

电子磁矩对同步辐射频谱的修正*

李一丁^{1)†} 张鹏飞²⁾ 张辉¹⁾ 徐宏亮¹⁾

1) (中国科学技术大学, 国家同步辐射实验室, 合肥 230029)

2) (中国科学技术大学近代物理系, 中国科学院基础等离子体物理重点实验室, 合肥 230026)

(2012年8月27日收到; 2012年12月2日收到修改稿)

本文从偶极子辐射场的 Heaviside-Feynman 表达式出发, 用经典的电动力学方法推导了考虑内禀磁矩影响后的相对论电子辐射频谱分布的表达式, 并对做匀速圆周运动的极端相对论性电子的同步辐射, 计算了两个偏振方向上的考虑磁矩修正后的辐射谱. 计算结果表明对于特征频率为 ω_c 的同步辐射, 如果 $\hbar\omega_c \geq 10 \text{ keV}$, 内禀磁矩对辐射的修正是可观的. 通过同步辐射的内禀磁矩修正, 本文讨论了电子束极化度与辐射场偏振度的依赖关系, 并基于此关系提出一种测量电子束极化度的新方法.

关键词: 同步辐射, 电子内禀磁矩, 同步辐射偏振度, 束流极化度

PACS: 41.60.-m, 41.60.Ap

DOI: 10.7498/aps.62.094103

1 引言

电子同步辐射的频谱是可以由经典电动力学精确计算的^[1]. 从较早的 Schott^[2], Zhu^[3], Schwinger^[4] 的研究, 到最近的^[5-9], 在计算电子的同步辐射时, 大都采用运动点电荷的模型. 然而, 众所周知, 电子除了带电荷外还带有内禀的自旋以及磁矩^[10]. 而且由于相对论效应, 高速运动的电子的磁矩还会伴随着电矩. 加速运动的磁矩和电矩也会影响电磁辐射.

1968年, Klein^[11] 推导出了匀强磁场中的带电粒子的 Dirac 粒子的波函数并且用量子电动力学计算了极端相对论情形下的辐射, 其所得的结果与常用的经典推导的结果相一致. 然而 Klein 的计算中并未考虑电子自旋对同步辐射的影响, 也没有计算自旋引起的修正. 在文献 [12] 中, 磁矩的修正被用来解释同步辐射对电子轨道平面的非对称性. 但是, 目前为止, 对于电子自旋对同步辐射的修正尚未有完整的理论计算发表.

尽管文献 [11] 中的量子电动力学计算可以用来作为计算同步辐射自旋修正的理论基础, 然而,

基于经典电动力学的点电荷与磁矩模型的计算可能在物理上更加直观. 关于运动偶极子产生的电磁场的计算, Monaghan^[13] 曾于 1968 年推导出了偶极子场的 Heaviside-Feynman 表达式. 1994 年, Heras^[14,15] 又通过介质情形的 Jefimenko 公式重新得到了这一表达式并进一步计算了运动偶极子的辐射功率. 由于 Heaviside-Feynman 表达式的辐射场项具有观测者时间的二阶导函数的形式, 易于做频谱分析, 我们将使用该表达式来计算电子自旋对电子同步辐射频谱的修正. 根据我们的计算结果, 对通常的同步辐射光源, 电子自旋的影响几乎可以忽略; 但是对于能量高, 特征波长很短的光源, 如果对应特征频率的光子能量在 10 keV 量级甚至更高, 则自旋修正的影响是可观的.

电子储存环中的电子束流极化状态与其运行的工作点 (v_x, v_y) 和 Touschek 寿命均有关, 是一个重要参数. 目前对束流极化度还只能利用束损系统测量, 较为耗时. 在我们的计算基础上, 本文从带磁矩电子的同步辐射分布出发分析了辐射偏振与束流极化度的关系, 对于能量较高, 辐射特征波长较短的储存环提出一种新的测量束流极化度的方案.

