

分数阶 van der Pol 振子的超谐共振*

韦鹏 申永军[†] 杨绍普

(石家庄铁道大学机械工程学院, 石家庄 050043)

(2013年9月4日收到; 2013年9月29日收到修改稿)

以含分数阶微分项的 van der Pol 振子为对象, 研究其超谐共振时的动力学特性. 首先, 通过平均法得到了系统的一阶近似解, 提出了超谐共振时等效线性阻尼和等效线性刚度的概念, 研究了分数阶微分项的系数和阶次以等效线性阻尼和等效线性刚度的形式对系统动力学特性的影响. 随后, 建立了超谐共振时定常解的幅频曲线的解析表达式, 得到了超谐共振周期响应的稳定性判断准则并提出等效非线性阻尼和非线性稳定性条件参数的概念. 最后, 通过数值仿真比较了分数阶与整数阶系统的幅频曲线, 分析了分数阶微分项的系数和阶次对响应幅值、幅频曲线以及系统稳定性的影响.

关键词: 分数阶微分, van der Pol 振子, 超谐共振, 平均法

PACS: 05.45.-a, 45.10.Hj

DOI: 10.7498/aps.63.010503

1 引言

分数阶微积分发展至今已有 300 多年的历史, 但由于长期没有明确的物理意义和应用背景而发展缓慢. 早年间, 由于相对落后的计算水平, 关于分数阶微积分的研究基本上处于纯数学理论的研究阶段. 而近几十年来, 随着计算机技术的发展, 分数阶微积分在理论和工程应用方面的研究引起了不同领域^[1-30] 科研人员的广泛关注并成为国际上的一个热点研究课题. 对于分数阶微积分理论方面的研究, 目前主要是围绕分数阶微积分的定义、性质和计算展开研究. 在工程应用方面, 分数阶微积分主要有两方面的研究: 一类是用分数阶微积分可以更加准确地描述各种材料的内在特性和本构关系; 另一类是人为地引入分数阶反馈控制以影响或改变原系统控制特性, 从而提高系统的控制效果和鲁棒性. 在工程领域中, 研究分数阶参数对动力系统的影 响是很有趣也很有意义的, 在这方面也有大量学者进行了研究.

目前, 关于分数阶动力系统的研究主要有定

性、数值和解析研究这三种方法, 许多学者在这些方面进行了研究. 例如, 申永军、杨绍普等^[1-4] 研究了一些含分数阶微分项的线性 和非线性振子, 比较了分数阶与整数阶系统并分析了分数阶微分 项中各个参数对系统动力学行为的影响. Gorenflo 等^[5]、Jumarie^[6]、Ishteva^[7] 以及 Agnieszka^[8] 等分别针对 Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville 和 Caputo 的分数阶微积分定义和数值计算方法进行了研究. 王在华和胡海岩^[10] 通过对含分数阶导数阻尼的单自由度线性振子的研究, 发现分数阶导数不仅起到阻尼力作用还能起到一定的弹性力作用. 许勇和顾仁财等^[14] 研究了非高斯 Lévy 噪声激励下非对称双稳系统的相转移和首次穿越问题. 贾红艳等^[16] 研究了分数阶 Lorenz 系统的混沌特性并设计了一个能够实现 Lorenz 系统的模拟电路. 陈宁等^[19] 提出了一种利用有限元法求解分数阶导数黏弹性模型的方法, 提高了处理分数阶导数黏弹性问题的效率和精度. 李常品等^[15,23,24] 在分数阶微积分的数学理论方面进行了大量研究, 建立了一些高效数值算法. Hu 等^[25] 提出了一种间歇稳定性理论, 并利用这一理论研究了含有时滞的分数阶非线性

* 国家自然科学基金(批准号: 11072158, 11372198)和教育部新世纪优秀人才支持计划(批准号: NCET-11-0936)资助的课题

[†] 通讯作者. E-mail: shenyongjun@126.com

性系统的同步现象. Rajneesh 和 Vandana^[26] 利用分数阶微积分的方法研究了热弹性扩散现象, 并验证了相应的独特性理论和互惠性理论.

非线性动力学中经典的 van der Pol 振子尽管在表达形式上比较简单, 但是由于具有丰富的动力学行为而极具代表性, 它常常被用来模拟系统的非线性特性. 例如, van der Pol 型非线性可以用来描述电子管振荡器中的自激振荡现象. 自 1928 年 van der Pol 为描述 LC 回路的电子管振荡器建立了著名的 van der Pol^[31] 方程后, 它一直就是微分动力系统中的一个重要研究对象. 近几年, 关于分数阶 van der Pol 振子的研究逐渐受到了人们的关注与重视. 例如, Leung 等^[32]、Sardar 等^[33]、Xie 和 Lin^[34] 应用不同的方法对含有分数阶微分项的 van der Pol 振子进行研究, 发现了一些重要现象并得到一些不同于整数阶 van der Pol 振子的结果.

分数阶微分模型由于能够在较大频率范围内描述材料的力学性能而成为倍受重视的本构模型, 因此本文将分数阶微分项引入 van der Pol 振子中, 这样可以更加真实地反映系统的非线性状态. 本文利用平均法得到了该系统 3 次超谐共振的近似解析解, 通过分析等效线性阻尼和等效线性刚度对系统幅频曲线的影响, 发现分数阶微分项参数对系统动力学特性的影响, 并且通过研究分数阶微分项的参数对系统稳定性参数的影响, 用以改善系统定常解的稳定性.

2 分数阶 van der Pol 振子 3 次超谐共振的一阶近似解

含分数阶微分项的 van der Pol 振子数学模型如下:

$$m\ddot{x}(t) + kx(t) + \alpha_1 [x^2(t) - 1] \dot{x}(t) + K_1 D^p[x(t)] = F_1 \cos(\omega t), \quad (1)$$

其中 $m, k, \alpha_1, F_1, \omega$ 分别为系统的质量、线性刚度、非线性阻尼系数、激励幅值和激励频率. $K_1 D^p[x(t)]$ 为分数阶微分项, 其中 $K_1 (K_1 > 0)$ 和 $p (0 \leq p \leq 1)$ 分别是分数阶微分项的系数和阶次. 分数阶的定义方式有多种, 例如 Grünwald-Letnikov 型、Riemann-Liouville 型和 Caputo 型分数阶微积分定义等. 这里采用 Caputo 型分数阶

微积分定义

$$D^p[x(t)] = \frac{1}{\Gamma(1-p)} \int_0^t \frac{x'(u)}{(t-u)^p} du, \quad (2)$$

其中 $\Gamma(x)$ 为 Gamma 函数, 具有 $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ 的特性.

进行如下坐标变换:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \varepsilon\alpha = \frac{\alpha_1}{m}, \\ \varepsilon k_1 = \frac{K_1}{m}, \quad F = \frac{F_1}{m},$$

(1) 式变为

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \varepsilon\alpha [x^2(t) - 1] \dot{x}(t) + \varepsilon k_1 D^p[x(t)] = F \cos(\omega t). \quad (3)$$

研究 van der Pol 振子 3 次超谐共振, 即 $3\omega \approx \omega_0$. 定义 $9\omega^2 = \omega_0^2 + \varepsilon\sigma$, 其中 σ 为谐调参数, 则 (3) 式变为

$$\ddot{x}(t) + 9\omega^2 x(t) = \varepsilon \{ \sigma x(t) + \alpha [1 - x^2(t)] \dot{x}(t) - k_1 D^p[x(t)] \} + F \cos(\omega t). \quad (4)$$

设 (4) 式的解有如下形式:

$$x = a \cos \varphi + B \cos(\omega t), \quad (5a)$$

$$\dot{x} = -3a\omega \sin \varphi - B\omega \sin(\omega t), \quad (5b)$$

其中 $\varphi = 3\omega t + \theta, B = \frac{F}{\omega_0^2 - \omega^2} \approx \frac{F}{8\omega^2}$. 根据平均法得到

$$\dot{a} = -\frac{1}{3\omega} [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta)] \sin \varphi, \quad (6a)$$

$$a\dot{\theta} = -\frac{1}{3\omega} [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta)] \cos \varphi, \quad (6b)$$

