

固体粗糙界面与超声的非线性相互作用研究*

肖齐 王琚 郭霞生 章东†

(近代声学教育部重点实验室, 南京大学声学研究所, 南京 210093)

(2012年11月12日收到; 2012年12月21日收到修改稿)

本文提出了一种随机弹性接触界面与超声的非线性相互作用理论. 首先建立了描述随机弹性接触界面的模型, 然后分别研究了界面间应力-应变关系在线性简化模型、指数模型、高斯模型下与超声的非线性相互作用. 数值仿真和实验研究结果均表明高斯模型更适合描述固体接触界面. 本文在介观结构上解释了固体界面与超声的相互作用, 对工业超声无损检测裂缝、缺陷及损伤有指导意义.

关键词: 超声无损检测, 固体粗糙界面, 非线性效应

PACS: 43.25.+y, 43.35.+d

DOI: 10.7498/aps.62.094301

1 引言

超声波与粗糙固体界面的相互作用研究, 对于材料粘接界面或者材料内部的裂缝、缺陷、损伤的超声无损检测具有重要意义^[1]. 例如, 搅拌摩擦焊中“吻接”缺陷的检测、材料的应力腐蚀缺陷检测^[2,3]等. 对于弹性界面的建模, Hertz 最先对于相互接触的弹性球体做了探索性研究, 得到了两球体接近与加载的关系^[4]; Greenwood 和 Williamson 在 Hertz 理论的基础上, 引入材料表面粗糙峰高度的概率分布, 描述了粗糙界面与平滑界面之间的相互作用^[5]; Brown 和 Scholz 又在此研究基础上, 发展出了更具普适性的理论, 解决了两个粗糙界面间的相互作用问题^[6]. 另一方面, 在缺陷的超声无损检测研究中, 常用的技术是向待测材料发射超声并在其内部传播, 超声波与缺陷产生非线性相互作用, 从接收信号中提取非线性参量 (通常是二次谐波分量) 进行缺陷检测. Richardson 最先研究了平面声波与非粘合光滑界面的相互作用, 推导了运动方程以及反射波与入射波之间的关系^[7]; Wu 在此基础上引入了缺陷的“部分封闭”状态, 用理论和实验研究了粗糙的非粘合界面与超声波的非线性相

互作用^[2].

本文旨在将介观结构上粗糙界面之间的应力-应变关系和宏观现象上的声波与界面间的非线性作用相互关联, 使得宏观上的界面与超声的非线性相互作用在介观结构上得到解释, 从而为实际应用提供理论依据. 本文首先简化了 Brown-Scholz 模型并用之描述随机弹性接触界面, 然后分别研究了界面间应力-应变关系在线性模型、指数模型和高斯模型下超声的相互作用, 并通过数值仿真和实验研究进行验证和分析讨论.

2 理论模型

2.1 基本理论模型

根据 Brown-Scholz 模型^[6], 当两粗糙界面相互接触时 (图 1(a)), 实际接触的区域面积远小于两界面的实际平面面积. 当应力增加时, 已经接触的地方将会发生更大的形变, 并且新的接触区域也随之产生. 定义两个互相平行的参考平面, 距离为 Y , 每个界面相对于参考平面的高度分别为 z_1 和 z_2 . 为简化模型, 如图 1(b) 将每一点对应的高度相加, 得到连续函数 $z = z_1 + z_2$.

* 国家重点基础研究发展计划 (973 计划) (批准号: 2011CB707900), 国家自然科学基金 (批准号: 81127901, 11161120324, 11174141, 11104140), 江苏省自然科学基金 (批准号: BE2011110, BK2011543) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: dzhang@nju.edu.cn

