

周期切换下 Rayleigh 振子的振荡行为及机理*

陈章耀[†] 雪增红 张春 季颖 毕勤胜

(江苏大学土木工程与力学学院, 镇江 212013)

(2013年9月17日收到; 2013年10月3日收到修改稿)

本文研究了自治与非自治电路系统在周期切换连接下的动力学行为及机理. 基于自治子系统平衡点和极限环的相应稳定性分析和切换系统李雅普诺夫指数的理论推导及数值计算. 讨论了两子系统在不同参数下的稳态解在周期切换连接下的复合系统的各种周期振荡行为, 进而给出了切换系统随参数变化下的最大李雅普诺夫指数图及相应的分岔图, 得到了切换系统在不同参数下呈现出周期振荡, 概周期振荡和混沌振荡相互交替出现的复杂动力学行为并分析了其振荡机理. 给出了切换系统通过倍周期分岔, 鞍结分岔以及环面分岔到达混沌的不同动力学演化过程.

关键词: 切换系统, 分岔, 周期切换, 混沌振荡

PACS: 05.45.-a, 05.45.pq

DOI: 10.7498/aps.63.010504

1 引言

近年来, 由于在物理、化学、航空航天、工程技术等领域涉及到了不同子系统之间的切换, 引起了国内外许多学者特别是控制领域专家的高度关注, 并在线性切换控制方面取得了大量的成果^[1-5]. 一般来说, 切换系统是由一族子系统和描述它们之间联系的切换规则组成, 诸如机器人系统^[6]、电力系统^[7]、汽车引擎控制系统^[8]、智能交通控制系统^[9]、心脏跳动过程^[10]等等. 按切换规则, 切换系统一般分为两类, 一是定义于时域上的时间切换, 二是定义于空间域上的状态切换, 当然也可以是两种切换的组合. 切换系统中存在大量特殊的非线性因素, 许多学者又进行了非线性行为及复杂性的研究^[11-14]. 不同子系统之间的切换会导致各种复杂的动力学行为, 即便是结构相对简单的子系统, 通过选择适当的切换条件会产生不同的振荡现象甚至混沌, 这些子系统可以是线性系统, 也可以是非线性系统, 可以是相同子系统间的切换, 也可以是不同子系统间的切换. 而不同非线性子系统间的切

换目前研究较少, 只是针对具体问题取得了一些成果. 如马新东等考察了两 Jeck 电路系统间点/环、环/环周期切换的复杂行为及其机理^[15].

在周期切换系统中, 由于涉及到切换条件即不连续性, 增加了计算非光滑系统的难度, 同时又是自治子系统和非自治子系统间的切换, 李雅普诺夫指数的计算就不能沿用光滑系统的计算方法, 必须采用复合系统的包含理论等, 具有一定的难度. 本文研究的是两个非线性系统中的自治子系统和非自治子系统的切换, 其切换方式为周期切换.

近年来人们在 Rayleigh 电路系统的基础上, 通过改变电路结构, 建立了各种广义 Rayleigh 电路系统, 并分析了其在不同条件下的振荡特性^[16-18]. 本文在此基础上建立了三阶自治与非自治广义 Rayleigh 振子在时间切换规则下的电路模型.

2 数学模型

如图 1 所示, S 是一个双向开关, 当开关 S 置于 a 端, 对应于自治子系统, 该系统由额定电阻 r 、非线性电阻 R_{N1} 、电感 L 、两个电容器 $C_1 = C_2 = C$ 、

* 国家自然科学基金(批准号: 21276115, 11302086)、江苏省 2013 年普通高校研究生科研创新计划项目(批准号: CXZZ13-0653)和镇江市科技攻关项目(GY2012020, GY2013032)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: zychen@ujs.edu.cn