* 国家基础研究重大项目前期预研专项基金 (批准号: 2001CCB01000) 和科技部 ITER-CN 项目 (批准号: 2010GB107001) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: liyd@mail.ustc.edu.cn

本文的计算均是对未考虑束团发射度的理想轨道电子所做,应用经典电动力学中的点电荷与磁矩的模型.如通常所做的,本文暂没有考虑量子效应.

2 计入磁矩修正的电子辐射频谱

加速运动的偶极子产生的电场可以由 Heaviside-Feynman 表达式^[13]给出

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = & \left\{ \frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}}{R^3} + \frac{R}{c} \frac{d}{dt} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}}{R^3} \right] \right. \\ & - \frac{d}{dt} \left[\frac{3(\mathbf{p} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{p}}{c^2 R^2} \frac{dR}{dt} + \frac{\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})cR^2} \right] \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) - \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R} \right] \right\}_{\text{ret}}, \end{aligned}$$

式子中的 \mathbf{p} 和 $\boldsymbol{\mu}$ 分别表示偶极子的电矩和磁矩,所有对时间的导数都是对观测者时间求导,大括号右下角的“ret”表示大括号里的物理量都是在推迟时间

$$t' = t - R/c \quad (1)$$

取值, R 为观测点 \mathbf{x} 到偶极子在推迟时间的位置 $\mathbf{x}_e(t')$ 间的距离.

Heaviside-Feynman 表达式的最后一项

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{p}) - \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{n}}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})R} \right]_{\text{ret}} \quad (2)$$

是 $1/R$ 阶的辐射场项,它具有观测者时间的二阶导数的形式.

用 (2) 式可以计算电子磁矩引起的辐射场.由于在相对电子静止的参考系中电子只具有内禀磁矩 $\boldsymbol{\mu}_e$ 而没有电矩,由电矩 \mathbf{p} 与磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 的 Lorentz 变换关系

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \gamma \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\mu}_e, \\ \boldsymbol{\mu} &= \gamma \boldsymbol{\mu}_e - \frac{\gamma^2}{1 + \gamma} (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\mu}_e) \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (3)$$

可知,在实验室参考系中以速度 $\mathbf{v} = c\boldsymbol{\beta}$ 运动的电子会同时具有电矩和磁矩,且应满足关系

$$\mathbf{p} = \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\mu}. \quad (4)$$

(3) 式中的磁矩变换式可以写成平行和垂直于 $\boldsymbol{\beta}$ 方向的分量形式

$$\boldsymbol{\mu}_{\parallel} = \boldsymbol{\mu}_{e,\parallel}, \quad \boldsymbol{\mu}_{\perp} = \gamma \boldsymbol{\mu}_{e,\perp}, \quad (5)$$

可见,将磁矩从电子参考系变换到实验室参考系时,平行于速度方向的分量保持不变,而垂直于速度方向的分量需要变为 γ 倍.

由 (4) 式代入 (2) 式可知,运动电子的内禀磁矩引起的辐射场为

$$\mathbf{E} = \frac{1}{c^2 R} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{\mathbf{n} \times [\boldsymbol{\mu} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\mu})]}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right\}_{\text{ret}}, \quad (6)$$

因为对 $1/R$ 的求导产生的 $1/R$ 的更高阶项与辐射场无关,我们忽略了 $1/R$ 的导数.(6) 式与经典电动力学中用点电荷模型算出的辐射场相加,就可以得到同时考虑电荷和磁矩后的电子辐射场

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{e}{cR} \left\{ \frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^3} \right\}_{\text{ret}} \\ &+ \frac{1}{c^2 R} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{\mathbf{n} \times [\boldsymbol{\mu} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\mu})]}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right\}_{\text{ret}} \\ &= \frac{e}{cR} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right\}_{\text{ret}} \\ &+ \frac{1}{c^2 R} \frac{d^2}{dt^2} \left\{ \frac{\mathbf{n} \times [\boldsymbol{\mu} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\mu})]}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right\}_{\text{ret}}. \end{aligned} \quad (7)$$

