高阶非完整约束系统嵌入变分恒等式的积分变分原理*

宋端[1)†] 刘畅[2)] 郭永新[1)2)]

1) (辽东学院影像物理教研室, 丹东 118001)

2) (辽宁大学物理学院, 沈阳 110036)

(2012 年 11 月 30 日 收到; 2012 年 12 月 30 日 收到修改稿)

本文从高阶非完整系统嵌入变分恒等式的积分变分原理出发, 根据三种不等价条件变分的选取, 得到了高阶非完整系统的三类不等价动力学模型, 即高阶非完整约束系统的 vakonomic 方程、Lagrange-d'Alembert 方程和一种新的动力学方程. 当高阶非完整约束方程退化为一阶非完整约束时, 利用此理论可以得到一般非完整系统的 vakonomic 模型、Chetaev 模型和一种新的动力学模型. 最后借助于应用实例验证了结论的正确性.

关键词: 高阶非完整约束, 变分恒等式, 条件变分, vakonomic 动力学

PACS: 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.62.094501

1 引 言

分析力学在物理学、力学乃至工程技术领域具有极其广泛的应用. 尤其是在处理具有约束问题时, 分析力学发挥着最有效的作用. 然而应用经典的分析力学方法处理具有非完整约束的动力学问题时却遇到了许多困难和争议 [1−6]. 一般非完整系统由于受到一阶的不可积微分约束, 这类动力学系统不能约化为低维空间上的完整系统, 导致利用拉格朗日 - 达朗伯原理和嵌入约束的哈密顿原理会得到两种不等价的动力学模型, 即非完整力学模型和 vakonomic 模型, 这曾经引起国内外学者的激烈争议 [7−10]. 非完整系统到底依据什么基本原理, 采用何种研究方法最为有效都是非完整力学所关注的基本问题. 文献 [11] 从一种原理, 即利用嵌入变分恒等式的积分变分原理, 只是根据三种不等价的条件变分的选取, 得到了非完整系统的三种不等价动力学模型, 即 Chetaev 模型 (也称非完整力学模型)、vakonomic 模型 (也称变分非完整模型) 和一种新的动力学模型.

随着现代科学技术, 如自动控制、自动调节理论的发展, 对非完整系统的研究已经从一阶约束系统扩展到二阶及二阶以上的高阶非完整系统 [12−16]. 同时, 由于力学理论自身学科发展的需要, 也激发了人们对于高阶非完整系统的研究兴趣, 如关于高阶非完整系统的运动微分方程、高阶非完整系统的对称性与守恒量等 [17−20]. 然而, 通常研究高阶非完整系统的分析力学方法, 与研究一阶非完整系统的通常分析力学方法类似, 即分别从高阶拉格朗日 - 达朗伯原理和高阶哈密顿原理出发, 选择不同嵌入约束的方式和不同的变分运算, 得到高阶非完整系统的动力学方程 [19]. 这种从不同的变分原理和不同的拉格朗日乘子法出发, 得到不同动力学方程的方法, 虽然动力学方程无误, 但其理论的协调性显得不足. 因此, 高阶非完整系统的动力学建模能否依据一个统一形式的变分原理, 并采用一种嵌入约束的方式, 将动力学模型的不同归结为最简单明了的因素, 尽可能保持理论的协调性, 成为研究高阶非完整约束系统的基本问题之一. 本文将从一种基本原理出发, 即从高阶非完整约束系统

* 国家自然科学基金 (批准号: 11202090, 11172120, 10932002) 和辽宁省重点实验室建设项目 (批准号: 2008403009) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: songduan620606@163.com

嵌入变分恒等式的积分变分原理, 并根据高阶非完整约束系统的不等价条件变分的选取, 直接得到高阶非完整系统的不等价动力学模型.

本文中 $i, j = 1, 2, \cdots, n$; $\alpha, \beta = 1, 2, \cdots, g$; $\mu, \nu = g+1, g+2, \cdots, n$; $m = 1, 2, \cdots, k$.