其中

$$P_1(a, \theta) = \varepsilon \left\{ \sigma a \cos \varphi + \sigma B \cos \left(\frac{\varphi - \theta}{3} \right) + \alpha \left\{ 1 - \left[a \cos \varphi + B \cos \left(\frac{\varphi - \theta}{3} \right) \right]^2 \right\} \times \left[-3a\omega \sin \varphi - B\omega \sin \left(\frac{\varphi - \theta}{3} \right) \right] \right\}, \\ P_2(a, \theta) = -\varepsilon k_1 D^p \left[a \cos \varphi + B \cos \left(\frac{\varphi - \theta}{3} \right) \right].$$

在 $[0, T]$ 区间上对 (6) 式进行积分平均

$$\dot{a} = -\frac{1}{3T\omega} \int_0^T [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta)] \times \sin \varphi d\varphi, \quad (7a)$$

$$a\dot{\theta} = -\frac{1}{3T\omega} \int_0^T [P_1(a, \theta) + P_2(a, \theta)] \times \cos \varphi d\varphi. \quad (7b)$$

积分平均时, 可取 $T = 2\pi$ (若 $P_i(a, \theta)$ ($i = 1, 2$) 是周期函数) 或者 $T = \infty$ (若 $P_i(a, \theta)$ ($i = 1, 2$) 是非周期函数). 对 (7) 式第一部分积分得到

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= -\frac{1}{6\pi\omega} \int_0^{2\pi} P_1(a, \theta) \sin \varphi d\varphi \\ &= \frac{\varepsilon\alpha a}{2} - \frac{\varepsilon\alpha}{24} (3a^3 + B^3 \cos \theta + 6aB^2), \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} a\dot{\theta}_1 &= -\frac{1}{6\pi\omega} \int_0^{2\pi} P_1(a, \theta) \cos \varphi d\varphi \\ &= -\frac{\varepsilon\sigma a}{6\omega} + \frac{\varepsilon\alpha B^3}{24} \sin \theta. \end{aligned} \quad (8b)$$

对 (7) 式第二部分积分

$$\begin{aligned} \dot{a}_2 &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{3T\omega} \int_0^T P_2(a, \theta) \sin \varphi d\varphi \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon k_1}{3T\omega} \int_0^T D^p \left[a \cos \varphi + B \cos \left(\frac{\varphi - \theta}{3} \right) \right] \sin \varphi d\varphi, \end{aligned} \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} a\dot{\theta}_2 &= -\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{3T\omega} \int_0^T P_2(a, \theta) \cos \varphi d\varphi \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\varepsilon k_1}{3T\omega} \int_0^T D^p \left[a \cos \varphi + B \cos \left(\frac{\varphi - \theta}{3} \right) \right] \cos \varphi d\varphi. \end{aligned} \quad (9b)$$

引入如下两个基本公式^[1,3]:

$$B_1 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\sin(\omega t)}{t^p} dt, \quad (10a)$$

$$B_2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\cos(\omega t)}{t^p} dt, \quad (10b)$$

利用留数定理和围道积分, 得到

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{\omega^{p-1} \Gamma(2-p)}{1-p} \cos \left(\frac{p\pi}{2} \right) \\ &= \omega^{p-1} \Gamma(1-p) \cos \left(\frac{p\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (11a)$$

$$\begin{aligned} B_2 &= \frac{\omega^{p-1} \Gamma(2-p)}{1-p} \sin \left(\frac{p\pi}{2} \right) \\ &= \omega^{p-1} \Gamma(1-p) \sin \left(\frac{p\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (11b)$$

经过一系列复杂的计算, 得到

$$\dot{a}_2 = -\frac{\varepsilon a k_1 (3\omega)^{p-1}}{2} \sin \left(\frac{p\pi}{2} \right), \quad (12a)$$

$$a\dot{\theta}_2 = \frac{\varepsilon a k_1 (3\omega)^{p-1}}{2} \cos \left(\frac{p\pi}{2} \right). \quad (12b)$$

将 (8) 式和 (12) 式联合起来, 得到

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \frac{\varepsilon\alpha a}{2} - \frac{\varepsilon\alpha}{24} (3a^3 + B^3 \cos \theta + 6aB^2) \\ &\quad - \frac{\varepsilon a k_1 (3\omega)^{p-1}}{2} \sin \left(\frac{p\pi}{2} \right), \end{aligned} \quad (13a)$$

$$\begin{aligned} a\dot{\theta} &= -\frac{\varepsilon\sigma a}{6\omega} + \frac{\varepsilon\alpha B^3}{24} \sin \theta \\ &\quad + \frac{\varepsilon a k_1 (3\omega)^{p-1}}{2} \cos \left(\frac{p\pi}{2} \right). \end{aligned} \quad (13b)$$

代入原系统参数得到系统近似解析式

$$\begin{aligned} \dot{a} &= -\frac{\alpha_1 B^3}{24m} \cos \theta - \frac{\alpha_1 (a^3 + 2aB^2)}{8m} \\ &\quad - \frac{a}{2m} C(p), \end{aligned} \quad (14a)$$

$$a\dot{\theta} = \frac{\alpha_1 B^3}{24m} \sin \theta - \frac{3a\omega}{2} + \frac{a}{6m\omega} K(p), \quad (14b)$$

其中

$$C(p) = -\alpha_1 + K_1 (3\omega)^{p-1} \sin \left(\frac{p\pi}{2} \right), \quad (15a)$$

$$K(p) = k + K_1 (3\omega)^p \cos \left(\frac{p\pi}{2} \right), \quad (15b)$$

分别定义为 3 次超谐共振时的等效线性阻尼和等效线性刚度.

分析 (15) 式可知, 分数阶微分项的系数 K_1 和阶次 p 对等效线性阻尼和等效线性刚度都有着重要的影响. 通过 (15) 式, 容易看出分数阶系数 K_1 与等效线性阻尼和等效线性刚度成线性关系, 并且等效线性阻尼和刚度会随着 K_1 的增大而单调增加, 因此分数阶系数 K_1 的大小影响着系统响应幅值和系统共振频率的大小. 更值得注意的是分数阶阶次 p 对等效线性阻尼和刚度的影响. 由 (15) 式可知, 分数阶阶次 p 对等效线性阻尼和刚度的影响是以一个指数函数与一个三角函数乘积的形式实现的. 求解等效线性阻尼和刚度关于 p 的偏导数, 结果如下:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C(p)}{\partial p} &= K_1 \left[(3\omega)^{p-1} \ln(3\omega) \sin \left(\frac{p\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\pi (3\omega)^{p-1}}{2} \cos \left(\frac{p\pi}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (16a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K(p)}{\partial p} &= K_1 \left[(3\omega)^p \ln(3\omega) \cos \left(\frac{p\pi}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\pi (3\omega)^p}{2} \sin \left(\frac{p\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (16b)$$

由 (16) 式可知, 等效线性阻尼和刚度关于分数阶阶次 p 的偏导数除了与 p 有关系, 还与激励频率的三倍存在着一定关系. 在 p 从 0 到 1 的变化过程中, 当 $3\omega < 1$ 时, $(3\omega)^p$ 和 $(3\omega)^{p-1}$ 会随着 p 的增大而

减小并且 $\ln(3\omega) < 0$; 反之当 $3\omega > 1$ 时, $(3\omega)^p$ 和 $(3\omega)^{p-1}$ 会随着 p 的增大而增大并且 $\ln(3\omega) > 0$. 由于本文中参数系统的固有频率为 $\omega_0 = 3$, 因此由 (16a) 式可知, 当 $0 < p < 1$ 时, $\frac{\partial C(p)}{\partial p}$ 恒大于零, 即等效线性阻尼与分数阶阶次 p 成单调增加的非线性关系, 使得 p 会以等效线性阻尼的形式影响系统响应幅值的大小. 令 (16b) 式中 $\frac{\partial K(p)}{\partial p} = 0$, 可以得到 $p \approx 0.3885$. 分析可知, 当 $p \approx 0.3885$ 时, 等效线性刚度取得最大值, 此时系统共振频率最大. 当 $0 < p < 0.3885$ 时, 等效线性刚度会随着 p 的增大而增大. 当 $0.3885 < p < 1$ 时, 等效线性刚度会随着 p 的增大而减小.

