

## 各向异性介质三维电磁响应模拟的 Ho-GEBA 算法\*

陈桂波 毕娟<sup>†</sup> 张烨 李宗文

(长春理工大学理学院, 长春 130022)

(2012 年 11 月 2 日收到; 2012 年 11 月 27 日收到修改稿)

本文基于积分方程法研究并建立了一种模拟横向同性介质中任意各向异性异常体三维电磁响应的高阶广义扩展 Born 近似 (Ho-GEBA) 算法. 首先利用逐次迭代技术给出积分方程的广义级数展开解, 为保证其收敛性, 引入一种各向异性条件下满足压缩映射的迭代算子. 然后利用异常体区域分解技术, 并结合扩展 Born 近似原理, 得到各向异性介质三维电磁响应的 Ho-GEBA 解. 为提高效率, 计算过程中采用并矢 Green 函数的解析表达式. 最后通过数值计算实例对比验证了本文算法的有效性.

**关键词:** 高阶广义扩展 Born 近似, 积分方程, 电磁模拟, 解析 Green 函数

**PACS:** 41.20.Jb, 91.25.Qi

**DOI:** 10.7498/aps.62.094101

## 1 引言

积分方程法是求解有限大小异常体三维电磁散射问题的一种常用而有效的方法. 该方法一般建立一个关于异常体内电场或电流分布的第二类 Fredholm 积分方程, 通过求解该方程得到空间电磁场. 积分方程的常用解法是将其离散后形成一矩阵方程, 并采用矩量法来求解该矩阵方程. 由于积分方程的离散化系数矩阵一般为复数致密矩阵, 在求解过程中往往需要占用大量的计算机资源, 因此限制了积分方程法的进一步推广和应用.

积分方程的另一种解法是得到其近似解. 由于可避免大型线性代数方程组的求解, 并能获取较高的计算效率, 积分方程的近似解法在近年来得到了广泛关注与应用. 积分方程近似解法中最简单的一种是 Born 近似, 但该方法只适用于频率较低以及异常体尺寸较小等弱散射情况<sup>[1]</sup>. Habashy 等提出了扩展 Born 近似 (EBA) 法<sup>[2]</sup>, 由于加入了一些多级散射作用, EBA 法在计算资源增加不是很大的情况下, 使积分方程的计算精度得了很大提高, 然而 EBA 法在场源距离较近以及异常体内电

场分布变化较为剧烈的条件下计算精度较差. 在此基础上, Cui 等提出了一种高阶 EBA 算法<sup>[3]</sup>, 计算结果表明该方法比传统 EBA (零阶 EBA) 具有更高的精度. 此外, Zhdanov 等提出了求解积分方程的准线性近似 (QLA)、准解析近似 (QAA), Liu 等提出了对角张量近似 (DTA)<sup>[4-6]</sup>. 但上述各种近似算法都有其特定的适用条件, 只有在满足特定条件下才可获得较为理想的计算结果. 目前最新提出的一种近似方法是 Gao 等提出的高阶广义扩展 Born 近似 (Ho-GEBA) 算法<sup>[7]</sup>, 该方法是基于 EBA, 并利用电场的广义级数展开得到的一种算法. Gao 等对比比较了 Ho-GEBA 和其他几种近似算法, 数值计算结果证实了 Ho-GEBA 算法具有较好的适用性.

需要指出的是, 目前积分方程的各种近似算法应用还只局限于各向同性介质, 而关于各向异性介质的研究报道却很少. 本文提出了一种计算各向异性介质三维电磁散射问题的 Ho-GEBA 算法. 文中首先给出积分方程法基本原理, 然后结合积分方程的广义级数展开解与扩展 Born 近似法得到 Ho-GEBA 算法, 最后通过具体算例对本文算法进行检验.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 41004042) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通讯作者. E-mail: emcust@yahoo.cn

## 2 积分方程

### 2.1 积分方程法基本原理

考虑复电导率为  $\bar{\sigma}_b^* = \text{diag}(\sigma_{bh}^*, \sigma_{bh}^*, \sigma_{bv}^*)$  的均匀横向各向同性介质 (背景介质) 中有一个复电导率为  $\bar{\sigma}_a^* = \text{diag}(\sigma_{ax}^*, \sigma_{ay}^*, \sigma_{az}^*)$  的任意各向异性异常体, 这里  $\sigma_{\xi\zeta}^* = \sigma_{\xi\zeta} + i\omega\varepsilon_{\xi\zeta}$  ( $\xi = a, b; \zeta = h, v, x, y, z$ ), 异常体所在的区域为  $\Omega$ . 假定空间中任意位置的磁导率都等于真空中的  $\mu_0$ , 模型可由任意的电性或磁性源激发, 时间因子为  $e^{i\omega t}$ . 由电磁散射理论可知, 空间中任意位置的电磁场可表示为由入射源在背景介质中产生的入射场  $E_b(H_b)$  和由异常体所引起的散射场  $E_s(H_s)$  的叠加:

$$E(r) = E_b(r) + E_s(r) = E_b(r) + \iiint_{\Omega} \bar{G}^{JE}(r, r') \cdot \Delta\bar{\sigma}^*(r') \cdot E(r') dv', \quad (1)$$

$$H(r) = H_b(r) + H_s(r) = H_b(r) + \iiint_{\Omega} \bar{G}^{JH}(r, r') \cdot \Delta\bar{\sigma}^*(r') \cdot E(r') dv', \quad (2)$$

其中  $\Delta\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma}_a^* - \bar{\sigma}_b^* = \text{diag}(\Delta\sigma_x^*, \Delta\sigma_y^*, \Delta\sigma_z^*)$  为异常体与背景介质的电导率差异, 本文将其称为异常电导率. 方程 (1) 和 (2) 中把散射场通过并矢 Green 函数的积分来表达, 这里  $\bar{G}^{JE}$  和  $\bar{G}^{JH}$  分别为电流源电场和电流源磁场并矢 Green 函数 [8]. 若  $r \in \Omega$ , 则方程 (1) 为关于异常体内电场  $E$  的第二类 Fredholm 型积分方程, 通过求解该方程可以得到异常体内的电场分布, 再利用 (1) 和 (2) 式就可以得到空间中任意位置的电磁场.