上式中第一个等号右边的 $\dot{\boldsymbol{\beta}}$ 是对推迟时间 t' 求导,而第二个等号右边的求导均是对观测者时间所做,这里用到了关系式

$$\frac{\mathbf{n} \times [(\mathbf{n} - \boldsymbol{\beta}) \times \dot{\boldsymbol{\beta}}]}{(1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta})^2} = \frac{d}{dt'} \left[\frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right],$$

以及由 (1) 式求导得到的微分关系

$$\frac{dt}{dt'} = 1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}. \quad (8)$$

有了 (7) 式我们可以用对应关系

$$\frac{d}{dt} \rightarrow -i\omega$$

做 Fourier 变换,得到对应辐射频率下的场

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\omega}(\mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) e^{i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \left\{ \frac{e}{cR} (-i\omega) \frac{\mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta})}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} + \frac{1}{c^2 R} \right. \\ &\quad \left. \times (-i\omega)^2 \frac{\mathbf{n} \times [\boldsymbol{\mu} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\mu})]}{1 - \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\beta}} \right\} e^{i\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{i\omega e^{i\omega|x|/c}}{c^2 R} \int \left\{ e c \mathbf{n} \times (\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) \right. \\ &\quad \left. - i\omega \mathbf{n} [\boldsymbol{\mu} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\mu})] \right\} \\ &\quad \times e^{i\omega[t' - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e(t')}{c}]} dt'. \end{aligned} \quad (9)$$

这里我们再次忽略了对 $1/R$ 的求导,并用到了微分关系 (8) 以及近似 $R(t') \simeq |x| - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e(t')$.

对于电磁辐射,其频谱分布可由

$$\frac{dI}{d\Omega}(\omega) = \frac{c}{2\pi} |R\mathbf{E}_{\omega}|^2 \quad (10)$$

来计算, (10) 式给出了单位立体角, 单位频率间隔的辐射能量, 将 (9) 式代入即可得到考虑内禀磁矩影响后的相对论电子辐射频谱公式

$$\frac{dI}{d\Omega}(\omega) = \frac{\omega^2}{4\pi^2 c^3} \left| \int \mathbf{n} \times \{ ec(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) - i\omega[\boldsymbol{\mu} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\mu})] \} \times e^{i\omega[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e(t)}{c}]} dt \right|^2, \quad (11)$$

这里我们省略掉了推迟时间 t' 上的撇号。

(11) 式表示计入磁矩影响的相对论电子的辐射频谱分布. 大括号中的两项分别对应于电荷与磁矩的贡献, 其中磁矩项前面有一个位相差因子 $-i$. 事实上, (11) 式也可以用来计算任意带电荷和磁矩的粒子的辐射频谱分布.

3 计入磁矩修正的电子同步辐射频谱

下面来探讨在匀强磁场中作匀速圆周运动的相对论电子的同步辐射, 利用 (11) 式可以计算计入电子磁矩影响后的同步辐射频谱. 为了计算方便, 先引入图 1 所示的坐标系, 使得电子轨道位于 x - y 平面内, 轨道半径为 ρ , 匀强外磁场 $\mathbf{B} = B_0 \mathbf{k}$ 沿 z 轴. 由轨道的对称性, 取轨道上任一点为原点, 并使 x 轴沿这一点处的电子运动方向, y 轴指向轨道圆心, 并取观测方向 \mathbf{n} 在 z - x 平面内且与 x 轴夹角为 θ . 选择时间原点使得 $t = 0$ 时电子恰好在原点.

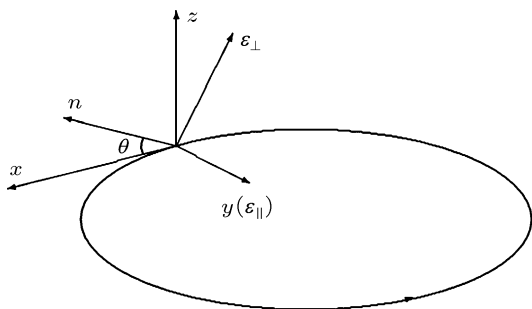


图 1 电子的圆形轨道和建立的坐标系

由磁矩在电磁场中运动的 BMT 方程^[16] 可知, 在匀强磁场中电子磁矩的演化应满足 Larmor 进动方程

$$\frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} = -\frac{|e|g}{2mc\gamma} \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B},$$

