

一种圆轨迹锥束 CT 中截断投影数据的高效重建算法*

汪先超¹⁾ 闫宾^{1)†} 刘宏奎²⁾ 李磊¹⁾ 魏星¹⁾ 胡国恩¹⁾

1) (国家数字交换系统工程技术研究中心, 郑州 450002)

2) (大连理工大学建设工程学院, 大连 116000)

(2012 年 10 月 15 日收到; 2013 年 1 月 4 日收到修改稿)

本文基于数据重排方法, 提出了 T-BPF (Tent-BPF) 算法, 该算法先将锥束投影数据重排成平行投影数据, 然后使用一种推导的 BPF 型算法重建重排后的平行投影数据. T-BPF 算法将原 BPF 算法反投影中变化的角度积分限变成固定的, 反投影中各层循环之间没有了相关性, 这意味着 T-BPF 算法较原 BPF 算法具有更好的可并行性. 实验结果显示: 使用 GPU 对 256^3 的 Shepp-Logan 体模的图像重建进行并行加速, T-BPF 算法在保证重建质量的前提下, 加速比达到了 1036, 较原 BPF 算法有很大提升. T-BPF 算法为截断投影数据的 3D 图像快速重建提供了方法.

关键词: X 射线光学, CT, 图像重建, GPU

PACS: 87.59.-e, 81.70.Tx

DOI: 10.7498/aps.62.098702

1 引言

近年来, 对于截断投影数据的重建来说一个杰出的工作是 BPF 算法的提出^[1-4], 它是在螺旋轨迹扫描中基于 PI 线段进行图像重建, 为截断投影数据的感兴趣区域 (region of interest, ROI) 精确重建提供了策略. 圆轨迹在实际系统中容易实现和控制, 很多 CT 系统采用圆轨迹扫描模式^[5-8]. 2006 年, 基于虚拟 PI 线的概念^[9], BPF 算法被改进用于圆轨迹的 CT 图像重建^[10,11]. 改进的 BPF 算法为圆轨迹锥束 CT 的短扫描问题和局部重建问题提供了解决方法^[12], 然而其可并行性较低, 很难满足实际 CT 系统快速重建的需求.

在圆轨迹锥束 CT 中, BPF 算法是在一簇平行 PI 线段上进行图像重建的, 其反投影中有四层循环, 一个角度循环和三个空间方向上的循环. 对于任意重建点, 当它在不同的 PI 线上的时候, 反投影的角度积分限是变化的. 由于角度积分限随着重建点的位置的变化而变化, 这造成原 BPF 算法的反投

影中角度循环和某一个空间方向 (与 PI 线垂直) 上的循环之间有相关性. 因此, 原 BPF 算法的可并行性不好, 使用并行计算方法的加速比有限^[13].

为了解决原 BPF 算法可并行性差的问题, 本文推导并提出了 T-BPF 算法, 该算法先使用数据重排方法^[14,15], 将锥束投影数据重排成帐篷状的平行投影数据, 然后基于两步 Hilbert 变换方法^[16] 推导了一种 T-BPF (Tent-BPF) 算法用于重排后投影数据的图像重建. T-BPF 算法具有固定的反投影角度积分限, 其反投影运算的各层循环之间没有相关性, 可并行性有很大提高. 此外, T-BPF 算法的反投影中不需要乘以一个依赖于重建点位置和光源位置的加权因子, 重建效率也有一定的提升.

利用高性能低价格的图形处理单位 (graphics processing unit, GPU) 的并行能力对 CT 重建算法加速是目前加速效率最高的一种方式^[17]. 由于 T-BPF 重建算法具有数据相互独立性及可高度并行处理特点, 在 GPU 上设计并行重建算法, 能获得很好的性能提升^[18]. 对于 256^3 的 Shepp-Logan 体模的仿

* 国家高技术研究发展计划 (批准号: 2012AA011603) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: ybpace@yahoo.com.cn

真实验的结果显示,在保证重建质量的前提下,原BPF算法的加速比为297,而T-BPF算法的加速比达到了1036. T-BPF算法的高效性能为截断投影数据的ROI重建提供一种重要方法,在减少数据采集时间和重建时间、减少辐射剂量、提高CT系统的使用寿命等方面具有重要的实际意义.

2 T-BPF 算法

T-BPF 算法主要包含两步,首先是对投影数据进行重排,将锥束投影数据重排成帐篷状平行投影数据,然后针对重排后的帐篷状平行投影数据,推导了一种BPF型算法进行重建.