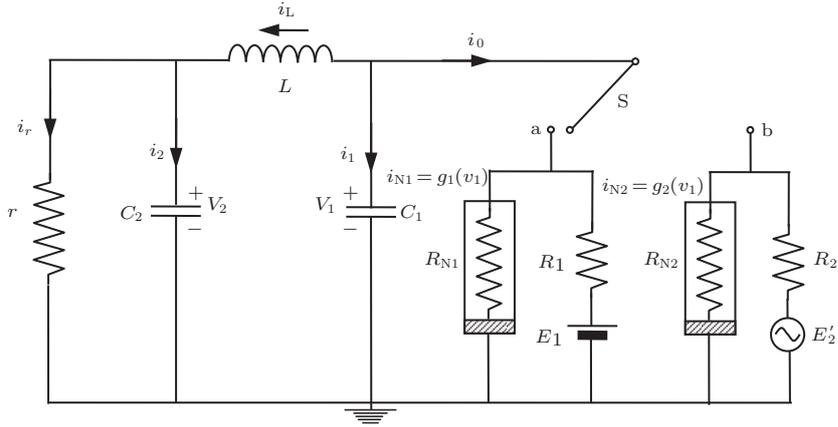


图1 切换系统电路图

可调电阻 R_1 和直流源 E_1 构成的电路; 当开关置于 b 端, 对应于非自治子系统, 该系统由额定电阻 r 、非线性电阻 R_{N2} 、电感 L 、两个电容器 $C_1 = C_2 = C$ 、可调电阻 R_2 和交流电源 $E_2 = E \cos(\Omega t)$ 构成的电路. 所涉及的非线性电阻其电流 $i_{N1,2}$ 和电压 v_1 满足

$$g_{1,2}(v_1) = \frac{1}{3}k_{1,2} \left(\frac{v_1}{R_{1,2}} \right)^3,$$

其中 $k_{1,2}$ 表示电导率.

当开关分别置于 a, b 端, 根据基尔霍夫电流及电压守恒定律可建立如下方程:

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= v_1 - v_2, \\ C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -i_L - \frac{v_1 - E_1}{R_1} - g_1(v_1), \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= i_L - \frac{v_2}{r}. \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} L \frac{di_L}{dt} &= v_1 - v_2, \\ C_1 \frac{dv_1}{dt} &= -i_L - \frac{v_1 - E_2 \cos(\Omega t)}{R_2} - g_2(v_1), \\ C_2 \frac{dv_2}{dt} &= i_L - \frac{v_2}{r}. \end{aligned} \quad (2)$$

令

$$\begin{aligned} x &= \frac{i_L}{e}, \quad y = \frac{v_1}{e} \sqrt{\frac{C}{L}}, \quad z = \frac{v_2}{e} \sqrt{\frac{C}{L}}, \\ t &= \sqrt{LC} \tau, \quad \alpha = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}, \quad g_{1,2} = \frac{1}{R_{1,2}} \sqrt{\frac{L}{C}}, \\ B_{1,2} &= \frac{E_{1,2}}{eR_{1,2}}, \quad k_{1,2} e^2 \left(\frac{1}{R_{1,2}} \sqrt{\frac{L}{C}} \right)^3 = 1, \\ \omega &= \Omega \sqrt{LC}, \end{aligned}$$

则方程 (1), (2) 无量纲化得到如下数学模型:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y - z, \quad \dot{y} = -x - g_1 y - y^3/3 + B_1, \\ \dot{z} &= x - \alpha z, \quad \tau \in [i(T_1 + T_2), i(T_1 + T_2) + iT_1], \\ \dot{x} &= y - z, \quad \dot{y} = -x - g_2 y - y^3/3 + B_2 \cos(\omega \tau), \\ \dot{z} &= x - \alpha z, \\ \tau &\in [i(T_1 + T_2) + iT_1, (i+1)(T_1 + T_2)], \\ i &= 0, 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (3)$$

其中: T_1, T_2 分别表示在自治子系统、非自治子系统中的运动周期.

3 子系统的分岔分析

由于切换系统 (3) 涉及到两个向量场, 因此要对子系统的各种平衡态及其相应的稳定性进行分析, 并给出不同的失稳条件及其相应的分岔行为.