2 一般非完整约束系统的不等价动力学模型

一般非完整系统受到的非完整约束方程为

$$f^{\alpha}(t, q^i, \dot{q}^i) = 0, \quad \alpha = 1, \cdots, g; i = 1, \cdots, n. \tag{1}$$

一阶非完整约束方程的变分恒等式为

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\left[\delta \dot{q}^i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^i)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right) - \delta f^{\alpha}(t, q^i, \dot{q}^i) + \left[\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\right]\delta q^i = 0. \tag{2}$$

由于约束的非完整性, 导致以下条件不等同时成立 [1,11]:

$$\delta \dot{q}^i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^i) = 0, \tag{3a}$$

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i = 0, \tag{3b}$$

$$\delta f^{\alpha}(t, q^i, \dot{q}^i) = 0. \tag{3c}$$

一般非完整系统嵌入变分恒等式恒等式的积分变分原理为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta L(t, q^i, \dot{q}^i) + \lambda_{\alpha}\left\{\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\left[\delta \dot{q}^i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta q^i)\right] + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\delta q^i\right) - \delta f^{\alpha}(t, q^i, \dot{q}^i) + \left[\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\right]\delta q^i\right\}\right\}\mathrm{d}t = 0. \tag{4}$$

如果选取 vakonomic 条件变分 δ_{v}:

$$\delta_{\mathrm{v}}\dot{q}^i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\mathrm{v}} q^i) = 0,$$

$$\delta_{\mathrm{v}} f^{\alpha}(t, q^i, \dot{q}^i) = 0, \tag{5a}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\delta_{\mathrm{v}} q^i\right) + \left[\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\right]\delta_{\mathrm{v}} q^i = 0. \tag{5b}$$

和嵌入变分恒等式的积分变分原理 (4) 就可以得到一般非完整系统的 vakonomic 模型

$$[L]_i + \lambda_{\alpha}\left(\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\right) - \dot{\lambda}_{\alpha}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i} = 0, \tag{6}$$

其中 $[L]_i = \dfrac{\partial L}{\partial q^i} - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$.

如果选取 Hölder 条件变分 δ_{H}:

$$\delta_{\mathrm{H}}\dot{q}^i - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\mathrm{H}} q^i) = 0,$$

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\delta_{\mathrm{H}} q^i = 0, \tag{7a}$$

$$\delta_{\mathrm{H}} f^{\alpha} - \left[\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\right]\delta_{\mathrm{H}} q^i = 0. \tag{7b}$$

和嵌入变分恒等式的积分变分原理 (4) 就可以得到一般非完整系统的 Lagrange-d'Alembert 方程为

$$[L]_i - \Lambda_{\alpha}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i} = 0, \tag{8}$$

其中 $\Lambda_{\alpha} = \dot{\lambda}_{\alpha}$.

如果选取 Suslov 条件变分 δ_{S}:

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\delta_{\mathrm{S}} q^i = 0,$$

$$\delta_{\mathrm{S}} f^{\alpha}(t, q^i, \dot{q}^i) = 0, \tag{9a}$$

$$\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\left[\delta_{\mathrm{S}}\dot{q}^k - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\delta_{\mathrm{S}} q^i)\right] + \left[\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\right]\delta_{\mathrm{S}} q^i = 0. \tag{9b}$$

和嵌入变分恒等式的积分变分原理 (4) 就可以得到一般非完整系统的一种新动力学模型

$$[L]_i - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^{\alpha}}\left(\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \dot{q}^i}\right) = 0. \tag{10}$$

3 高阶非完整约束系统的不等价动力学模型

如果动力学系统受到高阶的不可积微分约束为

$$f^{\alpha}(t, q^i, \dot{q}^i, \cdots, \overset{(k)}{q^i}) = 0,$$
$$k = 1, \cdots, m; \alpha = 1, \cdots g; i = 1, \cdots, n, \tag{11}$$

就称这种动力学系统为高阶非完整系统. 则高阶非完整约束方程的变分恒等式为

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\left[\delta \overset{(k)}{q^i} - \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\delta q^i)\right] + \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\delta q^i\right) - \delta f^{\alpha}\left(t, q^i, \dot{q}^i, \cdots, \overset{(k)}{q^i}\right) + \left[\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial q^i} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\frac{\partial f^{\alpha}}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right]\delta q^i = 0. \tag{12}$$

显然, 当 $m = 1$ 时, 高阶非完整约束方程的变分恒等式 (12) 时就退化为一般非完整系统的变分恒等式 (2).