2.1 投影数据重排

圆轨迹锥束扫描的几何示意图如图1所示, β 和 R 分别表示旋转角度和光源到旋转轴的距离. 为了方便描述重排公式,在坐标系的原点引入一个和真实探测器平行的虚拟探测器. 用 $P_1(\beta, m, n)$ 表示虚拟探测器上的数据, (m, n) 表示在虚拟探测器上的坐标.

为了描述重排后的平行投影数据,我们引入另一个虚拟矩形探测器,其上投影数据用 $P(\theta, t, s)$ 表示. 从图2可知, $P_1(\beta, m, n)$ 和 $P(\theta, t, s)$ 有如下关系:

$$\begin{aligned} \theta &= \beta - \arcsin\left(\frac{t}{R}\right); \\ m &= \frac{tR}{\sqrt{R^2 - t^2}}; \\ n &= \frac{sR^2}{R^2 - t^2}. \end{aligned} \quad (1)$$

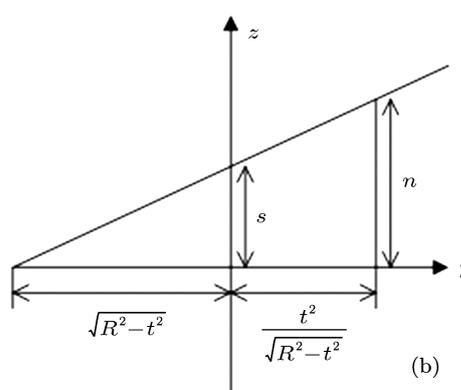
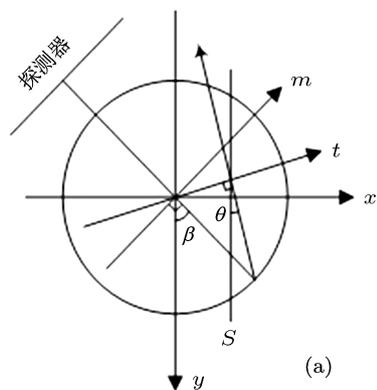


图2 $P_1(\beta, m, n)$ 和 $P(\theta, t, s)$ 坐标关系示意图 (a) z 轴方向俯视图; (b) t 轴方向俯视图

由(1)式, $P_1(\beta, m, n)$ 可以被重排成平行数据 $P(\theta, t, s)$, 且重排公式如下:

$$P(\theta, t, s) = P_1\left(\theta - \arcsin\frac{t}{R}, \frac{tR}{\sqrt{R^2 - t^2}}, \frac{sR^2}{R^2 - t^2}\right). \quad (2)$$

令 t_{\max} 表示重建物体的最大半径, 有

$$\Phi = \arcsin\frac{t_{\max}}{R}. \quad (3)$$

从(2)式可知,重排方法只需要角度范围 $\pi + 2\Phi$ 内的投影数据. 在将 $\{(\beta, m, n)\}$ 重排成 $\{(\theta, t, s)\}$ 的过程中,不能确定每个 (θ, t, s) 刚好对应一个 (β, m, n) . 当对应的 (β, m, n) 找不到,需要采用三线性插值方法来近似获得.

重排方法将投影数据映射到一个虚拟的矩形探测器上. 重排后结果的形状像一个帐篷,因此这种使用BPF型算法重建帐篷状投影数据的算法被称为T-BPF (Tent-BPF) 算法.

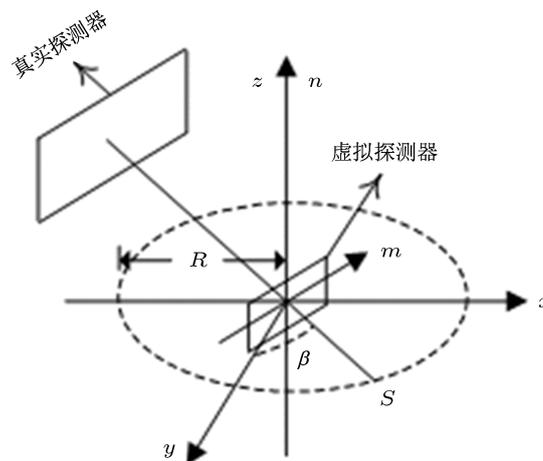


图1 圆轨迹锥束扫描几何示意图 (S, R 和 β 分别表示光源、扫描半径和旋转角度)

2.2 T-BPF 算法

在将锥束投影重排成平行投影后, 我们得到帐篷状平行投影数据. 基于两步 Hilbert 变换方法, 一种改进的 BPF 型算法被提出来重建帐篷状平行投影数据, 该算法在中心平面是精确的, 在非中心平面是近似重建.