取 g 因子为 2, 则可解得磁矩按

$$\boldsymbol{\mu} = \mu_{\parallel} \cos(\Omega t + \varphi_0) \mathbf{i} + \mu_{\parallel} \sin(\Omega t + \varphi_0) \mathbf{j} + \mu_{\perp} \mathbf{k}$$

的形式绕磁场方向进动, 其中 μ_{\perp} 和 μ_{\parallel} 分别表示 $\boldsymbol{\mu}$ 垂直于和平行于轨道平面的分量大小, φ_0 为进动的初始相位, 进动角频率 Ω 定义为

$$\Omega = \frac{|e|B_0}{mc\gamma} = \frac{v}{\rho} = \beta \frac{c}{\rho},$$

恰与电子匀速转动的角频率相同。

对于给定的观测方向 \mathbf{n} , 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\parallel} = \mathbf{j}$ 为 y 方向的单位矢量, 它对应于轨道平面内的偏振; 令 $\boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} = \mathbf{n} \times \mathbf{j}$ 为近似垂直于轨道平面的偏振方向. 于是电子的速度 $\boldsymbol{\beta}$ 和磁矩 $\boldsymbol{\mu}$ 可以表示为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} &= \beta \cos(\Omega t) \cos \theta \mathbf{n} - \beta \cos(\Omega t) \sin \theta \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} \\ &\quad + \beta \sin(\Omega t) \boldsymbol{\varepsilon}_{\parallel}, \\ \boldsymbol{\mu} &= [\mu_{\parallel} \cos(\Omega t + \varphi_0) \cos \theta + \mu_{\perp} \sin \theta] \mathbf{n} \\ &\quad + [-\mu_{\parallel} \cos(\Omega t + \varphi_0) \sin \theta + \mu_{\perp} \cos \theta] \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} \\ &\quad + \mu_{\parallel} \sin(\Omega t + \varphi_0) \boldsymbol{\varepsilon}_{\parallel}. \end{aligned}$$

由于 \mathbf{n} 方向的辐射主要来自于电子在原点附近的一小段轨道上的贡献, 其对应的轨道张角约为 $1/\gamma$ 量级; 并且辐射主要集中在 $\theta \sim 1/\gamma$ 的角度范围内; 我们可以取到 $1/\gamma^2$ 的近似, 得到 (11) 式中积分号下的向量部分

$$\begin{aligned} &\mathbf{n} \times \{ ec(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) - i\omega[\boldsymbol{\mu} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\mu})] \} \\ &\approx ec \left(-\frac{ct}{\rho} \boldsymbol{\varepsilon}_{\parallel} + \theta \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp} \right) - i\omega \left[\mu_{0x} \theta - \mu_{0y} \theta \frac{ct}{\rho} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu_{\perp}}{2} \left(\theta^2 - \frac{1}{\gamma^2} - \frac{c^2 t^2}{\rho^2} \right) \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{\parallel} \\ &\quad - i\omega \left[\mu_{0x} \frac{ct}{\rho} + \frac{\mu_{0y}}{2} \left(\theta^2 + \frac{1}{\gamma^2} - \frac{c^2 t^2}{\rho^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \mu_{\perp} \theta \frac{ct}{\rho} \right] \boldsymbol{\varepsilon}_{\perp}, \end{aligned} \quad (12)$$

以及位相部分

$$\begin{aligned} \omega \left(t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e(t)}{c} \right) &= \omega \left[t - \frac{\rho}{c} \sin \left(\frac{vt}{\rho} \right) \cos \theta \right] \\ &\approx \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{\gamma^2} + \theta^2 \right) t + \frac{\omega c^2}{6\rho^2} t^3. \end{aligned} \quad (13)$$

(12) 式中的 $\mu_{0x} = \mu_{\parallel} \cos \varphi_0$, $\mu_{0y} = \mu_{\parallel} \sin \varphi_0$ 分别为零时刻电子磁矩的分量.