通过分析分数阶微分项参数对等效线性阻尼和刚度的影响可以知道, 分数阶微分项参数以等效线性阻尼的形式影响系统响应幅值的大小, 并以等效线性刚度的形式影响系统共振频率的大小, 这与人们的直观感觉是一致的.

3 3次超谐共振的定常解及稳定性分析

令 (14) 式中的 $\dot{a} = 0, \dot{\theta} = 0$ 得到关于稳态振幅 \bar{a} 和相位 $\bar{\theta}$ 的代数方程组

$$-3\alpha_1(\bar{a}^3 + 2\bar{a}B^2) - 12\bar{a}C(p) = \alpha_1 B^3 \cos \bar{\theta}, \quad (17a)$$

$$36\bar{a}m\omega^2 - 4\bar{a}K(p) = \alpha_1 B^3 \omega \sin \bar{\theta}. \quad (17b)$$

消去 (17) 式中的 $\bar{\theta}$ 得到幅频曲线方程

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{a}^2}{4} \left[\frac{\alpha_1 \bar{a}^2}{4} + \frac{\alpha_1 B^2}{2} + C(p) \right]^2 \\ & + \frac{\bar{a}^2}{36\omega^2} [K(p) - 9m\omega^2]^2 \\ & = \frac{\alpha_1^2 B^6}{576}. \end{aligned} \quad (18)$$

定义系统振幅参数

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\bar{a}^2}{4}, \quad (19)$$

代入 (18) 式得到幅频曲线方程的等价形式

$$\begin{aligned} & \rho \left\{ \left[\alpha_1 \rho + \frac{\alpha_1 B^2}{2} + C(p) \right]^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{9\omega^2} [K(p) - 9m\omega^2]^2 \right\} \\ & = \frac{\alpha_1^2 B^6}{576}, \end{aligned} \quad (20)$$

以及相频曲线方程

$$\bar{\theta} = \arctan \left\{ \frac{K(p) - 9m\omega^2}{3\omega \left[\alpha_1 \rho + \frac{\alpha_1 B^2}{2} + C(p) \right]} \right\}. \quad (21)$$

分析 (20) 式可知在 3 次超谐共振条件下可能存在一个到三个定常解. 对这些定常解进行稳定性分析, 从而判断哪些解在实际中能够实现. 将 (14) 式在 $(\bar{a}, \bar{\theta})$ 处进行线性化处理, 即 $a = \bar{a} + \Delta a, \theta = \bar{\theta} + \Delta \theta$, 代入 (14) 式得到

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta a}{dt} &= \left[-\frac{\alpha_1(3\bar{a}^2 + 2B^2)}{8m} - \frac{C(p)}{2m} \right] \Delta a \\ &+ \frac{\alpha_1 B^3 \sin \bar{\theta}}{24m} \Delta \theta, \end{aligned} \quad (22a)$$

$$\frac{d\Delta \theta}{dt} = -\frac{\alpha_1 B^3 \sin \bar{\theta}}{24\bar{a}^2 m} \Delta a + \frac{\alpha_1 B^3 \cos \bar{\theta}}{24\bar{a} m} \Delta \theta. \quad (22b)$$

根据 (17) 式, 消去 (22) 式中的 $\bar{\theta}$, 得到系统的特征行列式

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} A_1 - \lambda & -\frac{\bar{a}}{6m\omega} [K(p) - 9m\omega^2] \\ \frac{1}{6\bar{a}m\omega} [K(p) - 9m\omega^2] & A_2 - \lambda \end{pmatrix} \\ & = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1 &= -\left[\frac{C(p)}{2m} + \frac{\alpha_1 B^2}{4m} + \frac{3\alpha_1 \rho}{2m} \right], \\ A_2 &= -\left[\frac{C(p)}{2m} + \frac{\alpha_1 B^2}{4m} + \frac{\alpha_1 \rho}{2m} \right], \end{aligned}$$

于是得到特征方程

$$\begin{aligned} & \lambda^2 - (A_1 + A_2)\lambda + A_1 A_2 \\ & + \frac{1}{36m^2\omega^2} [K(p) - 9m\omega^2]^2 \\ & = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

由 (24) 式可以得到定常解的稳定性条件

$$\begin{aligned} & A_1 + A_2 < 0, \\ & A_1 A_2 + \frac{1}{36m^2\omega^2} [K(p) - 9m\omega^2]^2 > 0. \end{aligned} \quad (25)$$

展开 (25) 式中的条件可以得到定常解稳定性条件的等价形式

$$\begin{aligned} & N(p) \stackrel{\text{def}}{=} 2\alpha_1 \rho + \frac{\alpha_1 B^2}{2} + C(p) \\ & = \alpha_1 \left(2\rho + \frac{B^2}{2} - 1 \right) \\ & + K_1 (3\omega)^{p-1} \sin\left(\frac{p\pi}{2}\right) > 0, \end{aligned} \quad (26a)$$

$$R(p) \stackrel{\text{def}}{=} N^2(p) - \alpha_1^2 \rho^2$$

$$+ \frac{1}{9\omega^2} [K(p) - 9m\omega^2]^2 > 0, \quad (26b)$$

其中 $N(p)$ 为等效非线性阻尼, $R(p)$ 为非线性稳定性条件参数.

$N(p)$ 与 $R(p)$ 作为判断系统周期解稳定性的两个参数, 由定常解稳定性条件可知只有当二者同时大于零时, 定常解才稳定. 而对于定常解不稳定的情况则分为三种: $N(p) > 0, R(p) < 0$; $N(p) < 0, R(p) > 0$; $N(p) < 0, R(p) < 0$. 其中在稳态条件下定义的等效非线性阻尼 $N(p)$ 对应着 van der Pol 振子中的非线性阻尼项, 当 $N(p) < 0$ 时, 系统振动会发散; 而当 $N(p) > 0, R(p) < 0$ 时, 由于非线性稳定性条件参数 $R(p)$ 同时受到等效非线性阻尼 $N(p)$ 和等效线性刚度 $K(p)$ 的影响, 会使系统呈现不稳定的周期振动. 由于本文研究重点是稳态周期解, 而 van der Pol 振子中随时间变化的非线性阻尼项没有固定的幅值模型, 并且分数阶微分项参数主要是以等效线性阻尼的形式影响系统响应幅值的, 因此在定常解稳定条件中定义的等效非线性阻尼可用来判断定常解的稳定性.

由 (26) 式可知, 分数阶微分项参数以等效线性阻尼的形式影响等效非线性阻尼, 还以等效非线性阻尼和等效线性刚度的形式影响非线性稳定性条件参数. 除此之外, 等效非线性阻尼和非线性稳定性条件参数还与系统的响应幅值、激励幅值以及激励频率存在一定的关系.

4 数值仿真

4.1 整数阶与分数阶 van der Pol 振子的比较

为说明分数阶微分项参数对系统动力学特性的影响, 选取一组基本参数: $m = 5, k = 45, \alpha_1 = 0.5, \varepsilon = 0.01, K_1 = 0.1, p = 0.5$, 对系统进行仿真分析. 根据 (20) 式可以得到整数阶 ($K_1 = 0$) van der Pol 系统的幅频曲线如图 1 所示 (实线表示稳定解, 虚线表示非稳定解, 下同), 其中激励幅值 F_1 取不同数值时可得到三种不同的拓扑结果.