先介绍下导数反投影 (differentiated backprojection, DBP), 这是两步 Hilbert 方法的第一步. $g(\mathbf{r})$ 用来表示投影数据导数的反投影图像, 这里 $\mathbf{r} = (x, y, z)$ 表示 PI 线上任意一点. 如果 PI 线在中心平面 ($s = 0$), 我们有 [16]

$$g(\mathbf{r}) = \int_0^\pi P'(\theta, t_r, 0) d\theta, \quad (4)$$

这里 $P'(\theta, t, s) = \frac{\partial}{\partial t} P(\theta, t, s)$, $t_r = \mathbf{r} \cdot \hat{i}$.

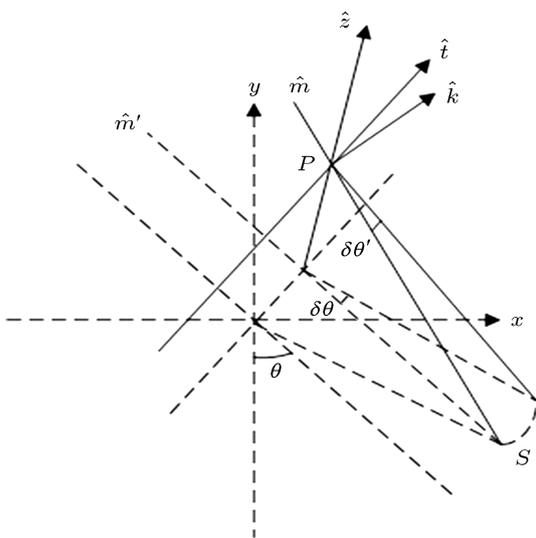


图3 非中心平面投影的坐标系 (旋转轴是 z 轴, 向量 \hat{i} 和中心平面平行, 向量 \hat{k} 关于 z 倾斜, 且有 $\hat{k} = \hat{m} \times \hat{i}$. S 和 P 分别表示光源和一个投影)

如图 3 所示, 对于一个任意投影 $P(\theta, t, s)$

($s \neq 0$), 关于 z 轴一个小范围的旋转 $\delta\theta$ 和关于 \hat{k} 轴的一个旋转 $\delta\theta'$ 是等价的, 它们分别对应一个近似相等的弧长, 因此有

$$\delta\theta' \sqrt{R^2 - t^2 + s^2} = \delta\theta \sqrt{R^2 - t^2}. \quad (5)$$

下面我们计算 P 投影对于直线 PS 上点的反投影的贡献,

$$\delta g(\mathbf{r}) = \delta\theta' P'(\theta, t, s). \quad (6)$$

将 (5) 式代入 (6) 式, 对于 PS 上任意重建点有

$$\delta g(\mathbf{r}) = \frac{\sqrt{R^2 - t^2}}{\sqrt{R^2 - t^2 + s^2}} P'(\theta, t, s) \delta\theta. \quad (7)$$

将 (7) 式在所有投影数据上求和, 于是

$$g(\mathbf{r}) = \int_0^\pi \frac{\sqrt{R^2 - t_r^2}}{\sqrt{R^2 - t_r^2 + s_r^2}} P'(\theta, t_r, s_r) d\theta, \quad (8)$$

这里 $s_r = \frac{z\sqrt{R^2 - t_r^2}}{\sqrt{R^2 - t_r^2} + \mathbf{r} \cdot \hat{m}'}$.

用 $f(\mathbf{r})$ 表示被重建物体密度函数. $f(\mathbf{r})$ 和 $g(\mathbf{r})$ 有如下关系 [19,20]:

$$g(\mathbf{r}) = -2\pi Hf(\mathbf{r}) \quad (9)$$

这里 Hf 表示 f 的 Hilbert 变换.