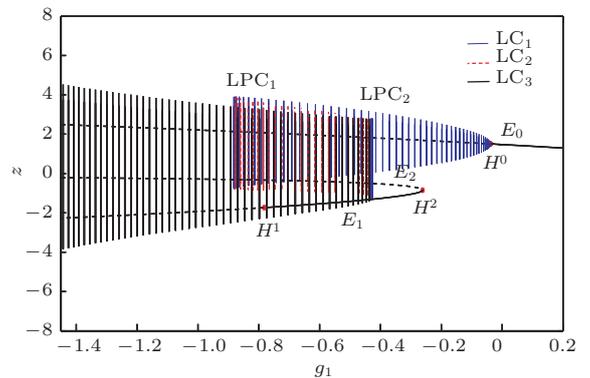


图2 自治子系统平衡点随参数 g_1 变化及其分岔图

图2 给出了当 $\alpha = -0.45, B_1 = 0.4$ 时自治子系统随着参数 g_1 变化的平衡点失稳及其分岔机理. 当 $g_1 < -0.261$ 时, 自治子系统存在三个平衡点

E_0, E_1, E_2 , 其中实线表示稳定的焦点, 虚线表示不稳定的焦点, 点 H^1, H^2 为稳定焦点 E_1 的 Hopf 分岔点, 同时在 H^2 处稳定焦点 E_1 和不稳定焦点 E_2 发生 fold 分岔碰撞消失仅有不稳定的焦点 E_0 存在. 随着 g_1 的减小, 当 g_1 穿过 H^0 ($g_1 = -0.0369$) 时, 稳定的焦点 E_0 失稳经由 Hopf 分岔产生稳定的周期解 LC_1 . 而当 $g_1 \in [-0.880, -0.427]$ 时, 自治子系统同时存在两个稳定的周期解 LC_1, LC_3 和一个不稳定的周期解 LC_2 . 当 $g_1 = -0.880$ 时, 稳定的周期解 LC_1 与不稳定周期解 LC_2 经由鞍结分岔 LPC_1 碰撞消失只剩下稳定的周期解 LC_3 , 而当 $g_1 = -0.427$ 时, 不稳定的周期解 LC_2 与稳定周期解 LC_3 经由鞍结分岔 LPC_2 碰撞消失只剩下稳定的周期解 LC_2 . 这种子系统的分岔行为对于揭示整个切换系统的动力学振荡机理有着重要的意义.

对于非自治子系统, 在切换系统中固定参数 $B_2 = 1.0, \omega = 2\pi, g_2 = 0.6$, 此时该子系统是一个暂态运动缓慢收敛于周期解的运动.

4 切换系统的 Lyapunov 指数计算及动力学行为分析

4.1 Lyapunov 指数计算

对于平衡点和周期运动, 很多学者常用系统在平衡点的 Jacobi 矩阵特征值实部以及周期运动扰动方程的特征指数实部来判断其稳定性. Lyapunov 指数是对上述特征值和特征指数的一种推广, 给出了对系统任意相邻相轨线平均发散程度或平均收敛程度的一种度量. 因此, 它可以度量系统吸引子的稳定性, 甚至成为划分吸引子类型的判据, 如平衡点、周期运动、概周期运动及混沌运动等吸引子, 是目前判断各种动力学运动最可靠的一种定量方法. 对于切换系统李雅普诺夫指数的计算不能直接使用连续系统的方法, 这里采用 Poincaré 映射方法, 对于切换部分, 使用复合映射及复合映射的链式法进行计算. 在具体计算时对于自治子系统和非自治子系统的切换, 要进行必要的处理.

设 $\varphi_1(x, \tau), \varphi_2(x, \tau)$ 分别为切换系统 (3) 中两子系统的解, 由于整个系统是由周期时间切换信号连接的时间切换系统, 因此存在两个局部超曲面

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \bigcup_{i=0}^{\infty} \{(x, \tau) \in R^3 \times R^1 | \tau \\ &= (i+1)T_1 + iT_2\}. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \Pi_2 &= \bigcup_{i=0}^{\infty} \{(x, \tau) \in R^3 \times R^1 | \tau \\ &= (i+1)(T_1 + T_2)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

取定相位面 Π_1 为 Poincaré 截面.