选取图 1 中三种典型的 F_1 参数, 并且与相应的分数阶 van der Pol 系统的幅频曲线 ($K_1 = 0.1, p = 0.5$) 进行比较, 结果如图 2 所示. 分析该图可知, 在分数阶微分项作用下, 系统的等效线性阻尼和等效线性刚度同时增大, 在幅频曲线中分别对应

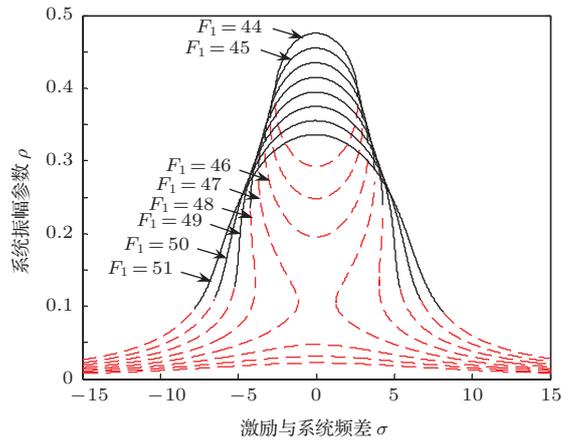


图 1 激励幅值对整数阶幅频曲线的影响

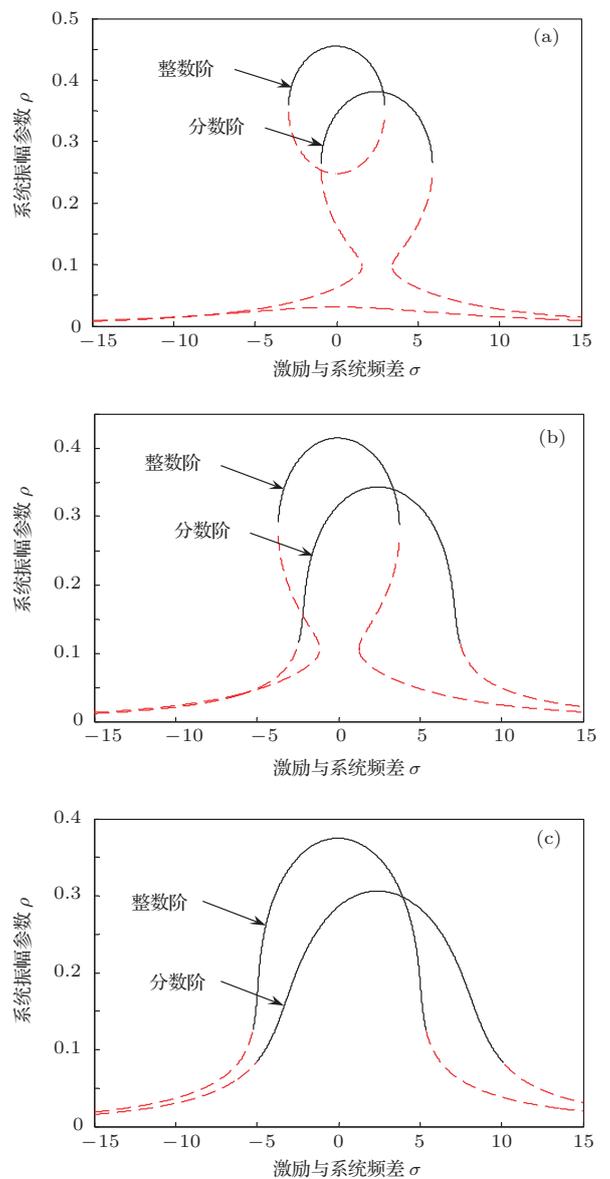


图 2 整数阶与分数阶 van der Pol 振子幅频曲线比较 (a) $F_1 = 45$; (b) $F_1 = 47$; (c) $F_1 = 49$

着最大幅值的减小和幅频曲线向高频方向偏移. 从图 2(a)、(b)中还可以发现, 分数阶微分项还可以使幅频曲线的拓扑结构也发生变化: 图 2(a)中整数阶幅频曲线中的卵形结构消失, 转变为存在多解情况的开曲线结构; 图 2(b)中整数阶幅频曲线中的多解现象随着分数阶微分项的作用而消失; 而且图 2(a)中分数阶的幅频曲线结构类似于图 2(b)中整数阶幅频曲线结构, 图 2(b)中分数阶的幅频曲线结构类似于图 2(c)中整数阶幅频曲线结构. 由于线性刚度可以通过影响系统固有频率的方式对系统幅频曲线的拓扑结构产生影响, 因而通过整数阶与分数阶 van der Pol 振子幅频曲线的比较, 发现分数阶微分项不仅起到阻尼的作用, 而且还能起到刚度的作用.

4.2 分数阶微分项参数对幅频曲线的影响

当分数阶微分项系数 K_1 变化时, 得到幅频曲线如图 3 所示. 分析图 3 可知, 随着 K_1 的增大, 系统等效线性阻尼 $C(p)$ 逐渐增大, 幅频曲线的响应幅值逐渐减小; 与此同时, 系统等效线性刚度 $K(p)$

也逐渐增大, 系统共振频率增大, 幅频曲线上表现为向右偏移和拓扑结构可能发生变化(如图 3(a)所示).

当分数阶微分项阶次 p 在 0 到 1 之间变化时, 得到幅频曲线如图 4 所示. 当 p 从 0 逐渐增加到 1 时, 等效线性阻尼 $C(p)$ 逐渐增大, 系统幅频曲线的响应最大幅值逐渐减小; 同时, p 的变化也会影响等效线性刚度的变化. 由 p 对等效线性刚度的影响可知, 当 $0 < p < 0.3885$ 时, p 的增大会使等效线性刚度随之增大, 此时幅频曲线表现为向右偏移; 当 $0.3885 < p < 1$ 时, 等效线性刚度会随着 p 的增大而逐渐减小, 此时幅频曲线表现为向左偏移并且幅频曲线的拓扑结构也发生了变化(图 4(a)所示).

基于分数阶微分项参数对幅频曲线的影响以及 van der Pol 振子幅频曲线的特点^[35]可以发现, 通过改变分数阶微分项参数可以控制系统幅频曲线的幅值和拓扑结构, 而且在与传统整数阶 van der Pol 振子的幅频曲线比较中发现, 分数阶微分项还可以通过等效线性刚度的形式使系统幅频曲线产生偏移.