### 2.2 压缩算子的引入

方程 (1) 可以写成算子方程的形式:

$$E(r) = \hat{G}_{\Omega T}^{JE}[\Delta\bar{\sigma}^* \cdot E], \quad (3)$$

其中算子  $\hat{G}_{\Omega T}^{JE}$  满足

$$\hat{G}_{\Omega T}^{JE}[\Delta\bar{\sigma}^* \cdot E] = E_b(r) + \hat{G}_{\Omega}^{JE}[\Delta\bar{\sigma}^* \cdot E],$$

而算子  $\hat{G}_{\Omega}^{JE}$  满足

$$\hat{G}_{\Omega}^{JE}[\Delta\bar{\sigma}^* \cdot E] = \iiint_{\Omega} \bar{G}^{JE}(r, r') \cdot \Delta\bar{\sigma}^*(r') \cdot E(r') dv'.$$

方程 (3) 可以通过逐次迭代法求解

$$E^{(n+1)} = \hat{G}_{\Omega T}^{JE}[\Delta\bar{\sigma}^* \cdot E^{(n)}], \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (4)$$

但是由于算子  $\hat{G}_{\Omega T}^{JE}$  的  $L_2$  范数不总是小于 1, 其迭代不总是收敛的, 一般只有在异常体尺寸较小以及频率较低等弱散射条件下才是迭代收敛的. 为了克服这个问题, 利用迭代耗散方法, 通过在积分方程上施加一些线性变换, 可以得到总是迭代收敛的积分方程 [9]. 将方程 (1) 写为

$$E = E_b + \hat{G}_{\Omega}^{JE}[\Delta\bar{\sigma}^* \cdot E]. \quad (5)$$

在方程 (5) 两端同时乘上  $\bar{\nu}$ , 则可得到

$$\bar{\nu} \cdot E = \bar{\nu} \cdot E_b + \bar{\nu} \cdot \hat{G}_{\Omega}^{JE}[\Delta\bar{\sigma}^* \cdot \bar{\tau} \cdot \bar{\tau}^{-1} \cdot E], \quad (6)$$

其中  $\bar{\nu}, \bar{\tau}$  的表达式由 (9)—(11) 式给出. 如果令

$$\tilde{E} = \bar{\tau}^{-1} \cdot E, \quad (7)$$

则可以得到满足压缩映射的关于参量  $\tilde{E}$  的算子方程为 [10]

$$\tilde{E} = \bar{\nu} \cdot E_b + \bar{\nu} \cdot \hat{G}_{\Omega}^{JE}[\Delta\bar{\sigma}^* \cdot \bar{\tau} \cdot \tilde{E}] + (\bar{I} - \bar{\nu} \cdot \bar{\tau}) \cdot \tilde{E} = \hat{C}[\tilde{E}], \quad (8)$$

其中  $\bar{I}$  为单位矩阵,

$$\begin{aligned} \bar{\nu} &= \text{diag}(v_h, v_h, v_v) \\ &= \text{diag}\left(\sqrt{\text{Re}(\sigma_{bh}^*)}, \sqrt{\text{Re}(\sigma_{bh}^*)}, \sqrt{\text{Re}(\sigma_{bv}^*)}\right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\tilde{E} = \bar{\tau}^{-1} \cdot E, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \bar{\tau} &= \text{diag}\left(\frac{2v_h}{2v_h^2 + \Delta\sigma_x^*}, \frac{2v_h}{2v_h^2 + \Delta\sigma_y^*}, \right. \\ &\quad \left. \times \frac{2v_v}{2v_v^2 + \Delta\sigma_z^*}\right). \end{aligned} \quad (11)$$

由文献 [10] 可知, 算子  $\hat{C}$  是  $L_2(\Omega)$  上的压缩算子, 也就是说算子方程 (8) 满足压缩映射条件, 进而应用迭代法

$$\tilde{E}^{(n+1)} = \hat{C}[\tilde{E}^{(n)}], \quad (12)$$

求解方程 (8) 对于任意电导率分布等参数条件下总是收敛的.

### 2.3 积分方程的广义级数展开解

如果令  $\bar{\eta} = \bar{\tau} \cdot \bar{\nu}$ , 则方程 (8) 变为

$$E = \bar{\eta} \cdot E_b + \bar{\eta} \cdot \hat{G}_{\Omega}^{JE}[\Delta\bar{\sigma}^* \cdot E] + (\bar{I} - \bar{\eta}) \cdot E. \quad (13)$$

采用迭代法求解上述方程, 则有

$$\begin{aligned} E^{(1)} &= E^{(0)} + \bar{\eta} \cdot \hat{G}_{\Omega}^{JE}[\Delta\bar{\sigma}^* \cdot E^{(0)}] \\ &\quad + \bar{\eta} \cdot (E_b - E^{(0)}). \end{aligned} \quad (14)$$

令  $\mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(0)}$ , 则

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(1)} = & \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(0)} + \bar{\boldsymbol{\eta}} \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(0)}] \\ & + \bar{\boldsymbol{\eta}} \cdot (\mathbf{E}_{\text{b}} - \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(0)}). \end{aligned} \quad (15)$$

令

$$\mathbf{E}_{\text{CB}}^{(1)} = \bar{\boldsymbol{\eta}} \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(0)}] + \bar{\boldsymbol{\eta}} \cdot (\mathbf{E}_{\text{b}} - \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(0)}), \quad (16)$$

则有  $\mathbf{E}^{(1)} = \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(0)} + \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(1)}$ .

同理还可得

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(2)} = & \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(0)} + \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(1)} + \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(2)}, \\ \mathbf{E}^{(3)} = & \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(0)} + \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(1)} + \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(2)} + \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(3)}, \\ & \dots \end{aligned}$$

进而可得积分方程 (8) 中关于电场的广义级数展开

$$\mathbf{E}(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(n)}, \quad (17)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(n)} = & \bar{\boldsymbol{\eta}} \cdot \hat{\mathbf{G}}_{\Omega}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(n-1)}] \\ & + (\bar{\mathbf{I}} - \bar{\boldsymbol{\eta}}) \cdot \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(n-1)}, \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \end{aligned} \quad (18)$$

### 3 各向异性介质中的 Ho-GEBA

将异常体离散形成  $M$  个单元, 考虑第  $m$  个离散单元, 则有

$$\mathbf{E}_m = \mathbf{E}_{\text{bm}} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}]. \quad (19)$$

根据文献 [7] 中介绍的异常体区域分解技术, 如果把异常体所在区域  $\Omega$  分解成  $\Omega_{\text{S}}$  和  $\Omega - \Omega_{\text{S}}$  两部分, 其中  $\Omega_{\text{S}}$  是一个包含第  $m$  个离散单元的子区域, 并且假定在  $\Omega_{\text{S}}$  内电场可以看成是不随空间位置变化的. 那么上式可写为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_m = & \mathbf{E}_{\text{bm}} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega_{\text{S}}}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}] \\ & + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega - \Omega_{\text{S}}}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}]. \end{aligned} \quad (20)$$

如果令  $\Omega_{\text{S}} = \Omega_m$ , 则在区域  $\Omega_{\text{S}}$  内电场是不变的, 因此 (20) 式可写为

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{G}}_{\Omega_{\text{S}}}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*]) \cdot \mathbf{E}_m \\ = & \mathbf{E}_{\text{bm}} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}] - \hat{\mathbf{G}}_{\Omega_{\text{S}}}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}], \\ & (m = 1, 2, \dots, M). \end{aligned} \quad (21)$$