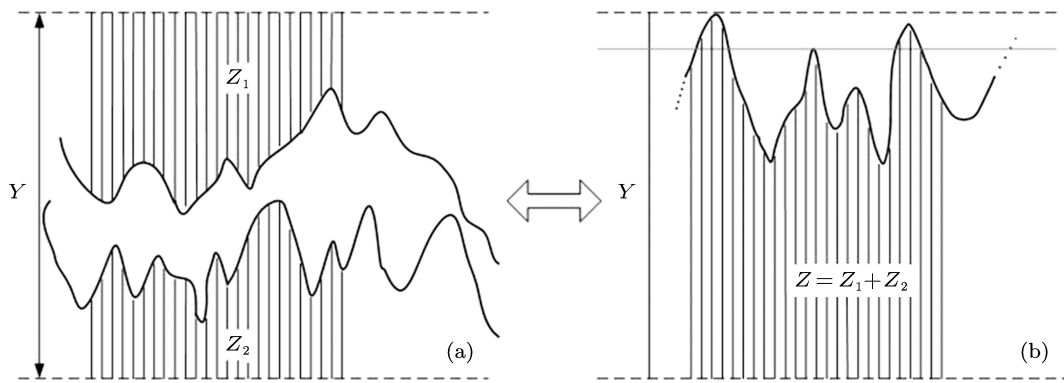


图1 粗糙界面横截面示意图

基于概率分布理论,可以得到粗糙接触界面正应力的表达式为

$$P = F/A_n = \frac{4}{3}\eta\langle E'\rangle\langle\beta^{1/2}\rangle\int_Y^\infty(z-Y)^{3/2}\varphi(z)dz, \quad (1)$$

其中 F 是两界面间的相互作用力; A_n 是总接触面积; η 为粗糙峰数量面密度; $\langle E'\rangle, \langle\beta^{1/2}\rangle$ 分别是 E' 和 $\beta^{1/2}$ 在整个接触界面上分布的平均值, 其中 $E', \beta^{1/2}$ 的关系式为 $1/E' = (1 - v_1^2)/E_1 + (1 - v_2^2)/E_2$, $1/\beta = 1/R_1 + 1/R_2$, E_1, v_1 和 E_2, v_2 分别是两界面材料的弹性常数, R_1, R_2 是对应的曲率半径; $\varphi(z)$ 是粗糙峰高度 z 的概率密度函数, 即若共有 N 个粗糙峰, 则高度在 $[z, z + dz]$ 范围内的粗糙峰数量为 $N\varphi(z)dz$.

为方便讨论, 将概率分布转化为标准概率分布, 设 $\varphi^*(s)$ 是粗糙峰高度的标准概率密度函数, 标准高度分布为 $y = (Y - \mu)/\sigma$, 其中 μ 是均值, σ 是标准差, 则有 $s = (z - \mu)/\sigma$. 同时应用概率密度与标准概率密度的关系, 有

$$\frac{1}{\sigma}\varphi^*(s) = \frac{1}{\sigma}\varphi^*\left(\frac{z - \mu}{\sigma}\right) = \varphi(z), \quad (2)$$

代入 (1) 式, 有

$$P = \frac{4}{3}\eta\langle E'\rangle\langle\beta^{1/2}\rangle\sigma^{3/2}\int_y^\infty(s-y)^{3/2}\varphi^*(s)ds. \quad (3)$$

为考虑上述粗糙界面上有超声波入射时的响应 (如图 2), 假设平面声波法向入射, 则求解过程可以简化为一维波动问题. 令质点位移 $u = u(x, t)$, 界面材料为各项同性, 弹性常数为 λ 和 μ , 则运动方程为^[2]

$$\rho\partial^2u(x, t)/\partial t^2 = \partial\sigma(x, t)/\partial x, \quad (4)$$

其中 ρ 是密度, σ 是应力. 当外加静压力 P_0 时, 应力 - 应变关系为

$$\begin{aligned} \sigma(x, t) &= (\lambda + 2\mu)\partial u(x, t)/\partial x - P_0 \\ &= \kappa\partial u(x, t)/\partial x - P_0. \end{aligned} \quad (5)$$

由 (4) 及 (5) 式可得波动方程

$$\partial^2u(x, t)/\partial t^2 = c^2\partial^2u(x, t)/\partial x^2, \quad (6)$$

式中, c 为波速, 且 $c^2 = \kappa/\rho$.