由于高阶微分约束方程 (11) 的不可积性, 以下条件:

$$\delta \overset{(k)}{q^i} - \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\delta q^i) = 0, \tag{13a}$$

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\delta q^i = 0, \tag{13b}$$

$$\delta f^\alpha\left(t, q^i, \dot{q}^i, \cdots, \overset{(k)}{q^i}\right) = 0, \tag{13c}$$

不能同时成立.

把高阶非完整约束的变分恒等式嵌入哈密顿积分变分原理, 就可以得到高阶非完整系统的积分变分原理:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta L(t, q^i, \dot{q}^i) + \lambda_\alpha\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\left[\delta \overset{(k)}{q^i} - \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\delta q^i)\right] + \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\delta q^i\right) - \delta f^\alpha + \left[\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^i} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right]\delta q^i\right\}\right\}\mathrm{d}t = 0. \tag{14}$$

显然, 当 $m = 1$ 时, 高阶非完整约束系统嵌入变分恒等式的积分变原理 (14) 就退化为一般非完整系统嵌入变变分恒等式的积分变分原理 (4). 高阶非完整系统的三种不等价条件变分为如下形式:
vakonomic 条件变分 δ_{v}:

$$\delta_{\mathrm{v}} \overset{(k)}{q^i} - \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\delta_{\mathrm{v}} q^i) = 0,$$
$$\delta_{\mathrm{v}} f^\alpha\left(t, q^i, \dot{q}^i, \cdots, \overset{(k)}{q^i}\right) = 0, \tag{15a}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\delta_{\mathrm{v}} q^i\right) + \left[\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^i} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right]\delta_{\mathrm{v}} q^i = 0. \tag{15b}$$

Hölder 条件变分 δ_{H}:

$$\delta_{\mathrm{H}} \overset{(k)}{q^i} - \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\delta_{\mathrm{H}} q^i) = 0,$$
$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\delta_{\mathrm{H}} q^i = 0, \tag{16a}$$

$$\delta_{\mathrm{H}} f^\alpha - \left[\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^i} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right]\delta_{\mathrm{H}} q^i = 0. \tag{16b}$$

Suslov 条件变分 δ_{S}:

$$\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\delta_{\mathrm{S}} q^i = 0,$$
$$\delta_{\mathrm{S}} f^\alpha\left(t, q^i, \dot{q}^i, \cdots, \overset{(k)}{q^i}\right) = 0, \tag{17a}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\left[\delta_{\mathrm{S}} \overset{(k)}{q^i} - \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}(\delta_{\mathrm{S}} q^i)\right] + \left[\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^i} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right]\delta_{\mathrm{S}} q^i = 0. \tag{17b}$$

利用高阶非完整系统嵌入变分恒等式的积分变分原理 (14), 并分别选取高阶非完整系统的三种不等价条件变分, 就可以得到高阶非完整系统的不等价动力学模型.

如果采用 vakonomic 条件变分 δ_{v}(15) 式, 高阶非完整系统嵌入变分恒等式的积分变分原理 (14) 式就变为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta_{\mathrm{v}} L(t, q^i, \dot{q}^i) + \lambda_\alpha\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\delta_{\mathrm{v}} q^i\right) + \left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^i} - \sum_{k=1}^{m}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right)\delta_{\mathrm{v}} q^i\right\}\right\}\mathrm{d}t = 0. \tag{18}$$

利用交换关系 (15) 和端点变分为零条件, 即 $\delta q^i|_{t_{1,2}} = 0$, 由分部积分知

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta_{\mathrm{v}}\dot{q}^i = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}\delta_{\mathrm{v}} q^i, \tag{19}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\delta \overset{(k)}{q}\,\mathrm{d}t = -\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right)\delta_{\mathrm{v}} \overset{(k-1)}{q}\,\mathrm{d}t$$
$$= \cdots = (-1)^k\int_{t_1}^{t_2}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right)\delta_{\mathrm{v}} q^i\,\mathrm{d}t. \tag{20}$$

把 (19) 和 (20) 式代入 (18) 式得

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{[L]_i + \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right)\right\}\delta_{\mathrm{v}} q^i\,\mathrm{d}t = 0, \tag{21}$$

其中 $[L]_i = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$. 由变分 $\delta_{\mathrm{v}} q^i$ 的任意性, 可得高阶非完整约束系统的 vakonomic 方程为

$$[L]_i + \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}\left(\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right) = 0. \tag{22}$$

此结果与文献 [19] 中得到的 vakonomic 方程一致.