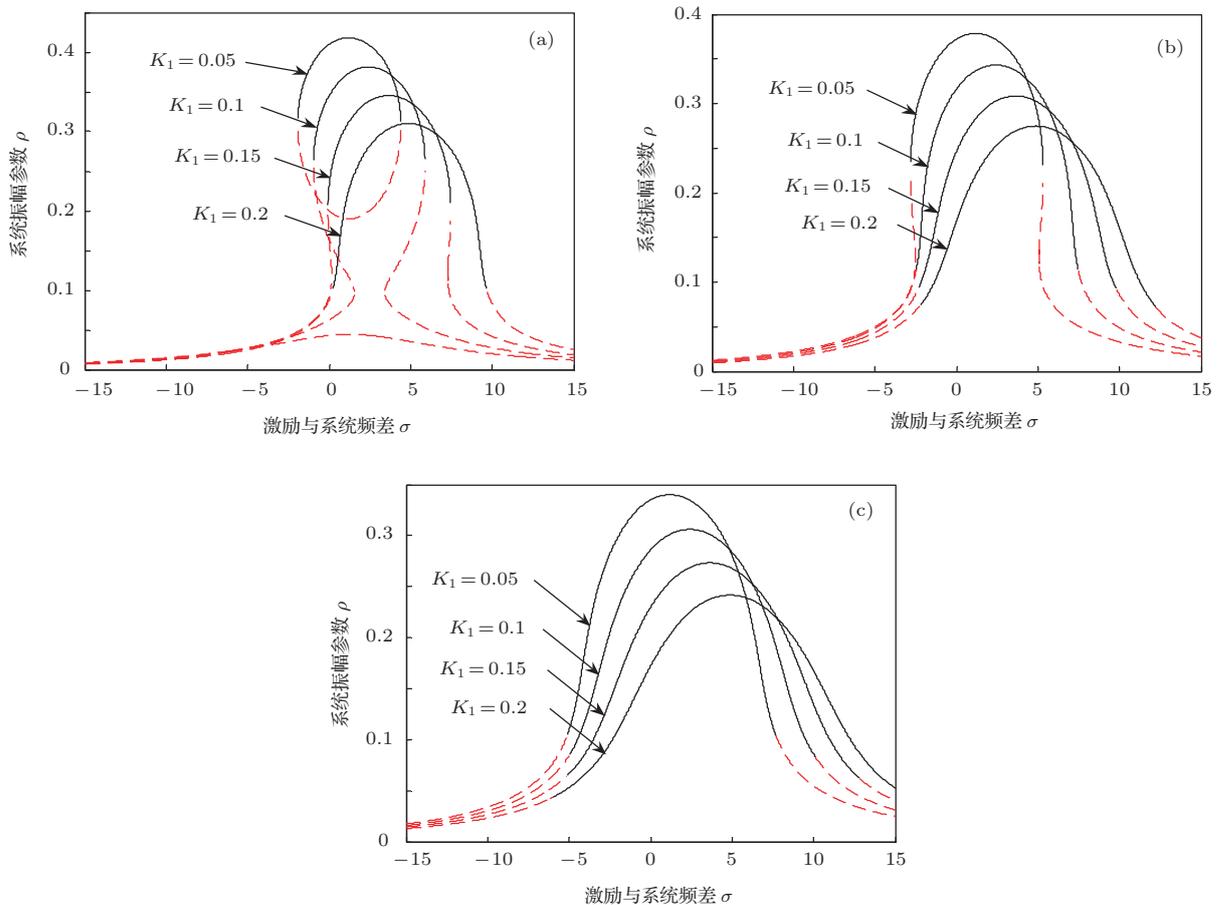


图 3 分数阶微分项系数 K_1 对幅频曲线的影响 ($p = 0.5$) (a) $F_1 = 45$; (b) $F_1 = 47$; (c) $F_1 = 49$

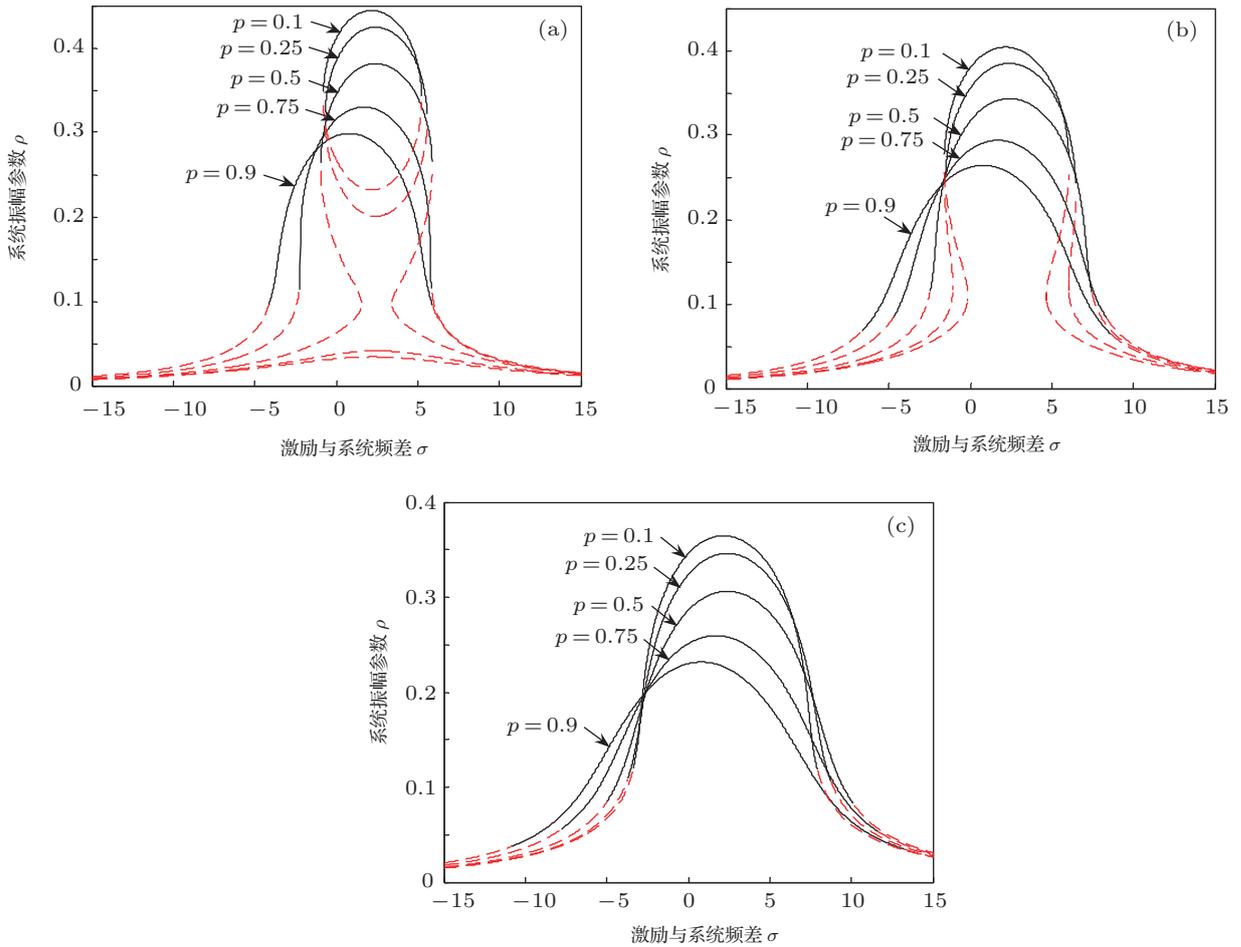


图4 分数阶微分项阶次 p 对幅频曲线的影响 ($K_1 = 0.1$) (a) $F_1 = 45$; (b) $F_1 = 47$; (c) $F_1 = 49$

4.3 分数阶微分项参数对响应幅值的影响

考虑到响应幅值反映稳定周期解的能量大小, 下面研究分数阶微分项参数对响应幅值的影响. 当分数阶微分项系数 K_1 变化时, 得到 K_1 对响应幅值的影响如图 5 所示 (其中实线表示稳定响应幅值, 虚线表示非稳定响应幅值). 分析图 5 可知, 随着 K_1 的增大, 在等效线性阻尼的作用下, 系统稳定响应幅值逐渐减小. 由于 van der Pol 振子的非线性特性, 使得 K_1 以非线性的形式对响应幅值产生影响. 随着 K_1 的增大, 响应幅值的数量和稳定性也在发生变化. 例如, 由图 5 (a) 可知, 当 K_1 较小时, 响应幅值有三个, 且最大值是稳定的, 这与传统整数阶 van der Pol 振子响应幅值的特点是一致的. 而当 K_1 较大时, 响应幅值只有一个. 由图 5 还可以发现, 随着 p 的增大, 系统稳定响应幅值逐渐减小. 值得注意的是, 在局部放大图中 (如图 5 (b), (d) 和 (f)), 当 $0 < p < 0.3885$ 时, 随着 K_1 的增大响应幅值仍为不稳定的. 分析发现, K_1 与 p 对等效线性刚度的共同作用不仅改变了幅频曲线的拓扑结构, 而

且也使得幅频曲线发生偏移. 两个参数交互作用下, 使得幅频曲线偏移较大而使 $\sigma = 0$ 处的响应幅值为不稳定. 图 5 (b) 中在 $K_1 = 0.4$ 时, 稳定幅值的交叉也是由于在等效线性刚度的作用下, 系统幅频曲线产生偏移以及拓扑结构发生变化二者共同作用的结果.