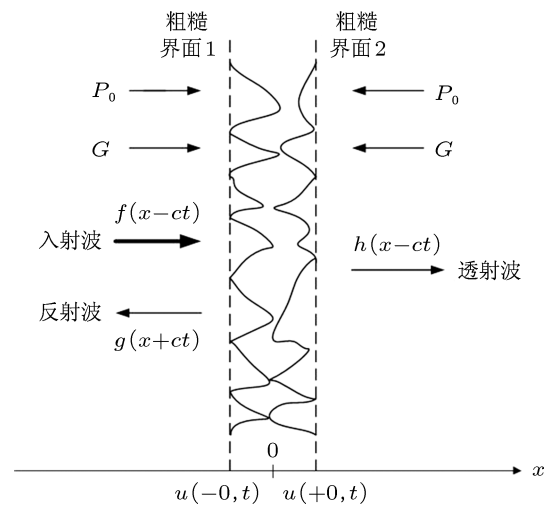


图2 声波与界面相互作用示意图

Richardson^[7] 和 Wu^[2] 得到超声波透射粗糙界面时的运动方程

$$\rho c\dot{Y}(t) = 2G(Y) - 2F(t), \quad (7)$$

其中, Y 是两界面参考平面之间的距离, $Y = u(+0, t) - u(-0, t)$, 在有声波透射时随时间变化; G 是界面上的动态应力, 定义为

$$G(Y) = -\kappa\partial u(0, t)/\partial x;$$

F 是由于入射波产生的单位面积上的驱动力, 定义为

$$F(t) = -\kappa f'(-ct) = -\kappa \partial f(x-ct)/\partial x|_{x=0},$$

式中 $f(x-ct)$ 表示平面波的质点位移.

结合界面应力与应变的关系式 (3) 和界面在声波作用下的运动方程式 (7), 可以求解不同开闭状态 [2] 下界面的响应, 包括: 1) 完全关闭; 2) 部分关闭; 3) 完全打开. 如果激励为正弦信号, 即: $f(x-ct) = -A \sin[k(x-ct)]$, 其中 k 是波数, A 是幅值, 则驱动力 $F(t)$ 可表示为 $F(t) = B \cos(\omega t)$, 式中 $B = \rho c \omega A$.

1) 界面完全关闭状态时, 两界面参考平面紧密重合, 距离为零, 即 $Y(t) = 0, G(Y) = F(t)$.

2) 界面完全打开状态时, 界面间应力消失, 即 $\sigma(\pm 0, t) = -G(Y) - P_0 = 0$, 于是 $G(Y) = -P_0$. 考虑在初始时刻 t_0 到某一时刻 t 内, 由 (7) 式可以得到

$$\rho c Y(t) = \rho c Y(t_0) + \int_{t_0}^t d\tau 2G(Y) - \int_{t_0}^t d\tau 2F(\tau), \quad (8)$$

其解为

$$Y(t) = -2A[\eta \omega t + \sin \omega t - C_0], \quad (9)$$

式中 $\eta = P_0/B, C_0$ 是一个任意常数, 由当界面从部分关闭到完全打开时的初始条件所决定.

3) 界面在部分关闭状态, Wu [2] 对界面间应力与应变关系 $G(Y)$ 进行了简化, 假设粗糙界面符合线性硬度, 则有

$$G(Y) = -\kappa_0[Y(t) - Y_0], \quad (10)$$

代入 (7) 式, 可解得

$$Y(t) = \frac{-2\omega A}{\xi^2 + \omega^2} [\xi \cos(\omega t) + \omega \sin(\omega t) + \exp(-\xi t) C_P] + Y_0. \quad (11)$$

反射波和透射波可表示为

$$g(x+ct) = -\frac{1}{2} Y \left(t + \frac{x}{c} \right) \\ h(x-ct) = f(x-ct) + \frac{1}{2} Y \left(t - \frac{x}{c} \right). \quad (12)$$

但是界面在宏观上的弹性特性是由其介观界面结构所决定的, 这种线性简化条件下所得的结果不准确. 为了能更好地反映界面的介观结构, 本文利用粗糙界面应力应变的关系 (3) 式, 并结合界面粗糙峰分布的指数模型和高斯模型来求解.