利用前面的展开式 (17), 上式可变为

$$(\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{G}}_{\Omega_{\text{S}}}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*]) \cdot \mathbf{E}_m$$

$$= \mathbf{E}_{\text{bm}} + \hat{\mathbf{G}}_{\Omega}^{\text{JE}} \left[ \Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(n)} \right]$$

$$- \hat{\mathbf{G}}_{\Omega_{\text{S}}}^{\text{JE}} \left[ \Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(n)} \right]$$

$$= \mathbf{E}_{\text{bm}} + \sum_{n=0}^{N-1} \hat{\mathbf{G}}_{\Omega}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(n)}]$$

$$- \hat{\mathbf{G}}_{\Omega_{\text{S}}}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*] \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(n)}. \quad (22)$$

令  $\bar{\boldsymbol{\zeta}} = \bar{\boldsymbol{\eta}}^{-1} - \bar{\mathbf{I}}$ , 则有

$$\sum_{n=0}^{N-1} \hat{\mathbf{G}}_{\Omega}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(n)}]$$

$$= \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(1)} + \bar{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(1)} + \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(0)} - \mathbf{E}_{\text{bm}} \\ + \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(2)} + \bar{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(2)} - \bar{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(1)}$$

+ ...

$$+ \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(N)} + \bar{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(N)} - \bar{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(N-1)}$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(n)} - \mathbf{E}_{\text{bm}} + \mathbf{E}'_{\text{CBm}}{}^{(N)}, \quad (23)$$

其中

$$\mathbf{E}'_{\text{CBm}}{}^{(N)} = \hat{\mathbf{G}}_{\Omega}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^* \cdot \mathbf{E}_{\text{CB}}^{(N-1)}] + \bar{\boldsymbol{\zeta}} \cdot \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(N-1)}.$$

将 (23) 代入 (22) 式中, 可以得到

$$\begin{aligned} & (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{G}}_{\Omega_{\text{S}}}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*]) \cdot \mathbf{E}_m \\ = & (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{G}}_{\Omega_{\text{S}}}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*]) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(n)} + \mathbf{E}'_{\text{CBm}}{}^{(N)}. \end{aligned} \quad (24)$$

进而可得

$$\mathbf{E}_m = \sum_{n=0}^{N-1} \mathbf{E}_{\text{CBm}}^{(n)} + (\bar{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{G}}_{\Omega_{\text{S}}}^{\text{JE}} [\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^*])^{-1} \cdot \mathbf{E}'_{\text{CBm}}{}^{(N)}. \quad (25)$$

上式即为各向异性介质中三维电磁散射问题计算的高阶广义扩展 Born 近似算法的基本计算公式, 其中第一项代表电场的广义级数展开, 第二项代表扩展 Born 近似的贡献.

由 (25) 式可以看出, 为了应用 Ho-GEBA 计算散射电磁场, 还需要计算并矢 Green 函数. 关于横向同性各向异性介质中的并矢 Green 函数理论目前发展已经较为成熟 [11-13], 为进一步提高本文算法的计算效率, 在计算过程中采用并矢 Green 函数的解析表达式 (见附录). 需要说明的是, 本文附录中所给出的解析 Green 函数表达式都是作者经过细致推导得到的, 并且与数值方法的计算结果进行了大量对比验证, 能够保证其正确性.

## 4 数值计算结果

### 4.1 算法验证

如图 1, 异常体为边长为 4 m 的正方体, 异常体的中心位于如图所示的直角坐标系中的 (0,0,6 m), 接收点位于  $x$  轴上. 假定异常体在三个方向上的电阻率分别为为  $\rho_x = 200 \Omega \cdot m$ ,  $\rho_y = 100 \Omega \cdot m$ ,  $\rho_z = 500 \Omega \cdot m$ , 背景介质的电阻率 ( $\rho_h, \rho_v$ ) 分别取 (0.5  $\Omega \cdot m$ , 1  $\Omega \cdot m$ ), (5  $\Omega \cdot m$ , 10  $\Omega \cdot m$ ), (500  $\Omega \cdot m$ , 1000  $\Omega \cdot m$ ), (5000  $\Omega \cdot m$ , 10000  $\Omega \cdot m$ ). 假定发射源为位于坐标原点的单位大小的垂直磁偶极子, 接收点位于 (5 m,0,0). 发射频率为 10 kHz. 分别采用基于传统迭代法 (4) 和压缩迭代法 (12) 计算了磁场的  $z$  分量, 其相对误差随迭代次数的变化曲线如图 2(a)—(d) 所示. 图中曲线显示, 当背景介质的横(纵)向电阻率小于异常体横(纵)向电阻率时, 两种方法都是迭代收敛的, 并且压缩迭代法要比传统迭代法收敛速度稍快一些. 当背景介质的横(纵)向电阻率大于异常体横(纵)向电阻率时, 传统迭代法出现了明显的发散特性, 而此时压缩迭代法仍然是收敛的. 根据文献 [2] 可知, 传统迭代法 (4) 的收敛性能主要是由异常电导率的相对值

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= \begin{pmatrix} \delta_1 & & \\ & \delta_2 & \\ & & \delta_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} |\rho_{bh}/\rho_{ax} - 1| & & \\ & |\rho_{bh}/\rho_{ay} - 1| & \\ & & |\rho_{bv}/\rho_{az} - 1| \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (26)$$

来决定,  $\bar{\delta}$  的各分量越小, 方程 (4) 的迭代收敛性能越好. 当背景介质的横(纵)向电阻率小于异常体横(纵)向电阻率时,  $\bar{\delta}$  的三个分量均相对较小 (小于 1), 所以此时传统迭代法 (4) 一般具有较好的收敛性. 当背景介质的横(纵)向电阻率大于异常体横(纵)向电阻率的 2 倍时,  $\bar{\delta}$  的三个分量均相对较大 (大于 1), 传统迭代法 (4) 逐渐变得不稳定甚至严重发散. 对于压缩迭代法 (12), 由于迭代算子的范数总小于 1, 其在任意电阻率分布情况下总是迭代收敛的. 综上所述, 压缩算子的引入对于积分方程迭代收敛性质的提高作用是非常明显的, 尤其是在背

景介质横(纵)向电阻率大于异常体横(纵)向电阻率的时候.

### 4.2 数值结果

#### 模型1

还是考虑如图 1 所示的模型, 异常体为边长为 4 m 的正方体, 异常体的中心位于图中直角坐标系的 (0,0,6 m) 点, 接收点位于  $x$  轴上. 还是假定异常体在三个方向上的电阻率分别为为  $\rho_x = 200 \Omega \cdot m$ ,  $\rho_y = 100 \Omega \cdot m$ ,  $\rho_z = 500 \Omega \cdot m$ , 背景介质的电阻率 ( $\rho_h, \rho_v$ ) 取为 (20  $\Omega \cdot m$ , 50  $\Omega \cdot m$ ).

首先假定发射源为位于坐标原点的单位大小的垂直磁偶极子, 接收点位于  $x$  轴上. 发射频率为 10 kHz. 分别采用传统 Born 近似、文献 [13] 的严格积分方程法和本文的 Ho-GEBA 法计算了散射磁场的  $z$  分量  $H_{zz}$ , 如图 3 所示. 然后再假定发射源为位于坐标原点的单位大小的  $x$  方向电偶极子, 接收点位于  $x$  轴上. 发射频率为 10 kHz. 分别采用传统 Born 近似、文献 [13] 的严格积分方程法和本文的 Ho-GEBA 法计算了散射电场的  $x$  分量  $E_{xx}$ , 如图 4 所示.