当分数阶微分项阶次 p 变化时, 得到 p 对响应幅值的影响如图 6 所示. 类似于对图 5 的分析, 随着 p 的增大, 稳定响应幅值逐渐减小; 随着 K_1 的增大, 稳定响应幅值相对减小. 由图 6 可知, 当 p 与 K_1 较小时, 响应幅值有三个且最大幅值是稳定的, 随着 p 的增大, 响应幅值变为一个且是稳定的; 当 K_1 较大 p 较小时, 响应幅值为一个且为不稳定, 随着 p 的增大, 响应幅值变为稳定. 类似于对图 5 的分析, 分数阶微分项参数会以等效线性刚度的形式对系统幅频曲线产生影响, 既改变了幅频曲线的拓扑结构也使幅频曲线发生偏移. 两者共同作用下, 使得某个频率 σ 所对应的响应幅值的数量和稳定性发生变化.

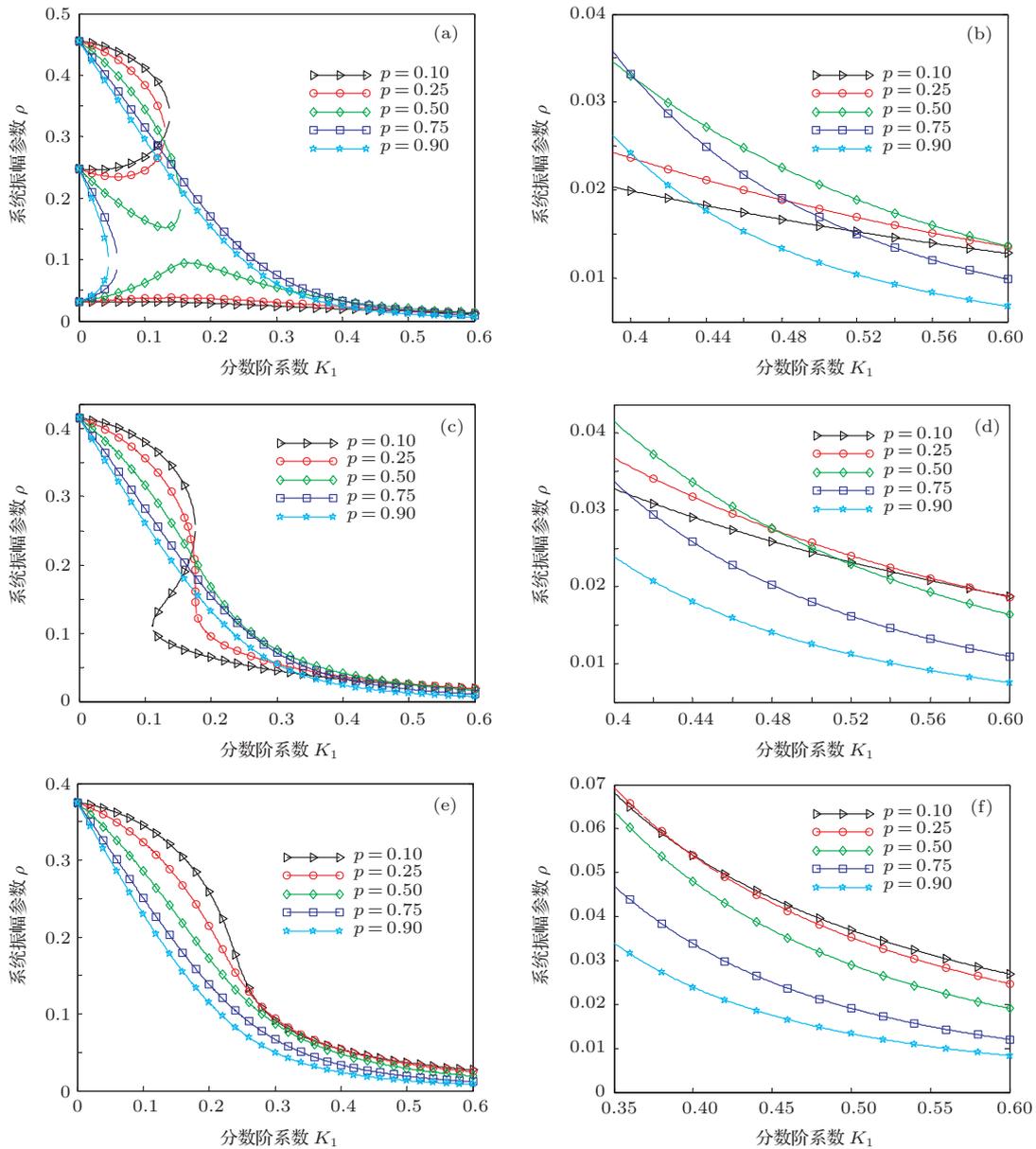


图5 分数阶微分项系数 K_1 对响应幅值的影响 ($\sigma = 0$) (a) $F_1 = 45$; (b) $F_1 = 45$, 局部放大; (c) $F_1 = 47$; (d) $F_1 = 47$, 局部放大; (e) $F_1 = 49$; (f) $F_1 = 49$, 局部放大

通过分析分数阶微分项参数对响应幅值的影响可以发现, 改变分数阶微分项参数可以有效地控制稳定响应幅值的大小并且可以通过增大 p 和 K_1 的方法得到惟一稳定且振幅小的响应幅值. 对于某个频率处所对应的响应幅值, 会随着分数阶微分项参数的变化, 使得响应幅值的数量和稳定性发生变化.

4.4 分数阶微分项参数对系统稳定性参数的影响

为了得到稳定周期解, 对定常解稳定性条件的研究也较为重要. 首先考虑分数阶微分项系数 K_1 对稳定性参数的影响如图 7 所示(其中实线表示满

足稳定性条件, 虚线表示不满足稳定性条件). 由图 7 可知, 只有当等效非线性阻尼 $N(p)$ 与非线性稳定性条件参数 $R(p)$ 同时大于零时, 才能得到稳定的周期解. 根据激励振幅 $F_1 = 45$ 时的幅频曲线特点, 当 K_1 较小时在频差 $\sigma = 0$ 处存在三个响应幅值, 其中最大幅值为稳定的, 满足稳定性条件. 而图 7 中, 当 K_1 较小时, $F_1 = 45$ 对应的曲线只有一个解满足稳定性条件, 另外两个不满足稳定性条件的解分别对应 $N(p) > 0, R(p) < 0$ 和 $N(p) < 0, R(p) > 0$ 的情况. 随着 K_1 的增大, 由于等效线性刚度的作用, 共振频率增大的同时系统幅频曲线的拓扑结构也发生变化, 周期解的数量变为一个并且稳定.