2.2 指数模型

根据固体材料表面地形学的研究 [5,6,8], 可以用指数模型来表述界面的概率分布. 令粗糙峰高度的标准概率密度为 $\varphi^*(s) = e^{-s}$, 代入 (3) 式并化简得

$$P = \pi^{1/2} \eta \langle E' \rangle \langle \beta^{1/2} \rangle \sigma^{3/2} e^{-\gamma}. \quad (13)$$

又因为界面上的动态应力为 $G(Y) = P(Y) - P(Y_0)$, 结合 (13) 式, 可将运动方程 (7) 化简为

$$\dot{y} = M e^{-y} + N \cos(\omega t) + P, \quad (14)$$

式中

$$M = \frac{2\pi^{1/2} \eta \langle E' \rangle \langle \beta^{1/2} \rangle}{\sigma^{1/2} \rho c}, \\ N = -\frac{2B}{\rho c \sigma}, \\ P = -\frac{2P(Y_0)}{\rho c \sigma}.$$

(14) 式的解为

$$Y(t) = -\sigma \ln \frac{x(t)}{C_P + M \int x(t) dt}, \quad (15)$$

其中 $x(t) = e^{-P - (N/\omega) \sin(\omega t)}$, C_P 是由界面从 1) 完全关闭到部分关闭或 2) 完全打开到部分打开时的初始条件所决定.

对于大多数固体, 有 $x(t) \rightarrow \infty$, 于是可以进一步化简得到

$$Y(t) = -\sigma \ln \left(\frac{1}{\frac{C_P}{x(t)} + M \frac{\left(\int x(t) dt \right)'}{(x(t))'}} \right) \\ = \sigma \ln \left(\frac{C_P}{x(t)} + \frac{M}{-P - N \cos(\omega t)} \right). \quad (16)$$

即指数模型下, 界面处于部分关闭状态时的相对位移的解.

2.3 高斯模型

指数模型还不足以精确描述一般界面粗糙峰高度的概率分布, 根据有关固体表面地形学的实验发现 [5,6,8,9], 固体表面的粗糙峰分布非常接近于高斯分布. 因此, 令粗糙峰高度的标准概率密度为 $\varphi^*(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(1/2)s^2}$, 代入 (3) 式并化简得

$$P = \frac{4}{3} \eta \langle E' \rangle \langle \beta^{1/2} \rangle \sigma^{3/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ \times \int_y^\infty (s-y)^{3/2} e^{-(1/2)s^2} ds. \quad (17)$$

界面上的动态应力仍为 $G(Y) = P(Y) - P(Y_0)$, 结合 (17) 式, 可将运动方程 (7) 化简为

$$\dot{y} = M' \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^\infty (s-y)^{3/2} e^{-(1/2)s^2} ds + N' \cos(\omega t) + P', \quad (18)$$

式中

$$M' = \frac{8}{3} \frac{\eta \langle E' \rangle \langle \beta^{1/2} \rangle \sigma^{1/2}}{\rho c},$$

$$N' = -\frac{2B}{\rho c \sigma},$$

$$P' = -\frac{2P(Y_0)}{\rho c \sigma}.$$

方程 (18) 是非线性一阶微分方程, 理论上不能求得解析解, 因此需要利用数值方法求解.

3 仿真实验

本文对在线性简化模型、指数模型、高斯模型下, 声波与界面的相互作用进行数值仿真. 仿真实验中使用铜作为两界面的材料, 其密度 $\rho = 8960 \text{ kg/m}^3$, 声速 $c = 4600 \text{ m/s}$. 设两界面在静压力 $P_0 = 0$ 时的相对距离为 $0.6 \text{ }\mu\text{m} (= Y_0 + \delta_0)$, 而当静压力 $P_0 = 25.9 \text{ MPa}$ 时, 初始相对接近距离 $\delta_0 = 0.3 \text{ }\mu\text{m}$, 此时 $Y_0 = 0.3 \text{ }\mu\text{m}$. 激励信号为 30 周期的 0.5 MHz 正弦波, 其幅度 $A = 0.4 \text{ }\mu\text{m}$.