特别地, 当 $m=1$ 时, $k=0,1$, 可以得到一般非完整系统的 vakonomic 方程 (6).

如果采用 Hölder 条件变分 δ_H(16), 高阶非完整系统嵌入变分恒等式的积分变分原理 (14) 式就变为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta_H L(t,q^i,\dot q^i)+\lambda_\alpha\left\{-\delta_H f^\alpha+\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^i}-\sum_{k=1}^{m}\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right)\delta_H q^i\right\}\right\}dt=0. \tag{23}$$

利用 (19) 和 (20) 式, 就可以得到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{[L]_i\delta_H q^i+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{d^k}{dt^k}\left(\lambda_\alpha\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right)\delta_H q^i-\lambda_\alpha\sum_{k=1}^{m}\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\delta_H q^i\right\}dt=0. \tag{24}$$

进一步运算可以到

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{[L]_i+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{d^k}{dt^k}(\lambda_\alpha)\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}+\lambda_\alpha\sum_{k=1}^{m}\left((-1)^{k+1}-1\right)\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right\}\delta_H q^i dt=0. \tag{25}$$

由变分 $\delta_H q^i$ 的任意性, 可得高阶非完整约束系统的 Lagrange-d'Alembert 型方程为

$$[L]_i+\sum_{k=1}^{m}(-1)^{k+1}\frac{d^k}{dt^k}(\lambda_\alpha)\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}+\lambda_\alpha\sum_{k=1}^{m}\left((-1)^{k+1}-1\right)\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}=0. \tag{26}$$

特别地, 当 $m=1$ 时, 可以得到一般非完整系统的 Lagrange-d'Alembert 型方程 (8).

如果采用 Suslov 条件变分 δ_S(17), 高阶非完整系统嵌入变分恒等式的积分变分原理 (14) 式就变为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{\delta_S L(t,q^i,\dot q^i)+\lambda_\alpha\left\{\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\left[\delta_S \overset{(k)}{q^i}-\frac{d^k}{dt^k}(\delta_S q^i)\right]+\left(\frac{\partial f^\alpha}{\partial q^i}-\sum_{k=1}^{m}\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right)\delta_S q^i\right\}\right\}dt=0. \tag{27}$$

利用 (17b) 式可得

$$\delta_S\dot q^\alpha-\frac{d}{dt}(\delta_S q^\alpha)=\left(\frac{\partial f^\beta}{\partial \dot q^\alpha}\right)^{-1}\left\{-[f^\alpha]_i+\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right\}\delta_S q^i. \tag{28}$$

由 (27) 和 (28) 式可得

$$[L]_i+\frac{\partial L}{\partial \dot q^\beta}\left(\frac{\partial f^\beta}{\partial \dot q^\alpha}\right)^{-1}\left\{-[f^\alpha]_i+\sum_{k=2}^{m}(-1)^{k+1}\frac{d^k}{dt^k}\frac{\partial f^\alpha}{\partial \overset{(k)}{q^i}}\right\}=0. \tag{29}$$

特别地, 当 $m=1$ 时, $f^\alpha=\dot q^\alpha-\varphi^\alpha(t,q^i,\dot q^\mu)$, 则方程 (29) 退化为一般非完整约束系统的新的动力学方程 (10).

4 应用举例

算例1 设单位质量质点的 Lagrange 函数为 $L=1/2\left[(\dot q^1)^2+(\dot q^2)^2+(\dot q^3)^2\right]$, 受到的二阶非完整约束方程为

$$f=\dot q^1\ddot q^1+\dot q^2\ddot q^2+\dot q^3\ddot q^3=0. \tag{30}$$

利用 vakonomic 条件变分和 (22) 式, 可以得到高阶非完整约束系统的 vakonomic 方程为

$$\ddot q^1-\dot\lambda\ddot q^1-\ddot\lambda\dot q^1=0, \tag{31a}$$

$$\ddot q^2-\dot\lambda\ddot q^2-\ddot\lambda\dot q^2=0, \tag{31b}$$

$$\ddot q^3-\dot\lambda\ddot q^3-\ddot\lambda\dot q^3=0. \tag{31c}$$

结合方程 (30), 就可以求得到此高阶非完整约束系统的运动轨迹. 此结果与文献 [19] 得到的结果一致.