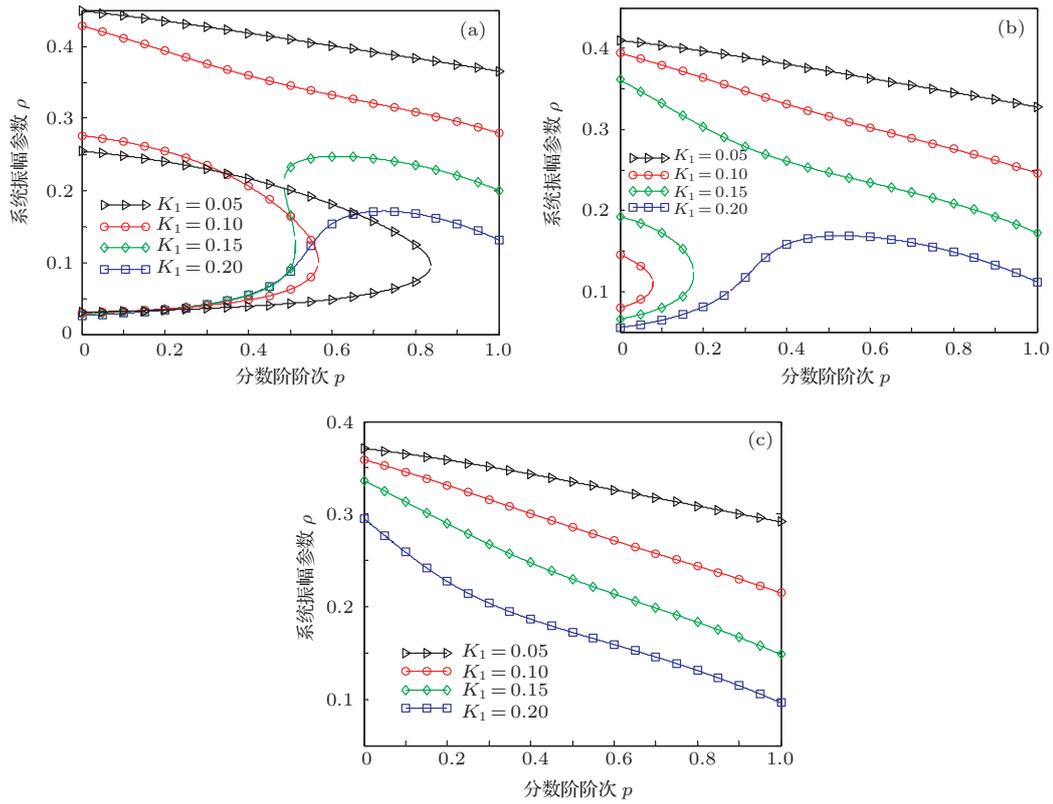


图6 分数阶微分阶次 p 对响应幅值的影响 ($\sigma = 0$) (a) $F_1 = 45$; (b) $F_1 = 47$; (c) $F_1 = 49$

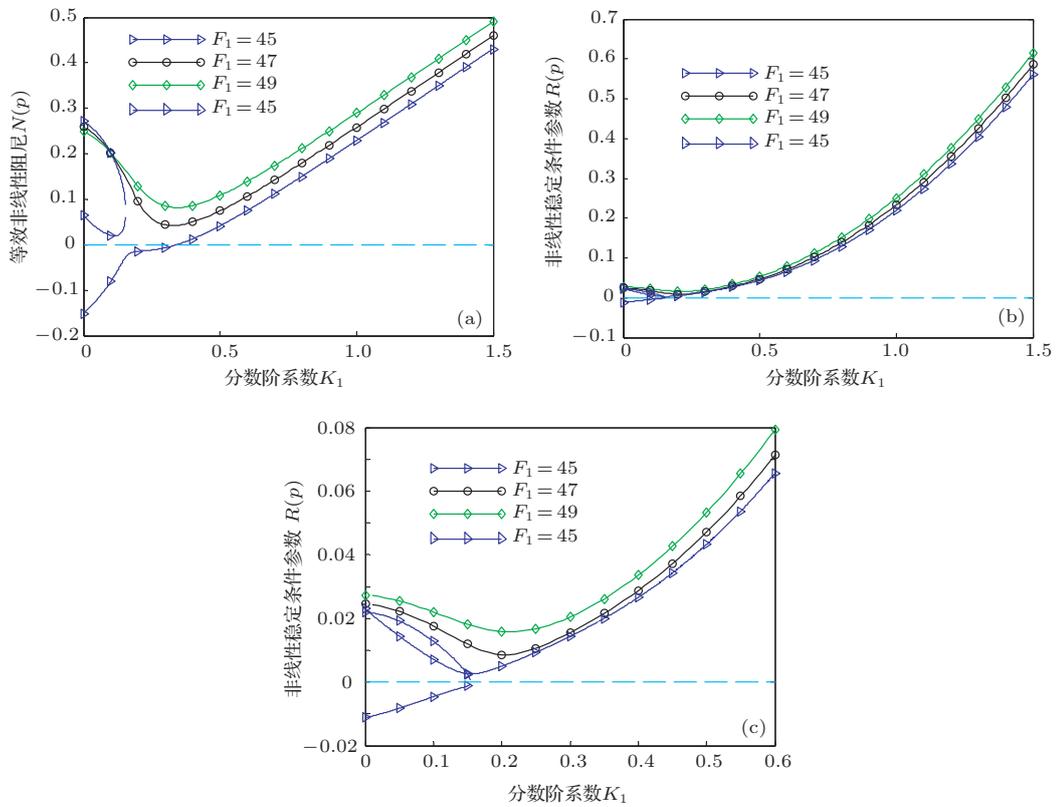


图7 分数阶微分项系数 K_1 对系统稳定性参数的影响 ($\sigma = 0, p = 0.5$) (a) K_1 对 $N(p)$ 的影响; (b) K_1 对 $R(p)$ 的影响; (c) K_1 对 $R(p)$ 的影响, 局部放大图

其次考虑分数阶微分项阶次 p 对稳定性参数的影响如图8所示. 类似于对图7的分析, 由于van der Pol振子曲线结构的特点, 在 p 从0到1的变化过程中, $F_1 = 45$ 和47的曲线存在不满足稳定性条件的解. 由图8可知, $F_1 = 45$ 时不满足稳定性条件的解分别为 $N(p) > 0$ 且 $R(p) < 0$, $N(p) < 0$ 且 $R(p) > 0$ 以及 $N(p) < 0$ 且 $R(p) < 0$ 三种情况, 并且由 p 对等效非线性阻尼 $N(p)$ 的影响曲线可知, 在 $0.55 < p < 0.56$ 的很小范围内存在 $N(p) < 0, R(p) < 0$ 的不稳定情况. $F_1 = 47$ 时不满足稳定性条件的解分别为 $N(p) < 0$ 且 $R(p) < 0$ 和 $N(p) < 0$ 且 $R(p) > 0$ 两种情况.

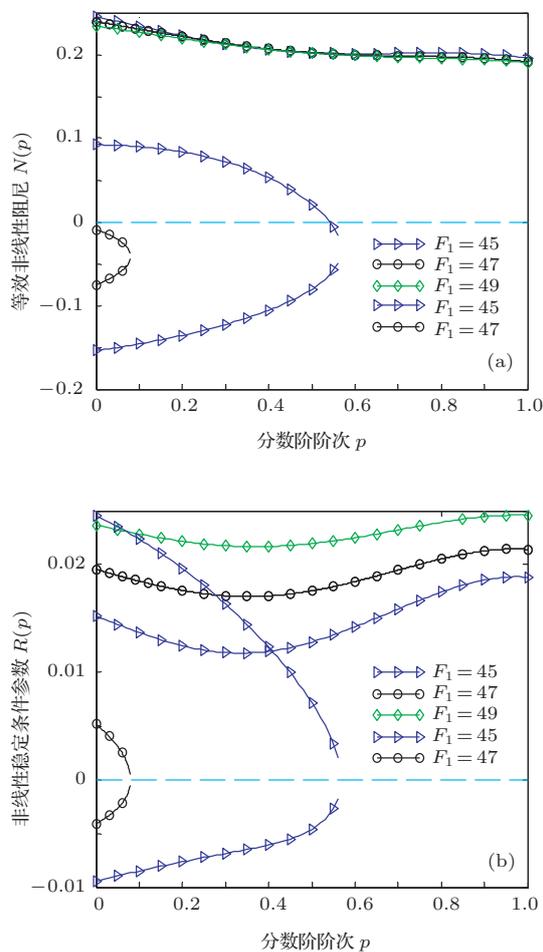


图8 分数阶微分项阶次 p 对系统稳定性参数的影响 ($\sigma = 0, K_1 = 0.1$) (a) p 对 $N(p)$ 的影响; (b) p 对 $R(p)$ 的影响

结合(26)式和图7与图8, 分析发现当 p 与 K_1 取较大值时, 在等效线性刚度的作用下, 系统幅频曲线拓扑结构发生变化, 稳定周期解的频率范围增大, 可以得到惟一的且满足稳定性条件的周期解. 因此, 通过增大分数阶微分项参数的办法, 可以改

善定常解的稳定性并得到惟一且稳定的周期解.