界面处于部分关闭状态时, 界面的动态应力 $G(Y)$ 与界面相对位移 $Y(t)$ 的关系在三种模型下有不同的表示. 线性简化模型由 (10) 式表示, 其中 $\kappa_0 = 9.632 \times 10^{13} \text{ N/m}^3$. 指数模型由 (13) 式表示, 取界面粗糙峰高度分布的标准差 $\sigma = 3 \times 10^{-7} \text{ m}$, 同时令 $\pi^{1/2} \eta \langle E' \rangle \langle \beta^{1/2} \rangle \sigma^{3/2} = 80 \text{ MPa}$. 而高斯模型由 (17) 式表示, 同样取 $\sigma = 3 \times 10^{-7} \text{ m}$, 并令 $(4/3) \eta \langle E' \rangle \langle \beta^{1/2} \rangle \sigma^{3/2} = 48 \text{ MPa}$.

方程 (18) 求解需采用数值方法, 对于求解数值积分 $\int_y^\infty (s-y)^{3/2} e^{-(1/2)s^2} ds$, 这里选用自适应 Gauss-Kronrod 积分方法 [10]. 微分方程求解, 使用 Dormand-Prince 方法 [11].

图 3 比较了三种模型下界面的动态应力 $G(Y)$ 与界面相对位移 $Y(t)$ 的关系. 可以看出, 三条曲线的趋势大致相同. 对于实际粗糙界面, 在其相对位移较大时, 相互接触的粗糙峰较少, 需要的应力越小; 而在其相对位移逐渐变小时, 接触的粗糙峰数

目将迅速增加, 需要的应力也将迅速增加. 与线性简化模型相比, 指数模型和高斯模型都更准确的定性描述界面的接触特性. 对于指数模型和高斯模型, 其对应曲线在 $[0.5, 0.6]$ 区间内差别不大, 但是从 0.5 变化到 0 的过程中差异程递增趋势, 这一结果也与 Brown [6] 和 Swan [8] 的研究结论基本相符合: 指数模型仅可近似表示最高 25% 的粗糙峰的概率分布, 而实际界面的粗糙峰分布更精确的符合高斯分布.

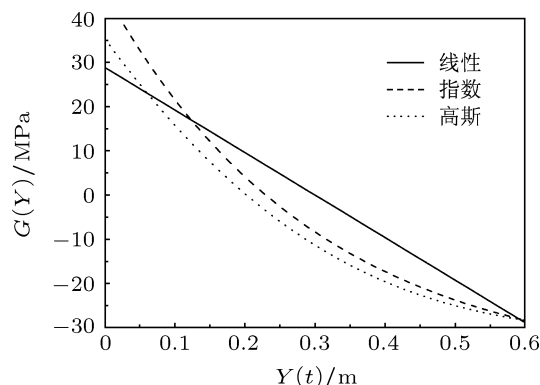


图 3 线性简化模型、指数模型、高斯模型下的界面动态应力 $G(Y)$ 与界面相对位移 $Y(t)$ 的关系

图 4 分别给出了线性简化模型、指数模型和高斯模型下的界面声波响应的归一化频谱 (对基波归一化). 三种模型下的透射谱中, 除了 0.5 MHz 的基频成分外, 在 1.0 MHz , 1.5 MHz 处均出现了二次、三次谐波分量. 但对于指数模型 (图 4(b)), 其透射波的谐波成分较多, 幅度较大, 说明其非线性相对比较显著; 对于高斯模型 (图 4(c)) 的高频特性相对于线性简化模型 (图 4(a)) 较为平坦.

4 实验结果

实验系统方框图如图 5 所示, 信号发生器 (Agilent 33250A, 美国) 产生 30 周期 0.5 MHz 正弦波信号, 通过功率放大器 (ENI2100L, 美国) 进行放大驱动发射换能器 (V302, Panametrics, 美国), 接收换能器 (V302, Panametrics, 美国) 接收的信号由数字示波器 (HP 54830A, 美国) 采样分析. 采用铜作为界面材料, 尺寸大小为 $15 \text{ mm} \times 15 \text{ mm} \times 5 \text{ mm}$. 为了模拟粗糙分布, 需要对界面做表面处理, 依次使用 $1000\#$, $1500\#$, $3000\#$, $5000\#$ 号砂纸对铜界面进行打磨处理.