由 (8) 式可以求得 PI 线段 (真实的或者虚拟的 [9]) 上待重建点的反投影值. 对有限 Hilbert 变换求逆, 于是, 重建帐篷状平行投影数据的 BPF 型算法可以表示为 [21,22]

$$f(\mathbf{r}) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{(x_{c2} - x_c)(x_c - x_{c1})}} \times \left[\int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \frac{dx'_c}{\pi(x_c - x'_c)} \sqrt{(x_{c2} - x'_c)(x'_c - x_{c1})} \times g(x'_c) + C \right], \quad (10)$$

这里 x'_c 是 PI 线上点 \mathbf{r}' 的另外一种表示方式, x_{c1} 和 x_{c2} 表示这条 PI 线的两个端点. 常数 C 由下式求得:

$$C = \frac{2\pi P(0, t_r, s_r) - \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \frac{1}{\sqrt{(x_{c2} - x_c)(x_c - x_{c1})}} \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \sqrt{(x_{c2} - x'_c)(x'_c - x_{c1})} \frac{g(x'_c)}{\pi(x_c - x'_c)} dx'_c dx_c}{\int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \frac{1}{\sqrt{(x_{c2} - x_c)(x_c - x_{c1})}} dx_c}. \quad (11)$$

(11) 式是为了让 C 和沿着该条 PI 线的投影的测量值匹配. 它的执行不像看上去的那么复杂, 因为在 (10) 式中计算 $f(\mathbf{r})$ 时对 (11) 式分子上的积分做了提前计算. 注意: 当 PI 线不在中心平面时, $P(0, t_r, s_r)$ 不能由 $P(\theta, t, s)$ 直接得到. 因此, 我

们用

$$P(0, t_r, s_r) = \frac{P(0, t_1, s_1) + P(\pi, t_2, s_2)}{2} \quad (12)$$

来近似密度函数沿着 PI 线的积分值, 这里 $P(0, t_1, s_1)$ 和 $P(\pi, t_2, s_2)$ 分别表示在旋转角度为 0

和 π 时穿过点 $(\frac{x_{c1} + x_{c2}}{2}, z)$ 的投影值。

由 (8) 和 (10) 式可知, T-BPF 算法具有固定的反投影角度积分限, 各层循环之间无相关性, 可并行性较原 BPF 算法有很大提高, 和 FDK 算法^[23] 的可并行性相当. T-BPF 算法的另外一个优点是反投影中不需要乘以一个依赖于重建点位置和光源位置的加权因子, 这意味着该算法不仅在重建效率上有提升, 而且对重建图像的噪声特性有改善^[24,25].

3 数值实验结果和分析

为了验证 T-BPF 算法的优势, 将 T-BPF 算法和原 BPF 算法进行对比. 测试平台为: 2.27 GHz Intel Xeon 双核 CPU, 16GB 内存, Tesla C1060GPU; 开发环境为: Visual Studio 2008, CUDA 3.0 runtime API. 我们分别用原 BPF 算法和 T-BPF 算法重建规模为 $256 \times 256 \times 256$ 的标准 3D Shepp-Logan 体模^[26]. 圆轨迹扫描半径是 477 mm, 光源到探测器的距离是 1265 mm. 投影数据是在 2π 的圆周上均匀采集 360 个投影. T-BPF 算法和原 BPF 算法都只使用 π 加上 2 倍锥角范围内的投影数据.

为了进一步评价重建结果, 这里引入均方误差 (Root of Mean Square Errors, RMSE) 来评价重建结

果的好坏, 其表达式为^[27]

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N [f_i(i) - f_0(i)]^2}, \quad (13)$$

其中 f_i 和 f_0 分别表示重建结果和真值, N 为像素个数.

我们利用 CUDA 架构, 在 GPU 上完成 T-BPF 算法的加速. 具体步骤如下:

1) 投影数据重排: 将每个角度下重排后投影数据映射到一个二维线程组中, 每个线程对应计算探测器上某一点的投影值.

2) 投影数据求导: 将重排后的投影数据传入显卡的纹理显存中, 将探测器面阵所得到的投影数据映射到一个二维线程组中, 每个线程对应计算探测器上某一点的导数.

3) 沿 PI 线加权反投影: 将求导后的投影数据传入显卡的纹理显存中, 将重建物体映射到一个三维线程组中, 每个线程对应计算重建物体上一点对应探测上一点的坐标.

4) 有限 Hilbert 变换: 将一组 PI 线反投影结果映射到二维线程组中, 每一线程计算一个采样点的卷积结果. 计算前将反投影数据和卷积核绑定到一维纹理中, 以利用纹理缓存命中提高数据读取速度.