由于整个系统的轨道由两个系统交替控制, 从而 Poincaré 映射可以分割成两部分:

$$P = P_2 \circ P_1, \quad (6)$$

其中 P_1 :

$$\begin{aligned} \Pi_1 &\rightarrow \Pi_2, \\ x &\mapsto x' = \varphi_1(T_1, x_0), \end{aligned} \quad (7)$$

P_2 :

$$\begin{aligned} \Pi_2 &\rightarrow \Pi_1, \\ x &\mapsto \varphi_2(T_2, x') \\ &= \varphi_2(T_2, \varphi_1(T_1, x_0)) \\ &= \varphi_2 \circ \varphi_1(T_1 + T_2, x_0). \end{aligned} \quad (8)$$

因此对整个系统的周期解的存在性及其相应的分岔转化为对下述离散系统

$$P(x_0) - x_0 = 0$$

的不动点及其分岔的研究.

在计算非线性切换动力系统的 Lyapunov 指数时, 我们采用 Poincaré 映射方法, 即应用 (6) 式所描述的 Poincaré 映射 P 将 3 维切换系统 (3) 转化为 3 维的离散动力系统

$$x^{(k)} = P(x^{(k-1)}), \quad x \in R^3, k = 1, 2, \dots, N. \quad (9)$$

注意到在 $(k-1)$ 时刻, 若基准轨道 $x^{(k-1)}(x^0)$ 和邻近轨道 $x^{(k-1)}(x^0 + \delta x^0)$ 的距离 $\delta x^{(k-1)} = x^{(k-1)}(x^0 + \delta x^0) - x^{(k-1)}(x^0)$ 充分小时 (9) 式在 $x^{(k-1)}$ 处的线性化方程

$$\delta x^{(k)} = DP(x^{(k-1)}) \delta x^{(k-1)}. \quad (10)$$

这里由于 (6) 式为 Poincaré 映射的复合映射, 故 DP 由复合映射求导的链式法则

$$DP = DP_2 \times DP_1 \quad (11)$$

求得.

由 (10) 式递推得到

$$\begin{aligned} \delta x^{(k)} &= DP^k(x^{(0)}) \delta x^{(0)}, \\ x &\in R^3, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (12)$$

式中

$$\begin{aligned} DP^k(x^{(0)}) &= DP(x^{(k-1)}) \times DP(x^{(k-2)}) \\ &\times \dots \times DP(x^{(0)}). \end{aligned} \quad (13)$$

由此离散系统可以得到整个切换系统的 Lyapunov 指数

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \ln |DP^k(x^{(0)})|. \quad (14)$$

通过以上分析, 作者编写了切换系统的最大 Lyapunov 指数的程序对切换系统进行了数值模拟见图 3(b).

4.2 动力学行为及分岔分析

由于切换条件的引入, 导致整个系统轨迹轮流受到不同向量场的控制, 从而引起丰富的动力学特性. 为深入分析该切换系统的动力学特性, 固定参数 $\alpha = -0.45$, $B_1 = 0.4$, $B_2 = 1.0$, $\omega = 2\pi$, $g_2 = 0.6$, $T_1 = 10.0$, $T_2 = 4.0$, 取 g_1 为分岔参数, 切换周期 $T = T_1 + T_2$, 考察整个系统随参数 g_1 变化时的动力学演化过程. 显然在此参数条件下, 非自治

子系统存在稳定的周期解, 而当 $-1.45 < g_1 < 0.2$ 时, 随着初始点的改变, 自治子系统存在多个稳态解(稳定的焦点、各种不同振幅的稳定周期解)见图 2. 而切换系统中, 切换过程都与子系统的稳定焦点、极限环有关.

图 3 给出了切换系统(3)的分岔图及其相应的最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} 图. 一般地, 对于非光滑动力系统的周期解, 如果存在一个正的 Lyapunov 指数, 则系统处于混沌状态; 如果所有的 Lyapunov 指数均为负值, 则系统存在渐近稳定周期解; 如果最大 Lyapunov 指数等于零, 而其他的 Lyapunov 指数均为负值, 则该系统周期解将发生分岔. 结合分岔图以及相应的最大 Lyapunov 指数 λ_{\max} 图可以看出该切换系统存在丰富的动力学行为. 这里我们选取一些典型的区域来揭示该切换系统随参数变化的分岔机理及其特殊振荡的产生机理.