利用 Hölder 条件变分和 (26) 式, 可以得到高阶非完整约束系统的 Lagrange-d'Alembert 型方程为

$$\ddot q^1+\dot\lambda\ddot q^1-\ddot\lambda\dot q^1+2\lambda q^1=0, \tag{32a}$$

$$\ddot q^2+\dot\lambda\ddot q^2-\ddot\lambda\dot q^2+2\lambda q^2=0, \tag{32b}$$

$$\ddot q^3+\dot\lambda\ddot q^3-\ddot\lambda\dot q^3+2\lambda q^3=0. \tag{32c}$$

结合约束方程 (30) 式, 就可以得到此高阶非完整约束系统的运动轨迹.

利用 Suslov 条件变分和 (29) 式, 可以得到高阶非完整约束系统的一类新方程为

$$\ddot q^1+\left(\dot q^1\ddot q^1+\dot q^2\ddot q^2\right)^{-1}\left[\dot q^3\ddot q^1\ddot q^3-2\dot q^1(\ddot q^3)^2+\dot q^1\dot q^3q^3\right]=0, \tag{33a}$$

$$\ddot q^2+\left(\dot q^1\ddot q^1+\dot q^2\ddot q^2\right)^{-1}\left[\dot q^3\ddot q^2\ddot q^3-2\dot q^2(\ddot q^3)^2+\dot q^2\dot q^3q^3\right]=0, \tag{33b}$$

$$\dddot{q}^3+(\dot{q}^1\ddot{q}^1+\dot{q}^2\ddot{q}^2)^{-1}\left[2\ddot{q}^3(\dot{q}^1\ddot{q}^1+\dot{q}^2\ddot{q}^2)\right.$$
$$\left.-\dot{q}^3(\ddot{q}^1)^2-\dot{q}^1\dot{q}^3q^1-\dot{q}^3(\ddot{q}^2)^2-\dot{q}^2\dot{q}^3q^2\right]$$
$$=0 \tag{33c}$$

算例2 对于受到一阶非线性非完整约束系统的 Appell-Hamelz 例子, 系统的 Lagrange 函数为

$$L=\frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)-mgz. \tag{34}$$

受到的非线性非完整约束方程为

$$\dot{z}=\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}. \tag{35}$$

当高阶非完整约束系统的 vakonomic 方程, Lagrange-d'Alembert 型方程和一种新的动力学方程退化为一阶非完整约束时的情况, 可以得到

Appell-Hamel 系统的 vakononmic 方程

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{x}+\frac{bg}{a}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$
$$+\left(m\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+\lambda_z\right)\frac{\dot{y}(\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y})}{(\dot{x}^2+\dot{y})^{2/3}}=0, \tag{36a}$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{y}+\frac{bg}{a}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}$$
$$+\left(m\frac{b}{a}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}+\lambda_z\right)\frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2)^{2/3}}=0, \tag{36b}$$

$$mg+m\ddot{z}+\dot{\lambda}_z=0. \tag{36c}$$

Appell-Hamel 系统的 Lagrange-d'Alembert方程

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{x}+\frac{bg}{a}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}+m\frac{b}{a}\frac{\dot{y}(\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y})}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$
$$=0 \tag{37a}$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{y}+\frac{bg}{a}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}+m\frac{b}{a}\frac{\dot{x}(\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y})}{\dot{x}^2+\dot{y}^2}$$
$$=0. \tag{37b}$$

Appell-Hamel 系统的一种新方程

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{x}+\frac{bg}{a}\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=0, \tag{38a}$$

$$\left(1+\frac{b^2}{a^2}\right)\ddot{y}+\frac{bg}{a}\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}}=0. \tag{38b}$$

在系统的运动轨道上, 当 $\ddot{x}\dot{y}-\dot{x}\ddot{y}=0$ 时, 这三种动力学模型等价.