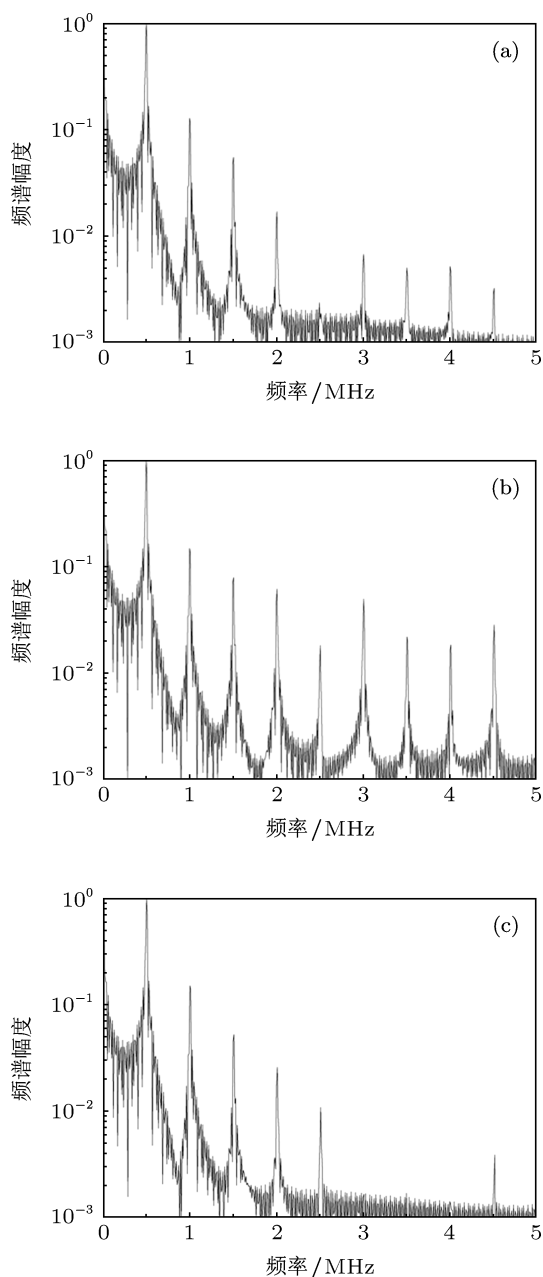


图4 透射信号频谱 (a) 线性模型; (b) 指数模型; (c) 高斯模型

图6表示的是透过两片铜界面的声波频谱,可以明显看出频谱成分中出现了1 MHz和1.5 MHz的二次、三次谐波分量.因此粗糙界面的存在导致了透射声波的非线性.将实验得到的透射声波频谱(图6)与前面数值计算的结果(图4)对比发现,实验结果与高斯模型得到的结果可以定性的符合,实际界面的粗糙峰分布基本符合高斯分布^[8].

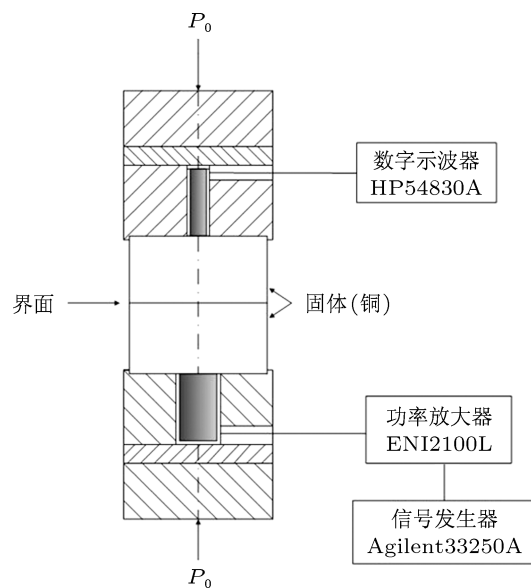


图5 实验系统方框图

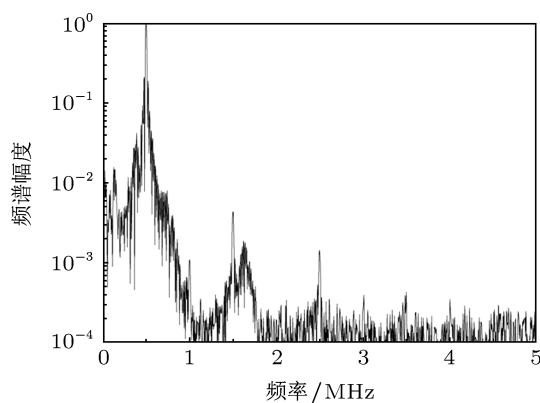


图6 透射声波频谱

5 结论

线性模型是一种简化处理的方法,定义了界面动态应力是界面相对位移的线性函数,方便理论求解.但是模型过于简单,不能真实反映界面的介观参量与宏观状态(完全关闭、部分关闭、完全打开)的关系.指数模型和高斯模型都是基于介观尺度上界面的粗糙峰的高度分布,通过统计学的理论,推导出宏观上界面动态应力与界面相对位移的关系,不仅得到的结果更加接近真实情况,而且还成为了将介观结构与宏观现象联系起来的纽带,使得宏观上的三种不同状态的产生机理,从界面的介观结构上得到了解释.

- [1] Baltazar A, Rokhlin S I, Pecorari C 2002 *J. Mech. Phys. Solids* **50** 1397
- [2] Wang J S, Xu X D, Liu X J, Xu G C 2008 *Acta Phys. Sin.* **12** 7765 (in Chinese) [王敬时, 徐晓东, 刘晓峻, 许钢灿 2008 物理学报 **12** 7765]
- [3] Pecorari C 2003 *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 3065
- [4] Hertz H 1896 *Miscellaneous papers* (London: Macmillan) p146
- [5] Greenwood J A, Williamson J B P 1966 *Proc. R. Soc. London A* **295** 300
- [6] Brown S R, Scholz C H 1985 *J. Geophys. Res.* **90** 5531
- [7] Richardson J M 1979 *Int. J. Eng. Sci.* **17** 73
- [8] Swan G 1983 *Rock Mechanics and Rock Engineering* **16** 19
- [9] Adler R J, Firman D 1981 *Philos. Trans. R. Soc. London A* **303** 433
- [10] Shampine L F 2008 *Journal of Computational and Applied Mathematics* **211** 131
- [11] Dormand J R, Prince P J 1980 *J. Comp. Appl. Math.* **6** 19

Nonlinear interaction between ultrasound and solid rough interface*

Xiao Qi Wang Jun Guo Xia-Sheng Zhang Dong[†]

(Key Lab of Modern Acoustics (MOE), Institute of Acoustics, Nanjing University, Nanjing 210093, China)

(Received 12 November 2012; revised manuscript received 21 December 2012)

Abstract

The interaction of ultrasound with an interface between two rough surfaces in contact has become a quite popular topic in many areas related to non-destructive evaluation (NDE). We proposed a theory of ultrasonic nonlinear interaction between some random rough elastic interfaces. The model of random elastic-contact interface is first described, and then the nonlinear ultrasonic interaction of interfaces with stress-strain relationship is studied, by using different models including linear simplified model, exponential model, and Gaussian model. Results of numerical simulations and experiments demonstrate that the Gaussian model is more suitable for describing the solid rough interfaces. This study provides an explanation of the ultrasonic interaction on mesoscopic level, which is a theoretical basis for practical application to detect cracks, defects and injuries in industrial ultrasonic NDE.

Keywords: ultrasonic non-destructive evaluation, solid rough interface, nonlinear effect

PACS: 43.25.+y, 43.35.+d

DOI: 10.7498/aps.62.094301

* Project supported by the National Basic Research Program of China (Grant No. 2011CB707900), the from National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 81127901, 11161120324, 11174141, 11104140), and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province of China (Grant Nos. BE2011110, BK2011543).

[†] Corresponding author. E-mail: dzhang@nju.edu.cn