图 5(a)—(d) 给出了图 3 和图 4 中几种计算方法的相对误差. 从图 3 至图 5 可以看出, 传统 Born 近似误差较大, 而本文算法则收敛很快, 只用 3 阶近似即可很接近于精确解.

#### 模型2

仍考虑图 1 所示的模型, 异常体为边长为 4 m 的正方体, 异常体的中心位于图中直角坐标系的 (0,0,6 m), 接收点位于  $x$  坐标轴上. 还是假定异常体在三个方向上的电阻率分别为为  $\rho_x = 200 \Omega \cdot m$ ,  $\rho_y = 100 \Omega \cdot m$ ,  $\rho_z = 500 \Omega \cdot m$ , 背景介质的电阻率 ( $\rho_h, \rho_v$ ) 取为 (2000  $\Omega \cdot m$ , 5000  $\Omega \cdot m$ ).

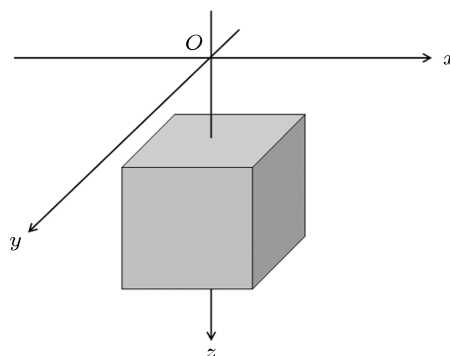


图 1 三维电磁散射模型

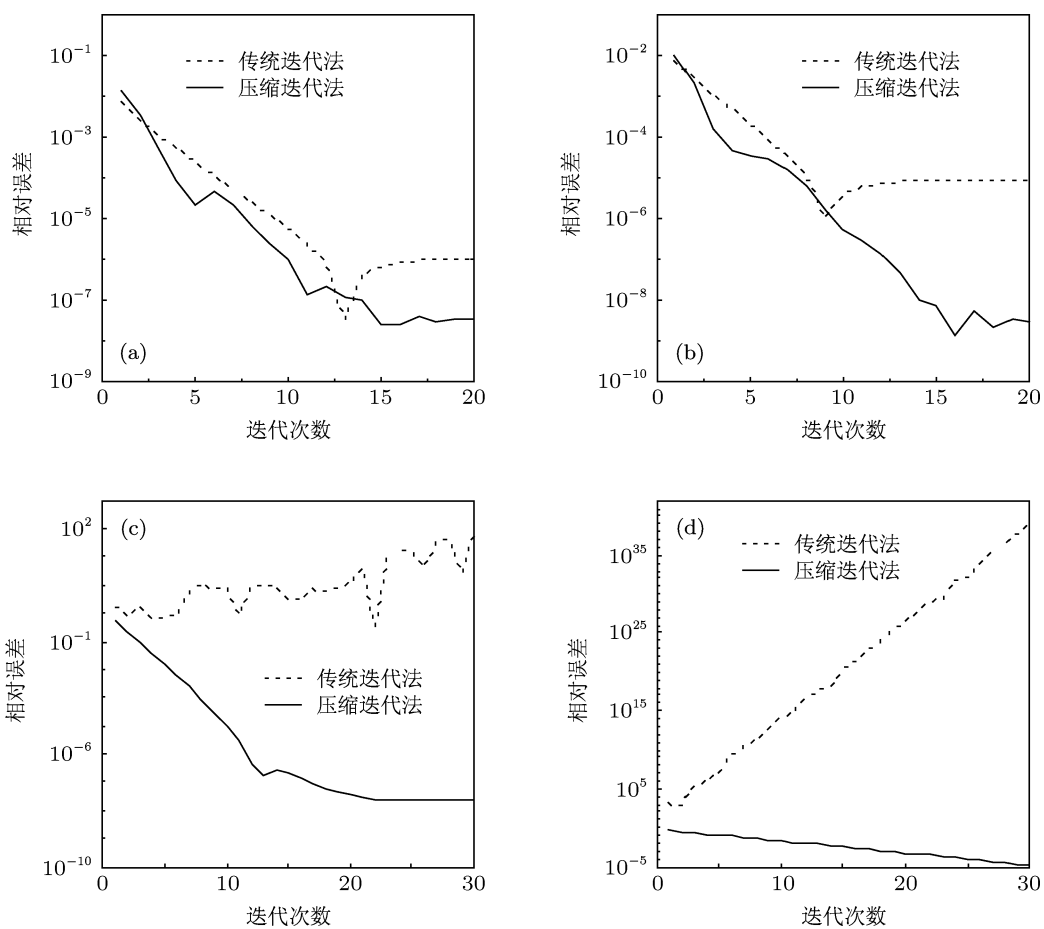


图2 相对误差随迭代次数的变化曲线 (a)  $(\rho_h, \rho_v) = (0.5 \Omega \cdot m, 1 \Omega \cdot m)$ ; (b)  $(\rho_h, \rho_v) = (5 \Omega \cdot m, 10 \Omega \cdot m)$ ; (c)  $(\rho_h, \rho_v) = (500 \Omega \cdot m, 1000 \Omega \cdot m)$ ; (d)  $(\rho_h, \rho_v) = (5000 \Omega \cdot m, 10000 \Omega \cdot m)$

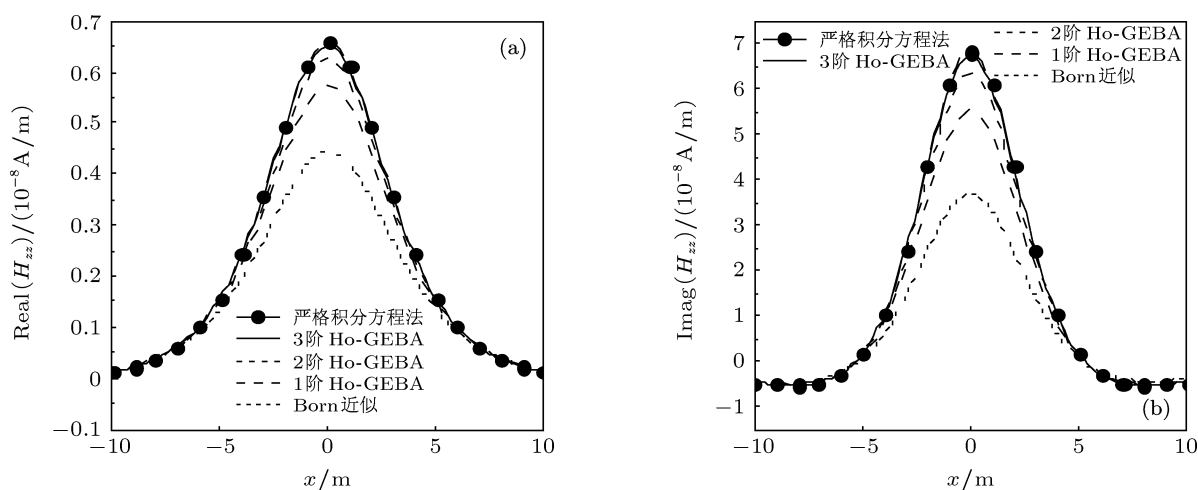


图3 背景介质的电阻率  $(\rho_h, \rho_v) = (20 \Omega \cdot m, 50 \Omega \cdot m)$  时的散射磁场  $z$  分量

