  的值判断系统所

处的状态. 同时给出了一种计算可靠度不小于  $P$  (即此时虚警概率小于  $1 - P$ ) 的波动指数函数阈值  $\xi$  的方法.

由此可见利用可停振动系统的可停振状态变化检测未知周期微弱信号是一种很实用的具有很低检测信噪比的微弱周期信号检测方法.

- [1] Proakis J G 2003 *Digital Communications* (4th Edition) (Beijing: Electronic Industry Press) p169
- [2] Li Y, Yang B J 2004 *Introduction of Detection by Chaotic Oscillator* (Beijing: Electronic Industry Press) p55 (in Chinese) [李月, 杨宝俊 2004 混沌振子检测引论 (北京: 电子工业出版社) 第 55 页]
- [3] Wang G Y 2001 *IEEE Transaction on Industrial Electronics* **46** 440
- [4] Wang Y S, Jiang W Z, Zhao J J, Fan H D 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2053 (in Chinese) [王永生, 姜文志, 赵建, 范洪达 2008 物理学报 **57** 2053]
- [5] Wang J X, Hou C L 2010 *International Conference on e-Education, e-Business, e-Management, e-Learning* Sanya, Jan, 2010 p387
- [6] Zhang Z F, Ding T R, Huang W Z, Dong Z X 1997 *Qualitative Theory of Differential Equation* (2nd Edition) (Beijing: Science Press) p450 (in Chinese) [张芷芬, 丁同仁, 黄文灶, 董镇喜 1997 微分方程的定性理论 (第 2 版) (北京: 科学出版社) 第 450 页]
- [7] Zhao P D, Zhang X D 2008 *Acta Phys. Sin.* **58** 2791 (in Chinese) [赵品栋, 张晓丹 2008 物理学报 **58** 2791 ]
- [8] Wang M J, Wang X Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1583 (in Chinese) [王明军, 王兴元 2010 物理学报 **59** 1583]
- [9] Petráš I 2011 *Fractional-Order Nonlinear Systems: Modeling, Analysis and Simulation* (Beijing: Higher Education Press) p55
- [10] Zhou S, Fu J L, Liu Y S 2010 *Chin. Phys. B* **19** 120301
- [11] Zhang Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 084502
- [12] Wei H Y, Xia T C 2012 *Chin. Phys. B* **21** 100505
- [13] Zhang S H, Chen B Y, Fu J L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 100202
- [14] Chen X R 2000 *Probability and Statistics* (Beijing: Science Press) p141 (in Chinese) [陈希孺 2000 概率论与数理统计 (北京: 科学出版社) 第 141 页]
- [15] Zhu W Q 2003 *Nonlinear Stochastic Dynamical Systems and Control* p122 (in Chinese) [朱卫秋 2003 非线性随机动力系统与控制 (北京: 科学出版社) 第 122 页]
- [16] Arnold V I 1961 *Sov. Math. Dokl.* **2** 247
- [17] Tavazoei M S, Haeri M 2007 *Phys. Lett. A* **367** 102
- [18] Tavazoei M S, Haeri M 2008 *Nonlinear Analysis* **69** 1299
- [19] Tavazoei M S, Haeri M 2010 *Automatic* **46** 94
- [20] Wang Z H, Hu H Y 2010 *Science China: Physics, Mechanics & Astronomy* **53** 345
- [21] Sabattier J, Moze M, Farges C 2010 *Comput. Math. Appl.* **59** 1594
- [22] Tavazoei M S, Haeri M 2008 *Physica D* **237** 2628
- [23] Tavazoei M S, Haeri M 2009 *Math. Comput. Simul.* **79** 1566
- [24] Podlubny I 1999 *Fractional Differential Equations* (San Diego USA: Academic Press) p78

# A new detecting method for periodic weak signals based on fractional order stopping oscillation system\*

Zhou Xue-Xue Lai Li Luo Mao-Kang<sup>†</sup>

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

(Received 27 September 2012; revised manuscript received 7 January 2013)

## Abstract

In this paper, a new detecting method for weak periodic signals with unknown periods and unknown forms, the so-called fractional stopping oscillation method, is presented. This new detecting method, which is based on the research of some dissipative system of single degree of freedom, is sensitive to periodic signal—even with unknown period and unknown form—and insensitive to noise. Compared with the known chaotic detections in which a built-in signal must be pre-set with the same frequency and the same form as the detected periodic signal, the fractional stopping oscillation method can not only be used even at lower SNR than chaotic detection, but also has some other notable advantages as follows: (1) it need not get the period and the form of detected signal before hand or pre-estimate them; (2) it need not pre-calculate the chaotic threshold value; (3) the existence of periodic signal in system input can be reliably and quantitatively judged by volatility index function, designed in this paper, for stopping oscillation method; (4) a more sensitive detection method can be achieved by the fractionalization of the detection system, especially, the detection threshold can reach  $-182$  dB when the background noise is colored Gaussian noise.

**Keywords:** fractional nonlinear system, duffing oscillator, weak signal detection

**PACS:** 05.45.-a, 05.10.-a, 02.50.-r

**DOI:** 10.7498/aps.62.090501

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn