物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 1 (2014) 010201

相对运动变质量力学系统Appell方程的广义Lie对称性导致的广义Hojman守恒量*

贾利群[1)†] 孙现亭[1)] 张美玲[2)] 张耀宇[1)] 韩月林[3)]

1) (平顶山学院电气信息工程学院, 平顶山 467000)

2) (常州市第一中学数学教研组, 常州 213003)

3) (江南大学理学院, 无锡 214122)

(2013 年 8 月 21 日收到; 2013 年 9 月 20 日收到修改稿)

研究相对运动变质量完整系统Appell方程的广义Lie对称性及其直接导致的广义Hojman守恒量. 在群的无限小变换下, 给出相对运动变质量完整系统Appell方程广义Lie对称性的确定方程; 得到相对运动变质量完整系统Appell方程广义Lie对称性直接导致的广义Hojman守恒量的表达式. 最后, 利用本文结果研究相对运动变质量完整约束的三自由度力学系统问题.

关键词: 相对运动, 变质量, 广义Lie对称性, 广义Hojman守恒量

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–J, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.63.010201

1 引 言

约束力学系统的对称性和守恒量理论在物理学、力学和现代数学中具有重要地位. 不仅在国内, 在国外近期一些学术期刊上, 也可看到这方面的研究成果[1−12]. 利用对称性寻求守恒量的方法主要有Noether对称性, Lie对称性[13−16]和Mei对称性[17−23]. Noether对称性总可导致守恒量, 而Lie对称性和Mei对称性一般没有这种性质. 1992年, Hojman给出了由Lie对称性寻找守恒量的一种直接方法[24], 得到一类新型的守恒量, 被称为Hojman守恒量. 多年来, Lie对称性和Hojman守恒量的研究取得了一些进展[25−30]. 由于空间技术和其他工业技术的发展, 变质量系统动力学的研究显得越来越重要. 近年来, 变质量力学系统对称性与守恒量的研究也取得了重要进展[31−36]. 相对运动力学系统的对称性和守恒量问题也同样取得了一些成果[?,38]. Appell系统是分析力学领域三大力学体系之一, 因此Appell方程的对称性与守恒量问题的研究, 具有重要的意义. 本文研究相对运动变质量完整系统Appell方程的广义Lie对称性与广义Hojman守恒量, 最后给出一个相对运动变质量完整约束的三自由度力学系统的算例来说明本文结果的应用.

2 相对运动变质量完整系统的Appell方程

设载体上基点O的速度为$\boldsymbol{v}$, 载体的角速度为$\boldsymbol{\omega}$. 系统由N个质点组成, 在时刻t, 第i个质点的质量为$m_i (i = 1, \cdots, N)$, 在时刻$t + \mathrm{d}t$, 由质点i分离(或并入质点i)的微粒质量为$\mathrm{d}m_i$, 假设系统的位形由n个广义坐标$q_s (s = 1, 2, \cdots, n)$确定, 并设质点质量依赖于时间和广义坐标

$$m_i = m_i(t, \boldsymbol{q}), \quad (i = 1, \cdots, N), \tag{1}$$

系统的Appell方程为

$$\frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial \ddot{q}_s} = Q_s - \frac{\partial}{\partial q_s}(V^0 + V^{\omega}) + Q_s^{\dot{\omega}} + \Gamma_s + P_s,$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11142014) 和江苏省普通高校研究生科研创新计划项目 (批准号: CXLX12_0720) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: jlq0000@163.com

 http://wulixb.iphy.ac.cn

$$(s=1,\cdots n). \tag{2}$$

方程 (2) 中 $S_{\mathrm{r}}=\dfrac{1}{2}m_i\alpha_{i\mathrm{r}}\cdot\alpha_{i\mathrm{r}}$ 为力学系统相对运动的加速度能量, $Q_s=Q_s\left(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\right)$ 为广义力. 方程 (2) 中

$$V^0=M\left(\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0+\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}_0\right)\cdot\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}' \tag{3}$$

为均匀力场势能, 式中 M 为系统总质量, $\boldsymbol{r}_{\mathrm{c}}'$ 为动力学系统的质心相对基点 O 的矢径, $\overset{*}{\boldsymbol{v}}_0$ 为 $\boldsymbol{v}_0$ 的相对导数. 方程 (2) 中

$$V^{\omega}=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\theta}^0\cdot\boldsymbol{\omega} \tag{4}$$

为离心力势能, 式中 $\boldsymbol{\theta}^0$ 为系统在点 O 的惯量张量. 方程 (2) 中

$$Q_s^{\dot{\omega}}=-\left(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times m_i\boldsymbol{r}_i'\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s} \tag{5}$$

为广义回转惯性力, 式中 $\boldsymbol{r}_i'$ 是第 i 个质点相对基点 O 的矢径. 方程 (2) 中

$$\begin{aligned}&\varGamma_s=\gamma_{sk}\dot{q}_k,\\&\gamma_{sk}=2\boldsymbol{\omega}\cdot\left(m_i\frac{\partial\boldsymbol{r}_i'}{\partial q_s}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}_i'}{\partial q_k}\right)\end{aligned} \tag{6}$$

为广义陀螺力. 方程 (2) 中

$$P_s=\dot{m}_i\left(\boldsymbol{u}_i+\dot{\boldsymbol{r}}_i\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}_i}{\partial q_s}-\frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{r}}_i\cdot\dot{\boldsymbol{r}}_i\frac{\partial m_i}{\partial q_s} \tag{7}$$

为广义反推力, 式中 $\boldsymbol{u}_i$ 是从第 i 个质点分离 (或并入) 的微粒相对质点 i 的速度, $\dot{\boldsymbol{r}}_i$ 是质点 i 相对惯性系的速度.

由方程 (2) 可解出所有的广义加速度

$$\ddot{q}_s=\alpha_s\left(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}\right),\quad(s=1,\cdots,n). \tag{8}$$

3　相对运动变质量完整系统Appell方程的广义Lie对称性和广义Hojman守恒量

取时间和广义坐标的群的无限小变换

$$\begin{aligned}t^*&=t+\Delta t,\\q_s^*(t^*)&=q_s(t)+\Delta q_s,\qquad(s=1,\cdots,n),\end{aligned} \tag{9}$$

或其展开式

$$\begin{aligned}t^*&=t+\varepsilon\xi_0(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\\q_s^*(t^*)&=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}).\end{aligned} \tag{10}$$

其中 ε 为一无限小参数, ξ_0,ξ_s 为无限小生成元. 广义Lie对称性是系统方程在时间和广义坐标的群的无限小变换 (9) 或其展开 (10) 式下的一种不变性.

相对运动变质量完整系统Appell方程 (2) 的广义Lie对称性的确定方程为

$$\begin{aligned}&X^{(2)}\left\{\frac{\partial S_{\mathrm{r}}}{\partial\ddot{q}}\right\}\\&=X^{(1)}\left[Q_s-\frac{\partial}{\partial q_s}\left(V^0+V^{\omega}\right)+Q_s^{\dot{\omega}}+\varGamma_s+P_s\right],\end{aligned} \tag{11}$$

其中

$$X^{(1)}=\xi_0\frac{\partial}{\partial t}+\xi_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}, \tag{12}$$

$$\begin{aligned}X^{(2)}=&X^{(1)}+\left[\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_s}{\mathrm{d}t}-\dot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right)\right.\\&\left.-\ddot{q}_s\frac{\bar{\mathrm{d}}\xi_0}{\mathrm{d}t}\right]\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}.\end{aligned} \tag{13}$$

方程 (8) 的广义Lie对称性的确定方程为

$$\begin{aligned}&\ddot{\xi}_s-\dot{q}_s\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0\alpha_s\\&=\frac{\partial\alpha_s}{\partial t}\xi_0+\frac{\partial\alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_k}(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0).\end{aligned} \tag{14}$$

其中, 广义Lie对称性确定方程的两种表示 (11) 和 (14) 式是等价的. 对相对运动变质量完整约束力学系统, 由广义Lie对称性可直接导出广义Hojman守恒量.

定理　如果无限小生成元 ξ_0,ξ_s 满足确定方程 (14), 且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial\alpha_s}{\partial\dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0, \tag{15}$$

其中

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\dot{q}_s\frac{\partial}{\partial q_s}+\alpha_s\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}+\dot{\alpha}_s\frac{\partial}{\partial\ddot{q}_s}.$$

则相对运动变质量完整系统Appell方程的广义Lie对称性直接导致广义Hojman守恒量

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{H}}=&\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\xi_0\right)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\mu\xi_s\right)\\&+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial\dot{q}_s}\left[\mu\left(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)\right]\\=&\mathrm{const}.\end{aligned} \tag{16}$$

证明　将 I_{H} 对时间 t 求导, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t}=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial t}\xi_0\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\xi_0}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial q_s}\xi_s\right)\\&+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial\xi_s}{\partial q_s}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial\mu}{\partial\dot{q}_s}\left(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)\right]\end{aligned}$$

$$+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right), \tag{17}$$

并且

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \xi_0}{\partial t}=\frac{\partial \dot{\xi}_0}{\partial t}-\frac{\partial \alpha_k}{\partial t}\frac{\partial \xi_0}{\partial \dot{q}_k},\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \xi_s}{\partial q_s}=\frac{\partial \dot{\xi}_s}{\partial q_s}-\frac{\partial \alpha_k}{\partial q_s}\frac{\partial \xi_s}{\partial \dot{q}_k},\\ &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)\\ =&\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)-\frac{\partial}{\partial q_s}\left(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)\\ &-\frac{\partial \alpha_k}{\partial \dot{q}_s}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_k}\left(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right).\end{aligned} \tag{18}$$

将 (18) 式代入 (17) 式, 并利用 (14) 式, 得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t}=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}\xi_0\right)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial q_s}\xi_s\right)\\ &+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial \dot{q}_s}\left(\dot{\xi}_s-\dot{q}_s\dot{\xi}_0\right)\right]+\ddot{\xi}_0\\ &+\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s}\dot{\xi}_0+\frac{\partial^2 \alpha_s}{\partial \dot{q}_s\partial t}\xi_0+\frac{\partial^2 \alpha_s}{\partial \dot{q}_s\partial q_k}\xi_k\\ &+\frac{\partial^2 \alpha_s}{\partial \dot{q}_s\partial \dot{q}_k}\left(\dot{\xi}_k-\dot{q}_k\dot{\xi}_0\right).\end{aligned} \tag{19}$$

将 (15) 式分别对 t, q_k, $\dot{q}_k$ 求偏导数, 并把它们代入 (19) 式, 利用 (14) 式, 可得

$$\frac{\mathrm{d}I_{\mathrm{H}}}{\mathrm{d}t}=0. \tag{20}$$

证毕.

若令 $\xi_0=0$, 则变换 (10) 式成为时间不变的特殊无限小变换

$$\begin{aligned}&t^*=t,\\ &q_s^*(t^*)=q_s(t)+\varepsilon\xi_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}).\end{aligned} \tag{21}$$

推论 方程 (8) 在特殊无限小变换 (10) 式下的不变性称为 Lie 对称性, 其确定方程为

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s=\frac{\partial \alpha_s}{\partial q_k}\xi_k+\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_k}\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_k, \tag{22}$$

在特殊无限小变换 (21) 式下, 如果生成元 ξ_s 满足 (22) 式, 且存在某函数 $\mu=\mu(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 使得

$$\frac{\partial \alpha_s}{\partial \dot{q}_s}+\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu=0, \tag{23}$$

则相对运动变质量完整系统 Appell 方程的 Lie 对称性直接导致 Hojman 守恒量

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{H}}=&\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial q_s}(\mu\xi_s)+\frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial \dot{q}_s}\left(\mu\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\xi_s\right)\\ =&\mathrm{const}.\end{aligned} \tag{24}$$

4 相对运动变质量完整约束的三自由度力学系统问题

相对运动变质量完整约束的三自由度力学系统的加速度能量

$$S_{\mathrm{r}}=\frac{1}{2}m\left(\ddot{q}_1^2+\ddot{q}_2^2+\ddot{q}_3^2\right), \tag{25}$$

且

$$\begin{aligned}&Q_1=m\dot{q}_2,\\ &Q_2=-m\dot{q}_1,\\ &Q_3=0,\end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned}&Q_1^{\dot{\omega}}=m\dot{q}_3-\dot{m}q_3,\\ &Q_2^{\dot{\omega}}=-m\dot{q}_2,\\ &Q_3^{\dot{\omega}}=\frac{\dot{m}\dot{q}_1-m\dot{q}_2}{1+t^2},\end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned}&\varGamma_1=\dot{m}q_3,\\ &\varGamma_2=\dot{m}\dot{q}_1+m\dot{q}_2,\\ &\varGamma_3=\frac{m\dot{q}_1+m\dot{q}_2}{1+t^2},\end{aligned} \tag{28}$$

$$\begin{aligned}&P_1=-m\dot{q}_3,\\ &P_2=-\dot{m}\dot{q}_1,\\ &P_3=\frac{-m\dot{q}_1-\dot{m}\dot{q}_1}{1+t^2}.\end{aligned} \tag{29}$$

并有

$$V^0=Q_s^{\dot{\omega}}=\varGamma_s=0, \tag{30}$$

$$V^{\omega}=-\frac{1}{2}m\left(q_1^2+q_2^2\right)\omega^2. \tag{31}$$

试研究系统的广义 Lie 对称性及其导致的广义 Hojman 守恒量.

将 (25)—(31) 式代入方程 (2), 得到

$$\begin{aligned}&\ddot{q}_1=\omega^2q_1+\dot{q}_2,\\ &\ddot{q}_2=\omega^2q_2-\dot{q}_1,\\ &\ddot{q}_3=0.\end{aligned} \tag{32}$$

由广义 Lie 对称性的确定方程 (14), 有

$$\begin{aligned}&\ddot{\xi}_1-\dot{q}_1\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0\left(\omega^2q_1+\dot{q}_2\right)=\omega^2\xi_1+\dot{\xi}_2-\dot{q}_2\dot{\xi}_0,\\ &\ddot{\xi}_2-\dot{q}_2\ddot{\xi}_0-2\dot{\xi}_0\left(\omega^2q_2-\dot{q}_1\right)=\omega^2\xi_2-\dot{\xi}_1+\dot{q}_1\dot{\xi}_0,\\ &\ddot{\xi}_3-\dot{q}_3\ddot{\xi}_0=0.\end{aligned} \tag{33}$$

取生成元

$$\xi_0=1,\xi_1=\xi_2=0,\xi_3=\left(\dot{q}_3t-q_3\right)^2, \tag{34}$$

$$\xi_0=\xi_3=1,\xi_1=\xi_2=0. \tag{35}$$

显然, 它们都满足(33)式, 是系统广义Lie对称性的生成元, 所以系统具有广义Lie对称性.

又根据(15)式, 可得

$$\frac{\bar{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}t}\ln\mu = 0, \tag{36}$$

所以有

$$\mu = 1, \tag{37}$$

$$\mu = (\dot{q}_3 t - q_3)\left[\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 - \omega^2\left(q_1^2 + q_2^2\right)\right]. \tag{38}$$

将(34)式和(37)式代入(16)式, 可得

$$I_{\mathrm{H}} = 2\left(q_3 - \dot{q}_3 t\right) = \mathrm{const.} \tag{39}$$

将(35)式和(38)式代入(16)式, 可得

$$I_{\mathrm{H}} = \left(q_3 - \dot{q}_3 t\right)^{-1} = \mathrm{const.} \tag{40}$$

(39)式和(40)式表示的守恒量的物理意义难以看清. 文献[39]在前言中指出: "从牛顿力学到分析力学再到对称性理论, 有一个守恒量从少到多, 物理意义从明显到不明显, 数学工具从简单到复杂的发展历程." 正如文献[39]所述, 由对称性方法找到的守恒量比分析力学方法找到的更多, 但其物理意义比用分析力学找到的守恒量更加不清晰, 往往难以说明其物理意义. 迄今为止, 怎样解释由对称性方法得到的守恒量的物理意义, 仍是困扰分析力学界的一个难题. 这个难题的解决, 将是分析力学领域的一个重大成果.

参考文献

[1] Cai J L, Shi S S, Fang H J, Xu J 2012 *Meccanica* **47** 63

[2] Huang W L, Cai J L 2012 *Acta Mech.* **223** 433

[3] Luo S K, Li Z J, Li L 2012 *Acta Mechanica* **223** 2621

[4] Cai J L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 487

[5] Jia L Q, Wang X X, Zhang M L, Han Y L 2012 *Nonlinear Dyn.* **69** 1807

[6] Li Z J, Luo S K 2012 *Nonlinear Dyn.* **70** 1117

[7] Han Y L, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Nonlinear Dyn.* **71** 401

[8] Luo S K, Li L 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 339

[9] Han Y L, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 357

[10] Luo S K, Li L 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 639

[11] Luo S K, Li Z J, Peng W, Li L 2013 *Acta Mechanica.* **224** 71

[12] Li L, Luo S kai 2013 *Acta Mechanica* **224** 1757

[13] Lou Z M, Mei F X, Chen Z D 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110204 (in Chinese) [楼智美, 梅凤翔, 陈子栋 2012 物理学报 **61** 110204]

[14] Chen X W, Liu C M, Li Y M 2006 *Chin. Phys.* **15** 470

[15] Xie Y L, Jia L Q, Luo Shao-Kai 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010203

[16] Jia L Q, Han Y L, Zhang M L, Wang X X 2013 *Journal of Pingdingshan University* **28** 27 (in Chinese) [贾利群, 韩月林, 张美玲, 王肖肖 2013 平顶山学院学报 **28** 27]

[17] Mei F, X 2000 *Beijing Inst.Technol.* **9** 120

[18] Cai J L 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 22 (in Chinese) [蔡建乐 2009 物理学报 **58** 22]

[19] Li Y C, Xia L L, Wang X M, Liu X W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3639 (in Chinese) [李元成, 夏莉丽, 王小明, 刘晓巍 2010 物理学报 **59** 3639]

[20] Zheng S W, Jia L Q, Yu H S 2006 *Chin. Phys.* **15** 1399

[21] Jia L Q, Xie Y L, Zhang Y Y, Yang X F 2010 *Chin. Phys. B* **19** 110306

[22] Wang X X, Zhang M L, Han Y L, Jia L Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200203 (in Chinese) [王肖肖, 张美玲, 韩月林, 贾利群 2012 物理学报 **61** 200203]

[23] Sun X T, Han Y L, Wang X X, Zhang M L, Jia L Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200204 (in Chinese) [孙现亭, 韩月林, 王肖肖, 张美玲, 贾利群 2012 物理学报 **61** 200204]

[24] Hojman S A 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** 291

[25] Xu X J, Mei F X, Zhang Y F 2006 *Chin. Phys.* **15** 19

[26] Ge W K, Zhang Y 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 4985 (in Chinese) [葛伟宽, 张毅 2005 物理学报 **54** 4985]

[27] Wang X X, Sun X T, Zhang M L, Xie Y L, Jia L Q 2011 *Chin. Phys. B* **20** 124501

[28] Lin P, Fang J H, Pang T 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4361

[29] Ding N, Fang J H, Chen X X 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1967

[30] Fang J H 2010 *Chin. Phys. B* **19** 040301

[31] Zhang N X, Fang J H, Lin P, Pang T 2008 *Commun. Theor. Phys.* **49** 1145

[32] Zhang M J, Fang J H, Lin P, Lu K, Pang T 2009 *Commun. Theor. Phys.* **52** 561

[33] Xia L L, Li Y C, Wang X J 2009 *Commun. Theor. Phys.* **51** 1073

[34] Zhang M L, Sun X T, Wang X X, Xie Y L, Jia L Q 2011 *Chin. Phys. B* **20** 110202

[35] Zhang M L, Wang X X, Han Y L, Jia L Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 100203

[36] Zhang M L, Wang X X, Han Y L, Jia L Q 2012 *Journal of Yunnan University* **34** 664 (in Chinese) [张美玲, 王肖肖, 韩月林, 贾利群 2013 云南大学学报 **34** 664]

[37] Wang X X, Sun X T, Zhang M L, Han Y L, Jia L Q 2012 *Chin. Phys. B* **21** 050201

[38] Wang X X, Han Y L, Zhang M L, Jia L Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 020201

[39] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社)]

Generalized Hojman conserved quantity deduced from generalized Lie symmetry of Appell equations for a variable mass mechanical system in relative motion*

Jia Li-Qun[1)†] Sun Xian-Ting[1)] Zhang Mei-Ling[2)] Zhang Yao-Yu[1)] Han Yue-Lin[3)]

1) (*School of Electric and Information Engineering, Pingdingshan University, Pingdingshan 467000, China*)

2) (*Mathematics Teaching and Research Group, Changzhou No.1 High School, Changzhou 213003, China*)

3) (*School of Science, Jiangnan University, Wuxi 214122, China*)

(Received 21 August 2013; revised manuscript received 20 September 2013)

Abstract

Generalized Lie symmetry and generalized Hojman conserved quantity of Appell equations for a variable mass holonomic system in relative motion are studied. The determining equation of generalized Lie symmetry of Appell equations for a variable mass holonomic system in relative motion under the infinitesimal transformations of groups is given. The expression of generalized Hojman conserved quantity deduced directly from generalized Lie symmetry for a variable mass holonomic system in relative motion is gained. Finally, the problem of dynamical system with three degree of freedom is studied by using the results of this paper.

Keywords: relative motion, variable mass, generalized Lie symmetry, generalized Hojman conserved quantity

PACS: 02.20.Sv, 11.30.–J, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.63.010201

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China(Grant No. 11142014), and the Scientific Research and Innovation Plan for College Graduates of Jiangsu province, China (Grant No. CXLX12_0720).

† Corresponding author. E-mail: jlq0000@163.com