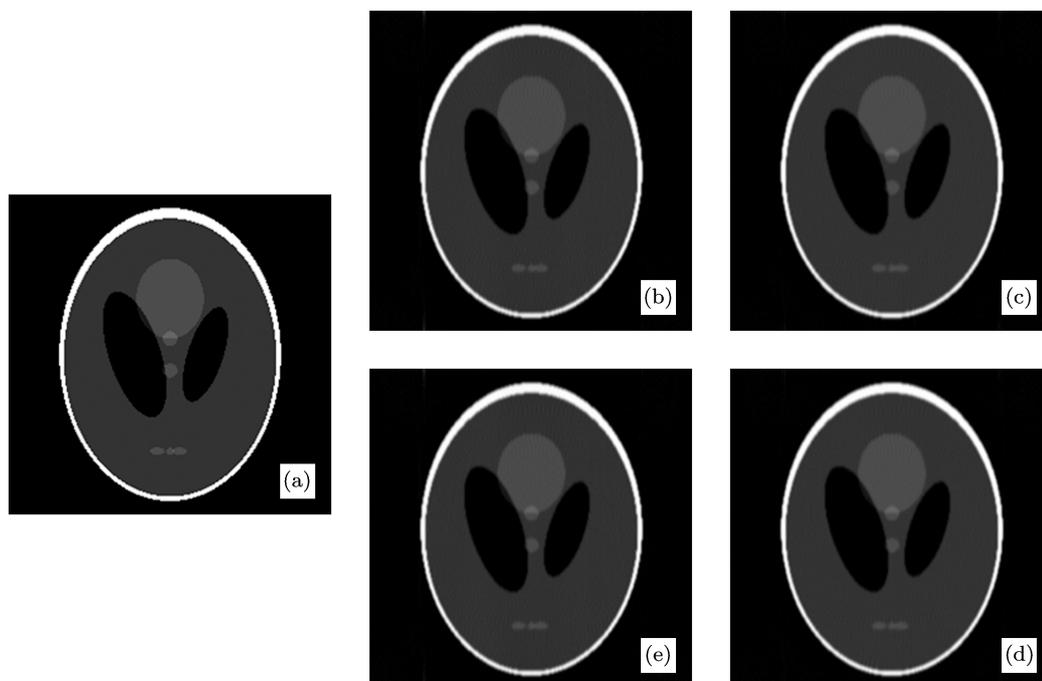


图4 BPF算法和T-BPF算法的重建切片 (a) Shepp-Logan体模切片; (b) BPF算法的CPU重建切片; (c) T-BPF算法的CPU重建切片; (d) BPF算法的GPU重建切片; (e) T-BPF算法的GPU重建切片

为提高算法效率,我们对 T-BPF 算法程序进行进一步优化,包括打包存储重建所需常量参数,应用支持线性插值方式的三维纹理存储器保存投影数据等,进一步提高了算法的并行计算效率.

Shepp-Logan 体模的重建切片如图 4 所示.同时相应的沿水平中线的剖线图如图 5 所示.从图 4 的重建结果、图 5 和表 1 中的数值分析可以看出, BPF 算法和 T-BPF 算法的重建质量基本相当,然而 T-BPF 算法比 BPF 算法具有更高的重建效率,这里主要是因为 T-BPF 算法的反投影运算不包含空间

变化的加权因子.如果使用并行计算, T-BPF 算法的重建效率优势更加明显,因为 T-BPF 算法的反投影计算的各层循环之间没有相关性,而 BPF 算法的反投影运算的部分循环之间有相关性.原 BPF 算法的加速比是 297,而 T-BPF 算法的加速比达到 1000 倍以上,具有与 FDK 算法相当的可并行性. T-BPF 算法在保证重建质量的前提下,具有很高的重建效率和可并行性,可以满足 PI 线上无截断的截断投影数据三维图像的快速重建需求.