将 (12), (13) 式代入 (11) 式中的积分, 利用 Airy 积分可以算得

$$\begin{aligned} &\int \mathbf{n} \times \{ ec(\mathbf{n} \times \boldsymbol{\beta}) - i\omega[\boldsymbol{\mu} + \mathbf{n} \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\mu})] \} \\ &\quad \times e^{i\omega[t - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_e(t)}{c}]} dt \\ &\approx -\frac{\sqrt{3}\gamma^3}{\omega_c} \{ \omega \mu_{0y} \theta \delta^2 K_{2/3}(\xi) + i [ec \delta^2 K_{2/3}(\xi)] \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \omega \theta \delta (\mu_{0x} + \theta \mu_{\perp}) K_{1/3}(\xi) \} \varepsilon_{\parallel} + \frac{\sqrt{3} \gamma^3}{\omega_c} \\
 & \times \{ [ec \theta \delta K_{1/3}(\xi) + \omega (\mu_{0x} + \theta \mu_{\perp}) \delta^2 K_{2/3}(\xi)] \\
 & - i \omega \mu_{0y} \delta^3 K_{1/3}(\xi) \} \varepsilon_{\perp},
 \end{aligned}$$

其中

$$\omega_c = \frac{3c}{2\rho} \gamma^3$$

为特征频率, $K_{1/3}$, $K_{2/3}$ 为修正 Bessel 函数, δ 和 ξ 分别定义为

$$\delta = (1 + \gamma^2 \theta^2)^{1/2} / \gamma$$

和

$$\xi = \frac{\omega}{2\omega_c} (1 + \gamma^2 \theta^2)^{3/2}.$$

将该积分代入 (11) 式就可以得到两个偏振方向上的辐射频谱角分布分别为

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_{\parallel}}{d\Omega}(\omega) &= \frac{3e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \gamma^6 \delta^4 \\
 & \times \left\{ \frac{\omega^2 \mu_{0y}^2}{e^2 c^2} \theta^2 K_{2/3}^2(\xi) + \left[K_{2/3}(\xi) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\omega (\mu_{0x} + \theta \mu_{\perp}) \theta}{ec} \frac{\theta}{\delta} K_{1/3}(\xi) \right]^2 \right\}, \\
 \frac{dI_{\perp}}{d\Omega}(\omega) &= \frac{3e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \gamma^6 \delta^4 \left\{ \left[\frac{\theta}{\delta} K_{1/3}(\xi) \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\omega (\mu_{0x} + \theta \mu_{\perp})}{ec} K_{2/3}(\xi) \right]^2 \right. \\
 & \left. + \frac{\omega^2 \mu_{0y}^2}{e^2 c^2} \delta^2 K_{1/3}^2(\xi) \right\}.
 \end{aligned}$$

注意, 由于 Lorentz 变换式 (5), 上式中的 μ_{0y} 和 μ_{\perp} 比 μ_{0x} 大一个量级 γ . 由于磁矩项对电荷项的相对大小约为 $\frac{\omega \mu}{ec}$ 量级, 是相对小量, 我们可以只保留电荷与磁矩的交叉项作为磁矩修正项, 从而得到

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_{\parallel}}{d\Omega}(\omega) &= \frac{3e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \gamma^2 (1 + \gamma^2 \theta^2)^2 K_{2/3}(\xi) \\
 & \times \left[K_{2/3}(\xi) + \frac{2\omega (\mu_{0x} + \theta \mu_{\perp})}{ec} \right. \\
 & \left. \times \frac{\gamma \theta}{\sqrt{1 + \gamma^2 \theta^2}} K_{1/3}(\xi) \right], \quad (14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_{\perp}}{d\Omega}(\omega) &= \frac{3e^2}{4\pi^2 c} \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right)^2 \gamma^2 (1 + \gamma^2 \theta^2)^2 K_{1/3}(\xi) \\
 & \times \left[\frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} K_{1/3}(\xi) + \frac{2\omega (\mu_{0x} + \theta \mu_{\perp})}{ec} \right. \\
 & \left. \times \frac{\gamma \theta}{\sqrt{1 + \gamma^2 \theta^2}} K_{2/3}(\xi) \right].
 \end{aligned}$$

该式表明, 磁矩对两个偏振方向的修正是相同的, 且主要修正项为电荷与磁矩的耦合所引起; 或者说, 由电荷圆周运动的电流与电子磁矩的相互作用辐射的能量远大于磁矩本身与外磁场作用的辐射能.