5 结 论

对分数阶van der Pol振子的3次超谐共振进行了研究, 利用平均法得到了系统的定常解及稳定性条件. 通过分析分数阶微分项的参数对响应幅值的影响, 发现增大分数阶微分项参数可以有效地减小系统的响应幅值. 借助等效线性阻尼和等效线性刚度的概念研究了分数阶微分项参数对幅频曲线的影响, 发现改变分数阶微分项参数可以对系统幅频曲线的幅值、曲线拓扑结构和曲线的偏移程度产生较大影响. 借助等效非线性阻尼和非线性稳定性条件参数, 发现选取较大的分数阶微分项参数, 可以改善定常解的稳定性并得到惟一且稳定的周期解. 这些结果对系统的动力学行为有着重要影响, 对系统的优化有着重要意义.

参考文献

- [1] Shen Y J, Yang S P, Xing H J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 110505 (in Chinese) [申永军, 杨绍普, 邢海军 2012 物理学报 **61** 110505]
- [2] Shen Y J, Yang S P, Xing H J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 150503 (in Chinese) [申永军, 杨绍普, 邢海军 2012 物理学报 **61** 150503]
- [3] Shen Y J, Yang S P, Xing H J, Gao G S 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **17** 3092
- [4] Shen Y J, Yang S P, Xing H J, Ma H X 2012 *Int. J. Non-Linear Mech.* **47** 975
- [5] Gorenflo R, Abdel R E A 2007 *J. Comput. Appl. Mathe.* **205** 871
- [6] Jumarie G 2006 *Compu. Mathe. Appl.* **51** 1367
- [7] Ishteva M, Scherer R, Boyadjiev L 2005 *Mathe. Sciences Research J.* **9** 161
- [8] Agnieszka B M, Delfim F M T 2011 *Fract. Calc. Appl. Anal.* **14** 523
- [9] Wang Z H, Du M L 2011 *Shock Vib.* **18** 257
- [10] Wang Z H, Hu H Y 2009 *Science in China Series G: Phys. Mech. Astron.* **39** 1495 (in Chinese) [王在华, 胡海岩 2009 中国科学 G **39** 1495]
- [11] Wang Z H, Hu H Y 2010 *Sci. Chin. Phys. Mech. Astron.* **53** 345
- [12] Shi M, Wang Z H 2013 *Science Sinica: Phys. Mech. Astron.* **43** 467 (in Chinese) [石敏, 王在华 2013 中国科学: **43** 467]
- [13] Yang J H, Zhu H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 024501 (in Chinese) [杨建华, 朱华 2013 物理学报 **62** 024501]
- [14] Gu R C, Xu Y, Zhang H Q, Sun Z K 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 110514 (in Chinese) [顾仁财, 许勇, 张慧清, 孙中奎 2011 物理学报 **60** 110514]

- [15] Cao J X, Ding H F, Li C P 2013 *Commun. Appl. Mathe. Comput.* **27** 61 (in Chinese)[曹建雄, 丁恒飞, 李常品 2013 应用数学与计算数学学报 **27** 61]
- [16] Jia H Y, Chen Z Q, Xue W 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 140503 (in Chinese) [贾红艳, 陈增强, 薛薇 2013 物理学报 **62** 140503]
- [17] Chen L C, Zhu W Q 2009 *J. Vib. Control.* **15** 1247
- [18] Huang Z L, Jin X L 2009 *J. Sound Vib.* **319** 1121
- [19] Yin H, Chen N 2012 *Chin. J. Comput. Mech.* **29** 966 (in Chinese)[银花, 陈宁 2012 计算力学学报 **29** 966]
- [20] Zhou C Y, Li G L, Zhang C, Chi B Y, Li D M, Wang Z H 2009 *J. Semicon.* **30** 075008
- [21] Wu R C, Hei X D, Chen L P 2013 *Commun. Theor. Phys.* **60** 189
- [22] Zhou G Q, Wang X G, Chu X X 2013 *Science China: Phys. Mech. Astron.* **56** 1487
- [23] Zeng F H, Li C P 2013 *Chin. J. Comput. Phys.* **30** 491 (in Chinese)[曾凡海, 李常品 2013 计算物理 **30** 491]
- [24] Li C P, Zhao Z G 2009 *J. Shanghai Univ. (Engl. Ed.)* **13** 197 (in Chinese)[李常品, 赵振刚 2009 上海大学学报 **13** 197]
- [25] Hu J B, Zhao L D, Xie Z G 2013 *Chin. Phys. B* **22** 080506
- [26] Rajneesh K, Vandana G 2013 *Chin. Phys. B* **22** 074601
- [27] Tian Y S 2013 *Acta. Mathe. Appl. Sin.* **29** 661
- [28] Liu D, Xu W, Xu Y 2013 *Acta. Mech. Sin.* **29** 443
- [29] Lan Y H, Li W J, Zhou Y, Luo Y P 2013 *Inter. J. Auto. Comput.* **10** 296
- [30] Kumar R, Gupta V 2013 *Chin. Phys. B* **22** 074601
- [31] Wang H Q 1992 *Nonlinear Vibration* (Bei Jing: Higher Education Press) p131 (in Chinese) [王海期 1992 非线性振动 (北京: 高等教育出版社) 第 131 页]
- [32] Leung A Y T, Yang H X, Guo Z J 2012 *J. Sound Vib.* **331** 1115
- [33] Sardar T, Ray S S, Bera R K, Biswas B B 2009 *Phys. Scr.* **80** 025003
- [34] Xie F, Lin X Y 2009 *Phys. Scr.* **136** 014033
- [35] Chu Y Q, Li C Y 1996 *Analysis of Nonlinear Vibrations* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) pp828–832 (in Chinese) [褚亦清, 李翠英 1996 非线性振动分析 (北京: 北京理工大学出版社) 第 828—832 页]

Super-harmonic resonance of fractional-order van der Pol oscillator*

Wei Peng Shen Yong-Jun[†] Yang Shao-Pu

(*Department of Mechanical Engineering, Shijiazhuang Tiedao University, Shijiazhuang 050043, China*)

(Received 4 September 2013; revised manuscript received 29 September 2013)

Abstract

The dynamical characteristics of super-harmonic resonance of van der Pol oscillator with fractional-order derivative are studied. First the approximate analytical solution are obtained by the averaging method, and the definitions of equivalent linear damping and equivalent linear stiffness for super-harmonic resonance are established. Effects of the fractional-order parameters on the dynamical characteristics of the system are also studied through the equivalent linear damping and equivalent linear stiffness. Moreover, the amplitude-frequency equation and the stability condition for the steady-state solution are analytically presented, and the definitions of equivalent nonlinear damping coefficient and nonlinear stability parameter are also established. Finally, the comparisons of the fractional-order and the traditional integer-order van der Pol oscillators are carried out by numerical simulation. The effects of the parameters in fractional-order derivative on the steady-state amplitude, the amplitude-frequency curves, and the system stability are also analyzed.

Keywords: fractional-order derivative, van der Pol oscillator, super-harmonic resonance, averaging method

PACS: 05.45.-a, 45.10.Hj

DOI: [10.7498/aps.63.010503](https://doi.org/10.7498/aps.63.010503)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11072158, 11372198), and the Program for New Century Excellent Talents in University of Ministry of Education of China (Grant No. NCET-11-0936).

[†] Corresponding author. E-mail: shenyongjun@126.com