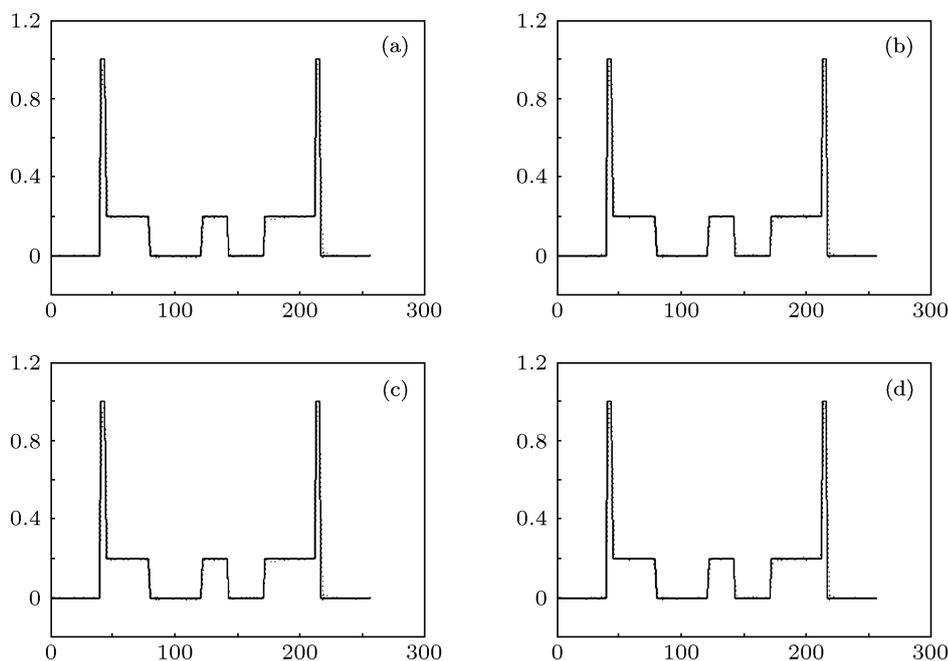


图 5 重建切片沿水平中线的剖线图 (a) BPF 算法 CPU 重建切片的剖线图; (b) T-BPF 算法 CPU 重建切片的剖线图; (c) BPF 算法 GPU 重建切片的剖线图; (d) T-BPF 算法 GPU 重建切片的剖线图 (虚线和实线分别表示重建结果和相应的真值)

表 1 BPF 算法和 T-BPF 算法的重建结果

算法	RMSE	重建时间 CPU/s	重建时间 GPU/s	加速比
BPF 算法	0.0708	963.7	3.245	297
T-BPF 算法	0.0701	730.8	0.705	1036

4 结论

本文提出了一种圆轨迹锥束 CT 的重建 PI 线上无截断的截断投影数据的图像重建算法,该算法先将锥束投影数据重排成帐篷状平行投影数据,然后使用提出的 BPF 型算法进行重建.和原来的 BPF 算法相比, T-BPF 算法具有相当的重建质量,重建效率也有一定的提升,关键是 T-BPF 算法的可并行性

有很大提升.实验结果证明了 T-BPF 算法的加速比达到了 1000 倍以上,具有和 FDK 算法相当的可并行性.

T-BPF 算法可以实现短扫描重建和截断投影数据的图像重建,这是一般 FBP (filtration backprojection) 型算法无法实现的;且 T-BPF 算法具有 FDK 算法相当的可并行性,可以满足实际 CT 系统的快速重建需求. T-BPF 算法的提出为圆轨迹锥

束 CT 系统中 PI 线上无截断的 ROI 重建问题提供了一种快速有效的重建策略. 此外, T-BPF 算法可以大大减少数据采集的时间, 减少辐射剂量, 提高

CT 系统的寿命, 这些优点对于实际 CT 系统的意义重大.