[1] Guo Y X, Luo S K, Mei F X 2004 *Advance in Mechanics* **34** 3 (in Chinese) [郭永新, 罗绍凯, 梅凤翔 2004 力学进展 **34** 3]

[2] Neimark Ju I, Fufaev N A 1972 *Dynamics of Nonholonomic Systems* Providence: American Mathematical Society

[3] Mei F X, Liu D, Luo Y 1991 *Advanced Analytical Mechanics* (Beijing: Beijing Institute Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔, 刘瑞, 罗勇 1991 高等分析力学 (北京: 北京理工大学出版社)]

[4] Shen H C 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 6 (in Chinese) [沈惠川 2005 物理学报 **54** 6]

[5] Guo Y X, Zhao Z, Liu S X, Liu C 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 3 (in Chinese) [郭永新, 赵喆, 刘世兴, 刘畅 2008 物理学报 **57** 3]

[6] Zhao Z, Guo Y X, Liu C, Liu S X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4 (in Chinese) [赵喆, 郭永新, 刘畅, 刘世兴 2008 物理学报 **57** 4]

[7] Guo Z H, Gao P Y 1990 *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **22** 2 (in Chinese) [郭仲衡, 高普云 1990 力学学报 **22** 2]

[8] Chen B 1991 *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **23** 3 (in Chinese) [陈滨 1991 力学学报 **23** 3]

[9] Guo Z H, Gao P Y 1992 *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **24** 2 (in Chinese) [郭仲衡, 高普云 1992 力学学报 **24** 2]

[10] Guo Y X, Zhao Z, Liu S X, Zhu N, Han X J 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 8 (in Chinese) [郭永新, 赵喆, 刘世兴, 朱娜, 韩晓静 2006 物理学报 **55** 8]

[11] Guo Y X, Liu S X, Liu C, Chang P 2009 *Phys. Lett.* A **373**

[12] Zheng X Y, Wu Y Q 2009 *Int. J. Auto. Comp.* **6** 3

[13] Gao F Z, Yuan F S, Gao C C 2009 *Fuzzy Systems and Mathematics* **23** 3 (in Chinese) [高芳征, 袁付顺, 高存臣 2009 模糊系统与数学 **23** 3]

[14] Zhang X W 2006 *Journal of Longdong College* **16** 1 (in Chinese) [张相武 2006 陇东学院学报 **16** 1]

[15] Mu X W, Yu J M, Cheng G F 2006 *Applied Mathematics and Mechanics* **27** 4 (in Chinese) [慕小武, 虞继敏, 程桂芳 2006 应用数学和力学 **27** 4]

[16] Gao F Z, Shang Y L, Yuan F S 2012 *Journal of System Sciences and Mathematical Sciences* **32** 2 (in Chinese) [高芳征, 尚艳玲, 袁付顺 2012 系统科学与数学 **32** 2]

[17] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian Systems* (Beijing: Beijing Institute Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔, 史荣昌, 张永发, 吴惠彬 1996 Birkhoff 系统动力学 (北京: 北京理工大学出版)]

[18] Mei F X 1991 *Applied Mathematics and Mechanics* **12** 8 (in Chinese) [梅凤翔 1991 应用数学和力学 **12** 8]

[19] Chen L Q 1992 *Journal of Anshan Institute I. & S. Technology* **15** 1 (in Chinese) [陈立群 1992 鞍山钢铁学院学报 **15** 1]

[20] Li Y, Fang J H, Zhang K J 2010 *Journal of Dynamics and Control* **8** 4 (in Chinese) [李燕, 方建会, 张克军 2010 动力学与控制学报 **8** 4]

The integral variational principles for embedded variation identity of high-order nonholonomic constrained systems*

Song Duan[1)†] Liu Chang[2)] Guo Yong-Xin[1)2)]

1) (*Physics of medical imaging department, Eastern Liaoning University, Dandong* 118001*, China*)

2) (*College of Physics, Liaoning University, Shenyang* 110036*, China*)

(Received 30 November 2012; revised manuscript received 30 December 2012)

Abstract

In this article, from the integral variational principles for embedded variation identity of high-order nonholonomic constrained systems, three kinds of dynamics for high-order nonholonomic constrained systems are obtained, including the vakonomic dynamical model, Lagrange-d'Alembert model and a new one if utilizing respectively three kinds of conditional variation to them. And the integral variational principles for embedded variation identity of high-order nonholonomic constrained systems is also fitted for the general nonholonomic systems when the constrained equation is reduced to a first-order one. Then, the vakonomic dynamic, Chetaev dynamics and a new model of general nonholonomic systems can also be obtained. Finally, two illustrated examples are used to verify the validity of the theory.

Keywords: high-order nonholonomic constraint, variation identity, conditional variation, vakonomic dynamics

PACS: 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.62.094501

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11202090, 11172120, 10932002) and the Program of Constructing Liaoning Provincial Key Laboratory, China (Grant No. 2008403009).

† Corresponding author. E-mail: songduan620606@163.com