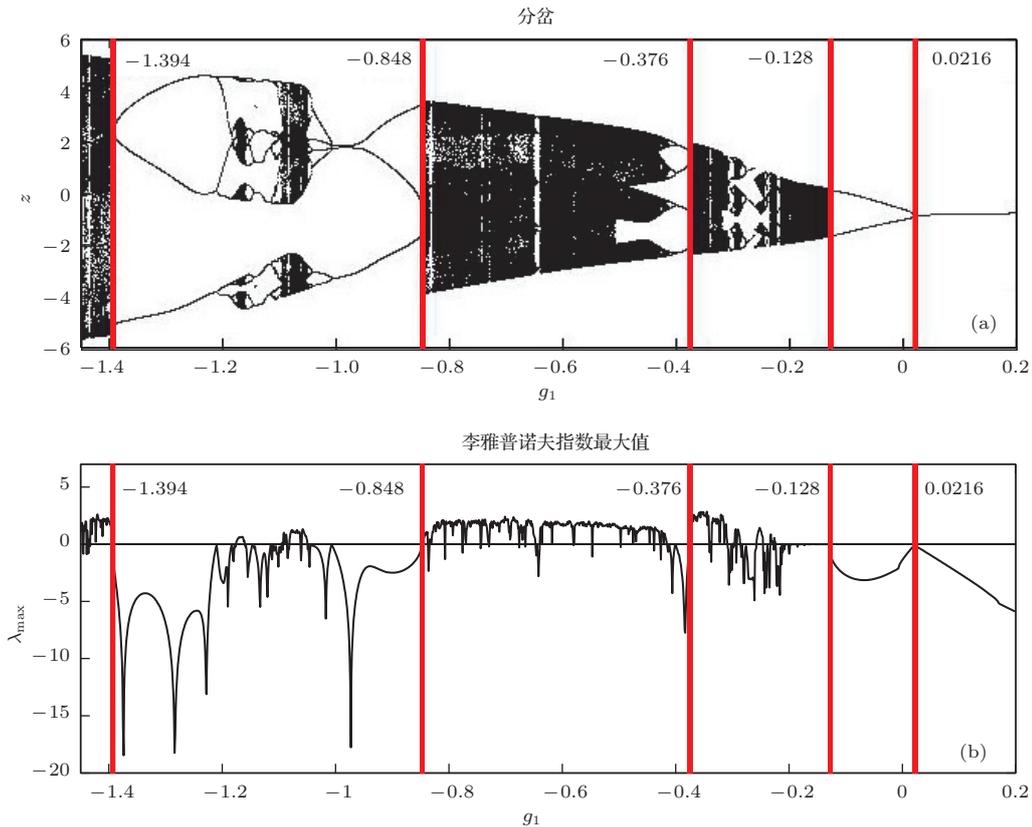


图 3 切换系统分岔图与相应最大李雅普诺夫指数图

倍周期分岔 从分岔图 3(a)中可以看出, 当分岔参数 $g_1 = 0.0216$ 时, 切换系统的周期 1 振荡失稳发生倍周期分岔演变成周期 2 振荡, 且为点/环切换. 随着参数 g_1 的减小, 当 $g_1 = -0.0369$ 时, 自治子系统发生超临界 Hopf 分岔产生一围绕平

衡点 E_0 的稳定极限环, 而非自治子系统仍为稳定周期解, 切换系统呈现为环/环切换. 当参数 $g_1 \in (-1.394, -0.848)$ 时, 随着 g_1 的增加, 切换系统的周期 3 振荡失稳经由倍周期分岔序列演变成混沌振荡, 随着 g_1 的继续增加, 切换系统中位于相空

间中的某两个切换点重合导致混沌振荡经由倒倍周期分岔序列演变成周期6振荡周期6振荡再次经由倍周期分岔序列通向混沌, 随后切换系统多次出现周期振荡、倍周期分岔或倒倍周期分岔等动力学演化过程从相应的最大李雅普诺夫指数图也可以发现, 发生倍周期分岔时, 李雅普诺夫指数等于零或接近为零, 离开分岔点时若最大李雅普诺夫指数小于零说明出现周期振荡, 若最大李雅普诺夫指数大于零说明出现了混沌振荡.