-
- [1] Zou Y, Pan X C 2004 *Phys. Med. Biol.* **49** 941
- [2] Zou Y, Pan X C 2004 *Phys. Med. Biol.* **49** 383
- [3] Zou Y, Pan X C 2004 *Phys. Med. Biol.* **49** 2717
- [4] Clackdoyle R, Noo F, Guo J, Roberts J 2004 *IEEE Trans Nucl Sci* **51** 2570
- [5] Luo Z Y, Yang X Q, Meng Y Z, Deng Y 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 8237 (in China) [罗召洋, 杨孝全, 孟远征, 邓勇 2010 物理学报 **59** 8237]
- [6] Jia P X, Zhang F, Yan B, Bao S L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 087802
- [7] Li L, Kang K J, Chen Z Q, Zhang L, Xing Y X 2008 *IEEE Nuclear Science Symposium and Medical Imaging Conference* Paper No M10-346
- [8] Wang X C, Yan B, Li L, Hu G E 2012 *Chin. Phys. B* **21** 118702
- [9] Pan X C, Xia D, Zou Y, Yu L F 2004 *Phys. Med. Biol.* **49** 4349
- [10] Yu L F, Zou Y, Sidky E Y, Pelizzari C A, Munro P, Pan X C 2006 *IEEE Trans Med Imag* **25** 869
- [11] Yu L F, Xia D, Zou Y, Pan X C, Pelizzari C A, Munro P 2005 *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record* 412
- [12] Yu L F, Pelizzari C A, Pan X C 2006 *IEEE Nuclear Science Symposium Conference Record* 2889
- [13] Wang X C, Li L, Yu C Q, Yan B, Bao S L 2012 *J. of X-ray Sci. and Tech.* **20** 69
- [14] Grass M, Köhler Th, Proksa R 2000 *Phys. Med. Biol.* **45** 329
- [15] Han Y, Yan B, Li L, Yu C Q, Li J X, Bao S L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 068701
- [16] Noo F, Clackdoyle R, Pack J D 2004 *Phys. Med. Biol.* **49** 3903
- [17] Shen L, Xing Y X 2010 *Nuclear Techniques* **33** 857(in Chinese) [沈乐, 邢宇翔 2010 核技术 **33** 857]
- [18] Wang Y J, Hu H F, Xing Y X 2009 *The 10th international meeting on fully 3D image reconstruction in radiology and nuclear medicine* 57
- [19] Sidky E Y, Zou Y, Pan X C 2005 *Phys. Med. Biol.* **50** 1643
- [20] Zou Y, Pan X C, Sidky E Y 2005 *J. Opt. Soc. Am.* **22** 2372
- [21] Tricomi F C 1951 *Quarterly Journal of Mathematics* **2** 199
- [22] Sidky E Y, Pan X C 2005 *IEEE Signal Process Lett.* **12** 97
- [23] Feldkamp L A, Davis L C, Kress J W 1984 *J. Opt. Soc. Amer. A* **1** 612
- [24] Noo F, Defrise M, Clackdoyle R, Kudo H 2002 *Phys. Med. Biol.* **47** 2525
- [25] Dennerlein F, Noo F, Hornegger J, Lauritsch G 2007 *Phys. Med. Biol.* **52** 3227
- [26] Shepp L A, Logan B F 1974 *IEEE Trans Nucl. Sci.* **21** 21
- [27] Han X, Bian J G, Eaker D R, Kline T L, Sidky E Y, Ritman E L, Pan X C 2011 *IEEE Trans Med. Imag.* **30** 606

Efficient reconstruction from truncated data in circular cone-beam CT*

Wang Xian-Chao¹⁾ Yan Bin^{1)†} Liu Hong-Kui²⁾ Li Lei¹⁾
Wei Xing¹⁾ Hu Guo-En¹⁾

1) (National Digital Switching System Engineering and Technological Research Center, Zhengzhou 450002, China)

2) (Faculty of Infrastructure Engineering, Dalian University of Technology, Dalian 116000, China)

(Received 15 October 2012; revised manuscript received 4 January 2013)

Abstract

In circular cone-beam computed tomography (CT), to solve the 3D image reconstruction from truncated projection data which has no truncation along PI-line, backprojection-filtration (BPF) algorithm is a preferred choice. However, in its performance the integral interval of backprojection is variable for different PI-line, rendering the parallelism performance of backprojection low. So it cannot satisfy the requirement of fast image reconstruction in practical CT system. In this paper, a tent BPF (T-BPF) algorithm is developed based on the data rebinning method, which was performed by first rearranging the cone-beam data to tent-like parallel-beam data, and then applying the proposed BPF-type algorithm to reconstruct images from the rearranged data. T-BPF turns the variable view-angle integral interval of backprojection into a fixed integral interval, and there are no relations in the loops of backprojection calculation, which means the parallelism performance of T-BPF is an improvement over that of the original BPF algorithm. The results of experiments show that compared with the conventional CPU implementation, the GPU accelerated method provides images of the same quality with a speedup factor 1036 for the reconstruction of 256^3 Shepp-Logan model. The speedup factor is an improvement in the original BPF algorithm. T-BPF provides a solution for the 3D fast reconstruction from truncated data.

Keywords: X-ray optics, CT, image reconstruction, GPU

PACS: 87.59.-e, 81.70.Tx

DOI: 10.7498/aps.62.098702

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2012AA011603).

† Corresponding author. E-mail: ybspace@yahoo.com.cn