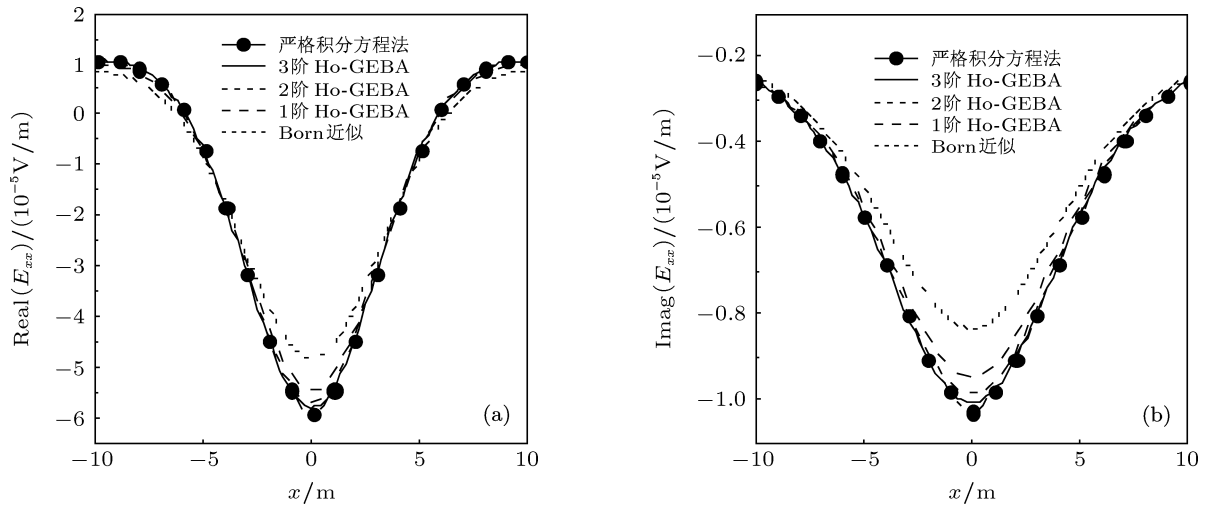


图4 背景介质的电阻率  $(\rho_h, \rho_v) = (20 \Omega \cdot m, 50 \Omega \cdot m)$  时的散射电场  $x$  分量

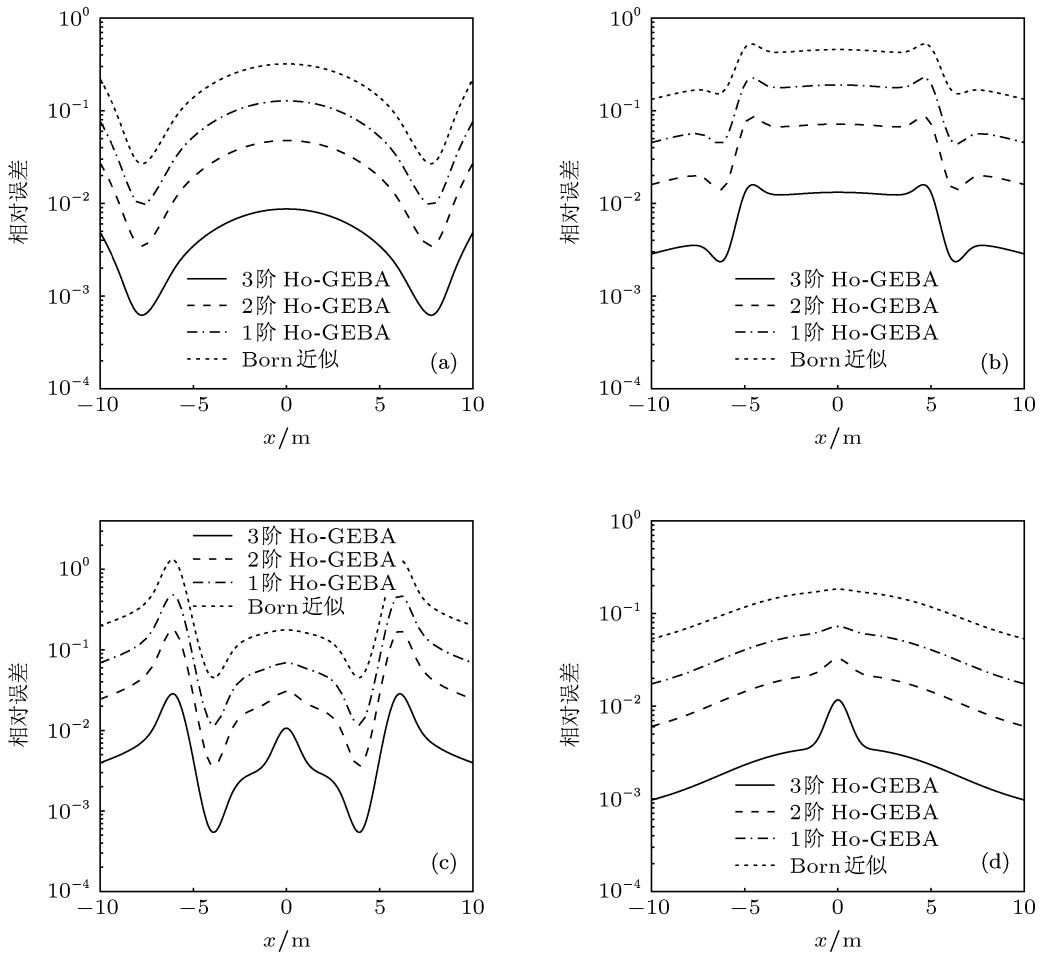


图5 相对误差曲线图 (a), (b) 图3中几种计算方法的相对误差; (c), (d) 图4中几种计算方法的相对误差

首先假定发射源为位于坐标原点的单位大小的垂直磁偶极子, 接收点位于  $x$  轴上. 发射频率为 10 kHz. 分别采用传统 Born 近似、文献 [13] 的严

格积分方程法和本文的 Ho-GEBA 法计算了散射磁场的  $z$  分量  $H_{zz}$ , 如图 6 所示. 然后再假定发射源为位于坐标原点的单位大小的  $x$  方向电偶极子, 接收

点位于  $x$  轴上. 发射频率为 10 kHz. 分别采用传统 Born 近似、文献 [13] 的严格积分方程法和本文的 Ho-GEBA 法计算了散射电场的  $x$  分量  $E_{xx}$ , 如图 7 所示.