鞍结分岔 当分岔参数 $g_1 = -1.394$ 时, 切换系统的最大李雅普诺夫指数 λ_{\max} 为零(见图3(b)), 并且通过数值计算, 周期解的最大模数的 Floquet 特征乘子沿正向穿越单位圆, 表明在该点处周期3解失稳发生鞍结分岔通向混沌. 同理, 当分岔参数 $g_1 = -0.848$ 和 $g_1 = -0.376$ 时切换系统发生倒鞍结分岔位于相空间中的某两切换点重合使其混沌振荡演变成稳定的周期3解和周期4解, 相应的最大李雅普诺夫指数 λ_{\max} 在该点两侧异号, 若大于零则表现为混沌振荡, 若小于零则表现为周期振荡(见图3).

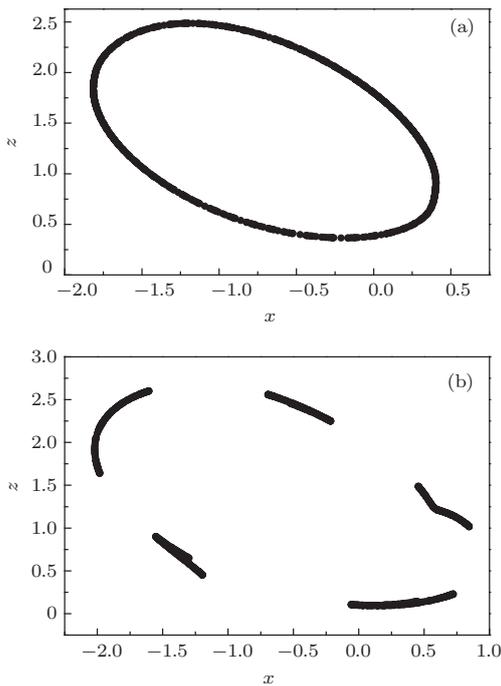


图4 切换系统 Poincaré 截面 (a) $g_1 = -0.18$ 概周期解; (b) $g_1 = -0.25$ 混沌解

Neimark-Sacker 分岔与环面分岔 当参数 $g_1 \in (-0.25, -0.128)$ 时, 切换系统的切换点均位于相空间中的某固定环上, 图4(a)显示了 Poincaré 环面的封闭曲线, 并且在该区间内其相应的最大李雅普诺夫指数为零或接近于零(见图3(b)), 即在分岔参数 $g_1 = -0.128$ 处周期2解失稳发生

Neimark-Sacker 分岔演变成概周期振荡. 随着分岔参数 g_1 的减小, 在 $g_1 = -0.218$ 处稳定环面破裂(见图4(b)), 其相应的最大李雅普诺夫指数 λ_{\max} 开始大于零, 即在该点处发生环面分岔概周期解演变成混沌解. 除此之外, 在概周期振荡区域内多次出现周期窗口, 相应的最大李雅普诺夫指数 $\lambda_1 = 0$ 与 $\lambda_1 < 0$ 相互交替出现, 存在诸如7周期解、10周期解等多周期振荡和概周期振荡相互交替出现的情形.

由此可知, 两个自治和非自治子系统在周期切换下呈现出多种动力学行为, 出现了三种通向混沌的道路, 即倍周期分岔导致的混沌, 鞍结分岔和环面分岔导致的混沌, 与之对应的最大李雅普诺夫指数发生变化, 倍周期分岔负零负正、鞍结分岔负零正、环面分岔零零正.

对于切换系统有着与光滑连续系统不同的动力学行为, 对于出现这些动力学行为有着它们不同的机理.