由 (14) 式还可看出, 修正项对于电荷项的相对大小约为 $\omega \mu_B / ec$ 量级, 可见对于相对论性电子的同步辐射, 磁矩的修正一般来说是很小的, 只有在短波长的情形才需考虑. 考虑 SPring-8 储存环这一目前世界上特征波长最短的同步辐射人工光源, 在其特征频率 ω_c 处 ($\hbar \omega_c = 28.9 \text{ keV}$), 磁矩修正项对电荷项的相对大小约为 $2\omega_c \mu_B / ec = \hbar \omega_c / m_e c^2 = 28.9 / 511 \approx 6\%$. 可见, 此时计算同步辐射的自旋修正是有必要的. 如果特征波长极短, 如某些天体物理中的辐射, 磁矩项会更为显著, 这时除了 (14) 式保留的交叉项外, 还要考虑纯磁矩项.

4 计入磁矩修正的电子同步辐射能量角分布和频率分布

辐射能量的角分布可由

$$\frac{dI}{d\Omega} = \int_0^{\infty} \frac{dI}{d\Omega}(\omega) d\omega \quad (15)$$

来计算. 将 (14) 式代入 (15) 式, 并利用修正 Bessel 函数的 Airy 积分公式可对频率积分计算得

$$\begin{aligned}
 \frac{dI_{\parallel}}{d\Omega} &= \frac{7e^2}{16\rho} \frac{\gamma^5}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^{5/2}} \\
 & \times \left[1 + \frac{5(\mu_{0x} + \theta \mu_{\perp})}{e\rho} \frac{\gamma^4 \theta}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right], \\
 \frac{dI_{\perp}}{d\Omega} &= \frac{7e^2}{16\rho} \frac{\gamma^5}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^{5/2}} \left[\frac{5}{7} \frac{\gamma^2 \theta^2}{1 + \gamma^2 \theta^2} \right. \\
 & \left. + \frac{5(\mu_{0x} + \theta \mu_{\perp})}{e\rho} \frac{\gamma^4 \theta}{(1 + \gamma^2 \theta^2)^2} \right], \quad (16)
 \end{aligned}$$

(16) 式便是对应于两个偏振方向上的辐射能量的角分布.

而对于辐射能量的频率分布

$$I(\omega) = \int \frac{dI}{d\Omega}(\omega) d\Omega,$$

则需要对 (14) 式作角度积分. 由于能量主要集中在很小的 θ 角范围内, 从而该积分可近似写为

$$I(\omega) \approx 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dI}{d\Omega}(\omega) d\theta, \quad (17)$$

将 (14) 式分别代入 (17) 式, 还是利用修正 Bessel 函数的 Airy 积分公式可计算得

$$I_{\parallel}(\omega) = \frac{\sqrt{3} e^2 \gamma}{2c} \left[F_1 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) + \frac{2\mu_{\perp} \gamma^2}{e\rho} F_3 \left(\frac{\omega}{\omega_c} \right) \right],$$

$$I_{\perp}(\omega) = \frac{\sqrt{3}e^2\gamma}{2c} \left[F_2\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) + \frac{2\mu_{\perp}\gamma^2}{e\rho} F_3\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \right], \quad (18)$$

$$\begin{aligned} I(\omega) &= I_{\parallel}(\omega) + I_{\perp}(\omega) \\ &= \frac{\sqrt{3}e^2\gamma}{c} \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \\ &\quad \times \left\{ \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi + \frac{2\mu_{\perp}\gamma^2}{e\rho} \right. \\ &\quad \left. \times \left[2K_{2/3}(\omega/\omega_c) - \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi \right] \right\}. \end{aligned}$$