图 8(a)—(d) 给出了图 6 和图 7 中几种方法的相对误差. 与图 3 至图 5 中曲线所体现出来的特征类似, 从图 6 至图 8 可以看出, 传统 Born 近似误差较大, 而本文的算法则收敛很快, 只用 3 阶近似即可很接近于精确解.

表 1 中给出了图 3、图 4、图 6、图 7 的计算时间, 计算平台为 Intel Core i7 CPU、主频 2.67 GHz

笔记本电脑, 采用 Fortran 语言编制程序. 从表 1 可以看出, 本文的算法用于计算各向异性介质三维电磁散射问题, 在保证计算精度的同时, 可以使积分方程的求解效率得到有效提高. 这种提高作用在研究电磁场三维反演问题时尤其重要.

这里需要说明的是, 本文的侧重点是提出一种各向异性介质中三维电磁散射问题的高阶广义扩展 Born 近似算法, 关于背景介质以及异常体的各向异性等因素对于电磁响应的影响规律的研究, 我们将另文介绍.

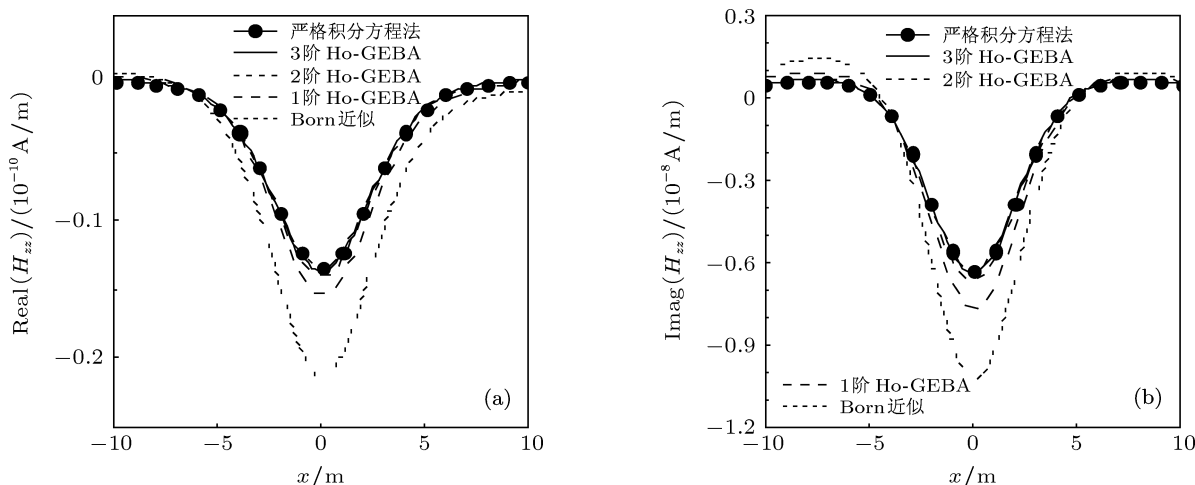


图 6 背景介质的电阻率  $(\rho_h, \rho_v) = (2000 \Omega \cdot m, 5000 \Omega \cdot m)$  时的散射磁场  $z$  分量

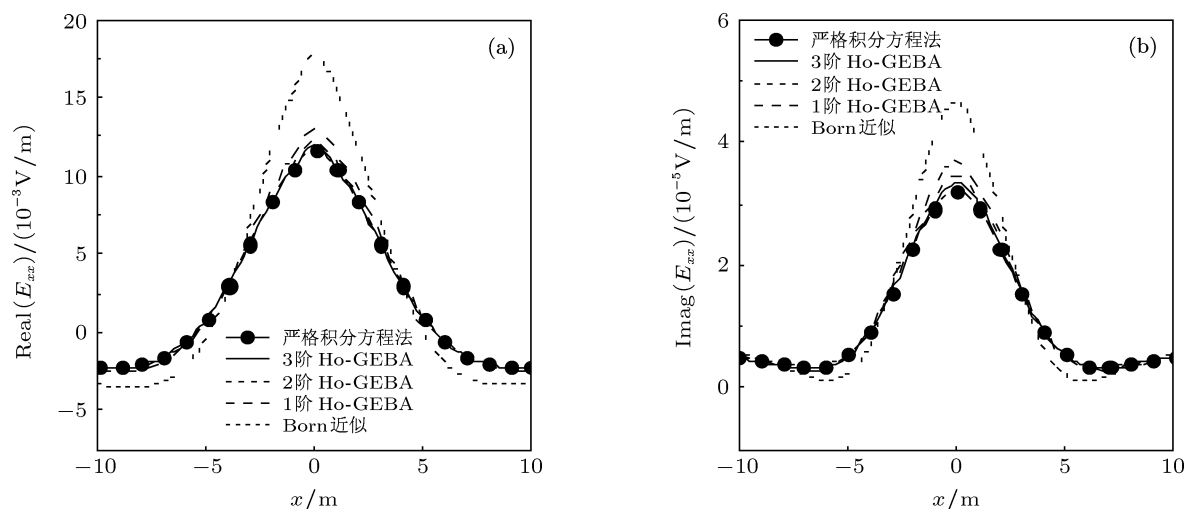


图 7 背景介质的电阻率  $(\rho_h, \rho_v) = (2000 \Omega \cdot m, 5000 \Omega \cdot m)$  时的散射电场  $x$  分量

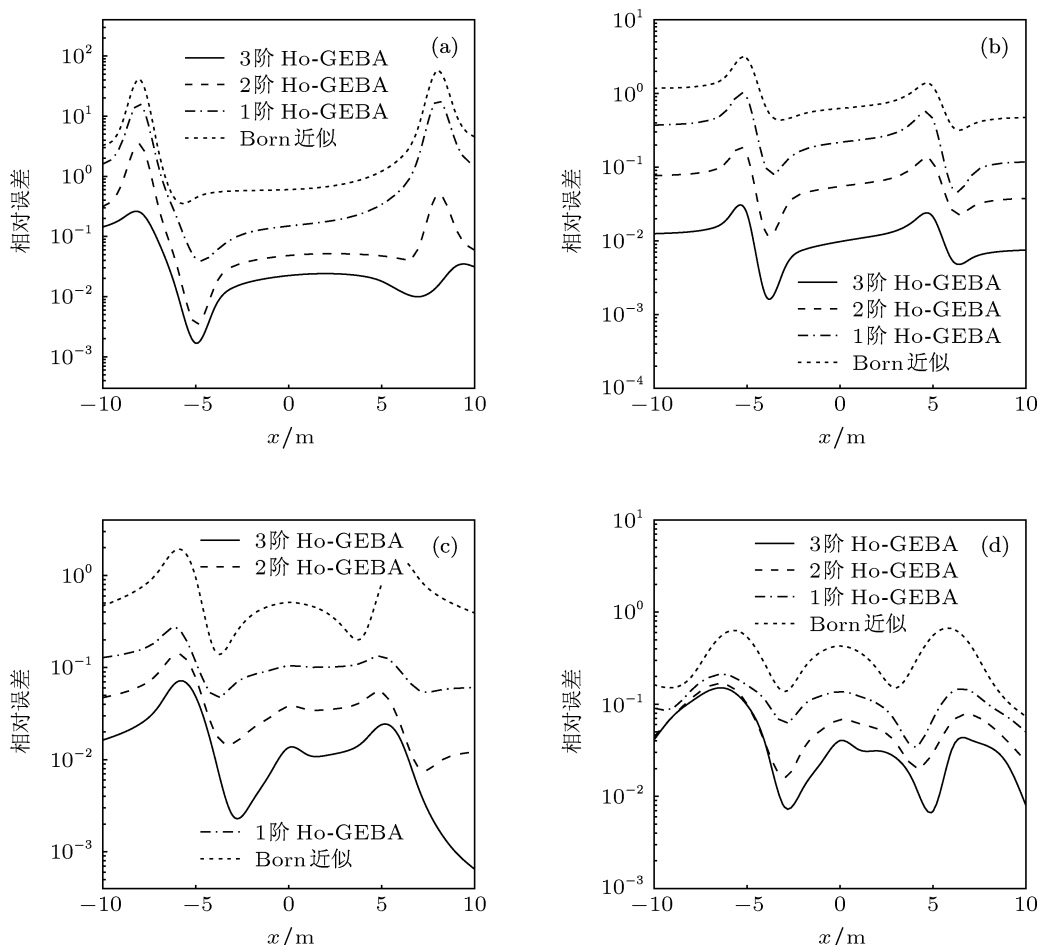


图 8 相对误差曲线图 (a), (b) 图 6 中几种计算方法的相对误差; (c), (d) 图 7 中几种计算方法的相对误差

表 1 计算时间对比 (s)

	Born	Ho-GEBA(3)	Exact
图 3	3.5	5.2	14
图 4	3.3	4.7	13
图 6	3.8	6.1	22
图 7	3.7	6.1	25

## 5 结论

本文提出了一种计算各向异性介质三维电磁散射问题的高阶广义扩展 Born 近似算法. 本文方法与传统 Born 近似以及扩展 Born 近似方法相比, 具有更高的精度和更好的收敛特性, 在不需要太高阶次的情况下即可获得较精确的计算结果. 本文算法作为各向异性介质三维电磁散射计算的一种可选择方法, 可用来系统考察分析介质的各向异性等因素对于三维电磁响应的影响特征和规律, 以

及为进行电磁场三维反演工作提供一套有效的正演算法.

## 附录 均匀横向同性介质中并矢 Green 函数的解析解

在求解积分方程以及利用积分方程的解来确定空间电磁场的时候, 均要用到并矢 Green 函数的计算. 基于无限大横向同性介质中的 Maxwell 方程组, 我们经过细致的推导, 得到了无限大横向同性介质中并矢 Green 函数的完全解析解.

### 1. 电流源电场并矢 Green 函数解析解

$$G_{\alpha\alpha}^{JE} = -\frac{1}{\rho^2} \{ (\alpha - \alpha')^2 g_1^E + (\beta - \beta')^2 g_2^E - [(\alpha - \alpha')^2 - (\beta - \beta')^2] (g_3^E - g_4^E) \}, \quad (A1)$$

$$G_{\alpha\beta}^{JE} = -\frac{1}{\rho^2} (\alpha - \alpha') (\beta - \beta') (g_1^E - g_2^E - g_3^E + g_4^E), \quad (A2)$$

$$G_{\alpha z}^{JE} = \frac{1}{\rho} (\alpha - \alpha') g_5^E = G_{z\alpha}^{JE}, \quad G_{zz}^{JE} = g_6^E, \quad (A3)$$



其中  $\alpha, \beta = x, y$  且  $\alpha \neq \beta$ ,

$$g_1^E = \frac{\lambda_e e^{ik_e R_e}}{4\pi i \omega \epsilon_0 \epsilon_h^* R_e^5} \{ ik_e R_e^3 - [1 + k_h^2(z-z')^2] R_e^2 - 3ik_e \lambda_e^2 (z-z')^2 R_e + 3\lambda_e (z-z')^2 \}, \quad (A4)$$

$$g_2^E = \frac{i\omega\mu_0\mu_h}{4\pi\lambda_m} \frac{e^{ik_m R_m}}{R_m}, \quad (A5)$$

$$g_3^E = \frac{1}{4\pi i \omega \epsilon_0 \epsilon_h^* \rho^2} \left\{ \frac{\lambda_e e^{ik_e R_e}}{R_e^3} [R_e^2 + ik_e \lambda_e^2 (z-z')^2 R_e - \lambda_e^2 (z-z')^2] - [ik_h e^{ik_h |z-z'|} + \delta(z-z')] \right\}, \quad (A6)$$

$$g_4^E = \frac{1}{4\pi\rho^2} \sqrt{\frac{\mu_0\mu_h}{\epsilon_0\epsilon_h^*}} (e^{ik_m R_m} - e^{ik_h |z-z'|}), \quad (A7)$$

$$g_5^E = \frac{\lambda_e \rho e^{ik_e R_e}}{4\pi i \omega \epsilon_0 \epsilon_v^*} (3 - 3ik_e R_e - k_e^2 R_e^2), \quad (A8)$$

$$g_6^E = -\frac{\lambda_e e^{ik_e R_e}}{4\pi i \omega \epsilon_0 \epsilon_v^* R_e^5} [2(ik_e R_e - 1)R_e^2 + \rho^2(3 - 3ik_e R_e - k_e^2 R_e^2)]. \quad (A9)$$

## 2. 磁流源电场并矢 Green 函数解析解

$$G_{xx}^{ME} = \frac{1}{\rho^2} (x-x')(y-y')(g_1^M - g_2^M - g_3^M + g_4^M) = -G_{yy}^{ME}, \quad G_{zz}^{ME} = 0, \quad (A10)$$

$$G_{xy}^{ME} = -\frac{1}{\rho^2} \left\{ (x-x')^2 g_1^M + (y-y')^2 g_2^M - [(x-x')^2 - (y-y')^2] (g_3^M - g_4^M) \right\}, \quad (A11)$$

$$G_{yx}^{ME} = \frac{1}{\rho^2} \left\{ (y-y')^2 g_1^M + (x-x')^2 g_2^M + [(x-x')^2 - (y-y')^2] (g_3^M - g_4^M) \right\}, \quad (A12)$$

$$G_{xz}^{ME} = \frac{1}{\rho} (y-y') g_5^M, \quad G_{zx}^{ME} = -\frac{1}{\rho} (y-y') g_6^M, \quad (A13)$$

$$G_{yz}^{ME} = -\frac{1}{\rho} (x-x') g_5^M, \quad G_{zy}^{ME} = \frac{1}{\rho} (x-x') g_6^M. \quad (A14)$$