其中函数 F_1, F_2, F_3 分别定义为

$$F_1(x) = x \left[\int_x^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi + K_{2/3}(x) \right],$$

$$F_2(x) = x \left[\int_x^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi - K_{2/3}(x) \right],$$

$$F_3(x) = x \left[2K_{2/3}(x) - \int_x^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi \right].$$

可以看到, (18) 式中频率分布只与沿磁场方向的磁矩分量有关. 如果 $\mu_{\perp} = 0$, 则 (18) 式又变回标准的同步辐射频谱分布. 如果磁矩垂直于轨道平面, 则 $\mu_{\perp} = -\gamma\mu_B$, 此时的磁矩修正也是最明显. 应用 SPring-8 参数按 (18) 式可计算电子磁矩完全沿磁场方向时的频谱分布如图 2.

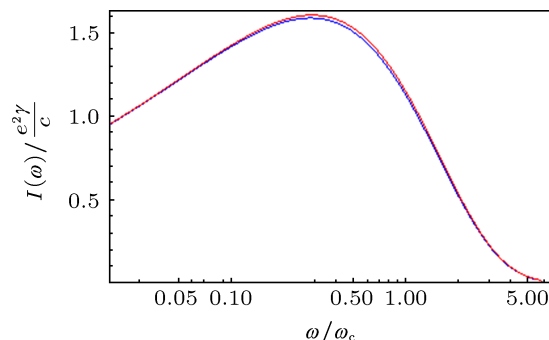


图 2 用 Spring-8 参数算得的频谱分布, 蓝线为不考虑磁矩修正的辐射谱, 红线为含磁矩修正的辐射谱. 频率以特征频率 ω_c 为单位来表示, 能量分布以 $e^2\gamma/c$ 为单位

5 储存环电子束极化度与辐射光偏振度的关系

对于储存环上极化度为 P 的电子束, 假设其中自旋方向与磁场方向相同和相反的电子数分别为 N^+ 和 N^- , 则辐射光的偏振度为

$$T = \frac{N^+I_{\parallel}^+ + N^-I_{\parallel}^- - N^+I_{\perp}^+ - N^-I_{\perp}^-}{N^+I_{\parallel}^+ + N^-I_{\parallel}^- + N^+I_{\perp}^+ + N^-I_{\perp}^-}, \quad (19)$$

此处的“+”, “-”分别表示电子自旋与磁场方向相同和相反. 利用 (18) 式, 并考虑到 $P = \frac{N^+ - N^-}{N^+ + N^-}$, 可以得到

$$T = \frac{K_{2/3}(\omega/\omega_c)}{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi + P \frac{2}{3} \frac{\hbar\omega_c}{m_e c^2} \left[2K_{2/3}(\omega/\omega_c) - \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi \right]},$$

及其等价形式

$$P = \frac{3m_e c^2}{2\hbar\omega_c} \frac{K_{2/3}(\omega/\omega_c)}{2K_{2/3}(\omega/\omega_c) - \int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi} - \frac{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi}{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(\xi) d\xi}.$$

这两个式子给出了电子束极化度与同步辐射光偏振度的关系.

用 SPring-8 参数可算得在其特征频率处电子束极化度 P 与同步辐射光偏振度 T 之间的函数关系如图 3. 从图 3 可以看出, 辐射光偏振度的变化是很小的, 而且与电子束极化度几乎呈线性关系. 利用该关系有望通过对辐射偏振度的精确测量来推断电子束极化度.