其中

$$g_1^M = -\frac{\lambda_m (z-z') (ik_m R_m - 1) e^{ik_m R_m}}{4\pi R_m^3}, \quad (A15)$$

$$g_2^M = -\frac{\lambda_m (z-z') (ik_m R_m - 1) e^{ik_m R_m}}{4\pi R_m^3}, \quad (A15)$$

$$g_3^M = -\frac{1}{4\pi\rho^2} \left[ \frac{\lambda_e (z-z') e^{ik_e R_e}}{R_e} - \text{sign}(z-z') e^{ik_h |z-z'|} \right], \quad (A16)$$

$$g_4^M = -\frac{1}{4\pi\rho^2} \left[ \frac{\lambda_m (z-z') e^{ik_m R_m}}{R_m} - \text{sign}(z-z') e^{ik_h |z-z'|} \right], \quad (A17)$$

$$g_5^M = -\frac{\lambda_m \rho e^{ik_m R_m}}{4\pi R_m^3} (ik_m R_m - 1),$$

$$g_6^M = -\frac{\lambda_e \rho e^{ik_e R_e}}{4\pi R_e^3} (ik_e R_e - 1). \quad (A18)$$

令均匀横向同性介质的复介电常数和磁导率分别是对角张量  $\bar{\epsilon}^* = \text{diag}(\epsilon_{nh}^*, \epsilon_{nh}^*, \epsilon_{nv}^*)$  和  $\bar{\mu}_n = \text{diag}(\mu_{nh}, \mu_{nh}, \mu_{nv})$ , 其中  $\epsilon_{nh}^*, \epsilon_{nv}^*$  分别表示横向和纵向复介电常数, 而  $\mu_{nh}, \mu_{nv}$  分别表示横向和纵向磁导率. 复介电常数  $\bar{\epsilon}^*$  的两个分量由  $\epsilon_{np}^* = \epsilon_0 \epsilon_{np} + (i\omega \rho_{np})^{-1}$  ( $p = h, v$ ) 确定, 其中  $\epsilon_{nh}, \epsilon_{nv}$  分别为横向和纵向相对介电常数,  $\rho_{nh}, \rho_{nv}$  分别为横向和纵向电阻率. 横向波数  $k_h = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_h \epsilon_0 \epsilon_h^*}$ , 电各向异性系数  $\lambda_e = \sqrt{\epsilon_h^* / \epsilon_v^*}$ , 磁各向异性系数

$$\lambda_m = \sqrt{\mu_h / \mu_v}, \quad \rho = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2},$$

$$k_e = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_h \epsilon_0 \epsilon_v^*}, \quad k_m = \omega \sqrt{\mu_0 \mu_v \epsilon_0 \epsilon_h^*},$$

$$R_e = \sqrt{\rho^2 + \lambda_e^2 (z-z')^2}, \quad R_m = \sqrt{\rho^2 + \lambda_m^2 (z-z')^2},$$

$$\text{sign}(z-z') = \begin{cases} 1, & z > z', \\ -1, & z < z'. \end{cases}$$

特别地, 当场源横向距离  $\rho \rightarrow 0$  时,  $g_3^E, g_4^E, g_3^M$  和  $g_4^M$  变为不定式, 由极限方法可得

$$g_3^{E(M)}|_{\rho \rightarrow 0} = g_1^{E(M)}|_{\rho \rightarrow 0}, \quad g_4^{E(M)}|_{\rho \rightarrow 0} = g_2^{E(M)}|_{\rho \rightarrow 0}. \quad (A19)$$

以上给出了电场并矢 Green 函数的完全解析解, 相应的磁场并矢 Green 函数可由对偶原理得到, 限于篇幅, 这里不给出其具体表达式.

[1] Born M, Wolf E 1980 *Principles of Optics* (New York: Pergamon)  
 [2] Habashy T M, Groom R W, Spies B 1993 *J. Geophys. Res* **98** B2  
 [3] Cui T J, Chew W C, Hong W 2004 *IEEE Transactions on Antennas and Propagation* **52** 3  
 [4] Zhdanov M S, Fang S 1996 *Geophysics* **61** 646  
 [5] Zhdanov M S, Dmitriev V I, Fang S, Hursan G 2000 *Geophysics* **65** 1746  
 [6] Song L P, Liu Q H 2005 *IEEE Geosci. Remote Sens. Letters* **2** 238  
 [7] Gao G Z, Torres-Verdin 2006 *IEEE Trans. Antennas Propag* **54** 1243  
 [8] Michalski K A, Mosig J R 1997 *IEEE Trans. Antennas Propag* **45** 508  
 [9] Pankratov O V, Kuvshinov A V, Avdeev D B 1997 *Geomag. Geoelectr* **49** 1541  
 [10] Chen G B, Wang H N, Yao J J, Han Z Y 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 3848 (in Chinese) [陈桂波, 汪宏年, 姚敬金, 韩子夜 2009 物理学报 **58** 3848]  
 [11] Chen G B, Wang H N, Yao J J, Han Z Y, Yang S W 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 1608 (in Chinese) [陈桂波, 汪宏年, 姚敬金, 韩子夜, 杨守文 2009 物理学报 **58** 1608]

[12] Chen G B, Bi J, Wang J B, Chen X Y, Sun G C, Lu J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 094102 (in Chinese) [陈桂波, 毕娟, 汪剑波, 陈新邑, 孙贯成, 卢俊 2011 物理学报 **60** 094102]

[13] Chen G B 2009 *Ph.D. Dissertation* (Changchun: Jilin University) (in Chinese) [陈桂波 2009 博士学位论文 (长春: 吉林大学)]

# High-order generalized extended Born approximation algorithm for 3D electromagnetic responses modeling in anisotropic medium\*

Chen Gui-Bo Bi Juan<sup>†</sup> Zhang Ye Li Zong-Wen

(School of Science, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

(Received 2 November 2012; revised manuscript received 27 November 2012)

## Abstract

In this paper, we present a high-order generalized extended Born approximation (Ho-GEBA) algorithm for modeling 3D electromagnetic responses of an arbitrary anisotropic body in transverse anisotropic background medium based on integral equation method. First, generalized series solutions of the integral equation are obtained by successive iterative technique, and a contraction operator is introduced for the anisotropic medium based on the iterative dissipation principle to guarantee the convergence of high-order series. Then, we derive the Ho-GEBA solutions of 3D electromagnetic responses in the anisotropic medium using the abnormal body domain decomposition method combining with the extended Born approximation. Analytical solutions of dyadic Green's functions in the transverse isotropic medium are used, which can improve the efficiency of the algorithm greatly. Numerical results show the validity of the algorithm by comparing it with the full integral equation method and the classical Born approximation.

**Keywords:** high-order generalized extended Born approximation, integral equation, electromagnetic modeling, analytical green's functions

**PACS:** 41.20.Jb, 91.25.Qi

**DOI:** 10.7498/aps.62.094101

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grand No. 41004042).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: emcust@yahoo.cn