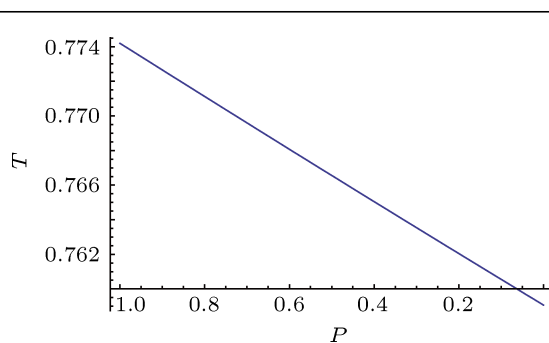


图 3 电子束极化度 P 与同步辐射光偏振度 T 之间的函数关系 (用 SPring-8 参数算得)

6 结论

计入磁矩影响, 我们考察了电子辐射频谱分布, 并计算了计入磁矩修正后的同步辐射. 计算表明, 通常的同步辐射光源不必考虑电子磁矩的影响. 然

而, 对于能量较高, 辐射特征波长较短的储存环中运动电子的辐射, 电子磁矩的影响将是可观的. 我们导出了同步辐射偏振度与电子束极化间的依赖关系, 该关系表明, 通过高精度的测量光场偏振度

可以获得电子束极化的信息.

我们感谢何多慧院士的支持和有益的建议. 作者之一(张鹏飞)感谢与郑坚教授和王沛教授的讨论和帮助.

-
- [1] Jackson J D 1998 *Classical Electrodynamics* (3rd Edn.) (New York: Wiley) p676
 - [2] Schott G A 1912 *Electromagnetic Radiation and the Mechanical Reactions Arising from it* (Cambridge: Cambridge Univ. Press) p213
 - [3] Tzu H Y 1947 *Proc. R. Soc. Lond. A* **192** 231
 - [4] Schwinger J 1949 *Phys. Rev.* **75** 1912
 - [5] Kim K J 1989 *AIP Conf. Proc.* **184** 565
 - [6] Wang C X 1993 *Phys. Rev. E* **47** 4358
 - [7] Lindhard J 1991 *Phys. Rev. A* **43** 6032
 - [8] Khokonov M Kh, Nitta H 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 094801
 - [9] Patterson B D 2011 *Am. J. Phys.* **79** 1046
 - [10] Nakamura K (Particle Data Group) 2010 *J. Phys. G* **37** 075021
 - [11] Klein J J 1968 *Rev. Mod. Phys.* **40** 523
 - [12] Kuznetsov A S 1993 *Europhys. Lett.* **21** 545
 - [13] Monaghan J J 1968 *J. Phys. A* **1** 112
 - [14] Heras J A 1994 *Am. J. Phys.* **62** 1109
 - [15] Heras J A 1998 *Phys. Rev. E* **58** 5047
 - [16] Jackson J D 1998 *Classical Electrodynamics* (3rd Edn.) (New York: Wiley) p561

Modification from the spin to the synchrotron radiation from a relativistic electron*

Li Yi-Ding^{1)†} Zhang Peng-Fei²⁾ Zhang Hui¹⁾ Xu Hong-Liang¹⁾

1) (National Synchrotron Radiation Laboratory, University of Science and Technology of China, Hefei 230029, China)

2) (CAS Key Laboratory of Basic Plasma Physics, Department of Modern Physics, University of Science and Technology of China, Hefei 230029, China)

(Received 27 August 2012; revised manuscript received 2 December 2012)

Abstract

An explicit expression for the spectral distribution of the radiation energy from a relativistic electron with a magnetic moment is derived. Consequentially for an extreme relativistic electron moving along a planar circular orbit, the spectral distributions of synchrotron radiation in σ - and π - polarization are calculated including the modification from electron's magnetic moment. It is shown that for the synchrotron radiation with high critical frequency ω_c with $\hbar\omega_c \geq 10$ keV, the modification may be considerable. The relationship between the polarization of synchronous electrons and radiation fields is obtained, and thus the information about spin polarization of electron beam from measuring the polarization of radiation fields is provided.

Keywords: synchrotron radiation, intrinsic spin of electron, polarization of synchrotron radiation, electron beam polarization

PACS: 41.60.-m, 41.60.Ap

DOI: 10.7498/aps.62.094103

* Project supported by the Foundation of National Key Program for Basic Research of China (Grant No. 2001CCB01000), and the ITER-China Program (Grant No. 2010GB107001).

† Corresponding author. E-mail: liyd@mail.ustc.edu.cn