5 切换系统周期解的振荡机理

5.1 两切换点周期一解的振荡机理

取定参数 $\alpha = -0.45$, $B_1 = 0.4$, $g_1 = 0.1$, $B_2 = 1.0$, $\omega = 2\pi$, $g_2 = 0.6$, 自治子系统表现为稳定的焦点, 而非自治子系统表现为稳定的周期解, 则切换系统呈现出点/环切换(见图5(a), (b)), 存在两个不同的切换点A和B, 分别指向两子系统. 假设该周期切换从自治子系统开始振荡, 即在 $[0, T_1]$ 时间内, 切换系统受自治子系统控制, 所以从起点A(-0.120, 0.162) 开始, 轨迹将会在自治子系统的向量场作用下运动, 即沿着轨迹ACB旋转, 在未达到切换条件时, 轨迹一直在自治子系统内振荡并趋向稳定的焦点 $E_0(-0.700, 1.556, 1.556)$, 但是当轨迹运动到点B(-0.777, 1.147) 时, 满足周期切换条件, 即时间 $\tau = T_1$, 切换系统将转向非自治子系统, 轨迹受非自治子系统的向量场控制, 即以切换点B为初值, 进入非自治子系统轨道, 在 $[T_1, T_1 + T_2]$ 时间内, 轨迹将一直在非自治子系统内振荡并趋向其稳定的极限环, 但是当 $\tau = T_1 + T_2$ 时, 周期切换条件重新满足, 此时轨迹刚好重新回到切换点A, 导致切换系统再次以A为初值, 受自治子系统控制, 趋于该子系统的稳定焦点. 上述过程重复进行, 切换点成对出现, 故切换系统的振荡周期为 $T = T_1 + T_2$ (见图5(c)).

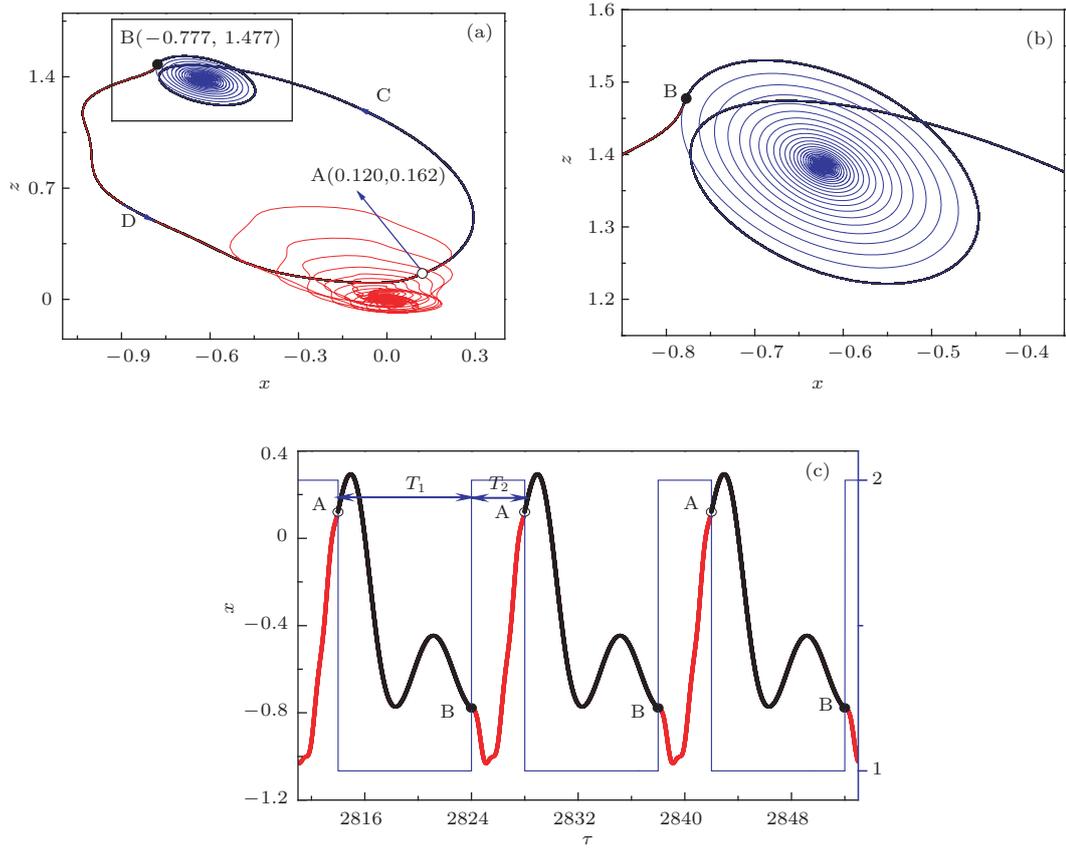


图5 $g_1 = 0.1$ 时的周期解 (a) 平面相图; (b) 局部放大图; (c) 时间历程

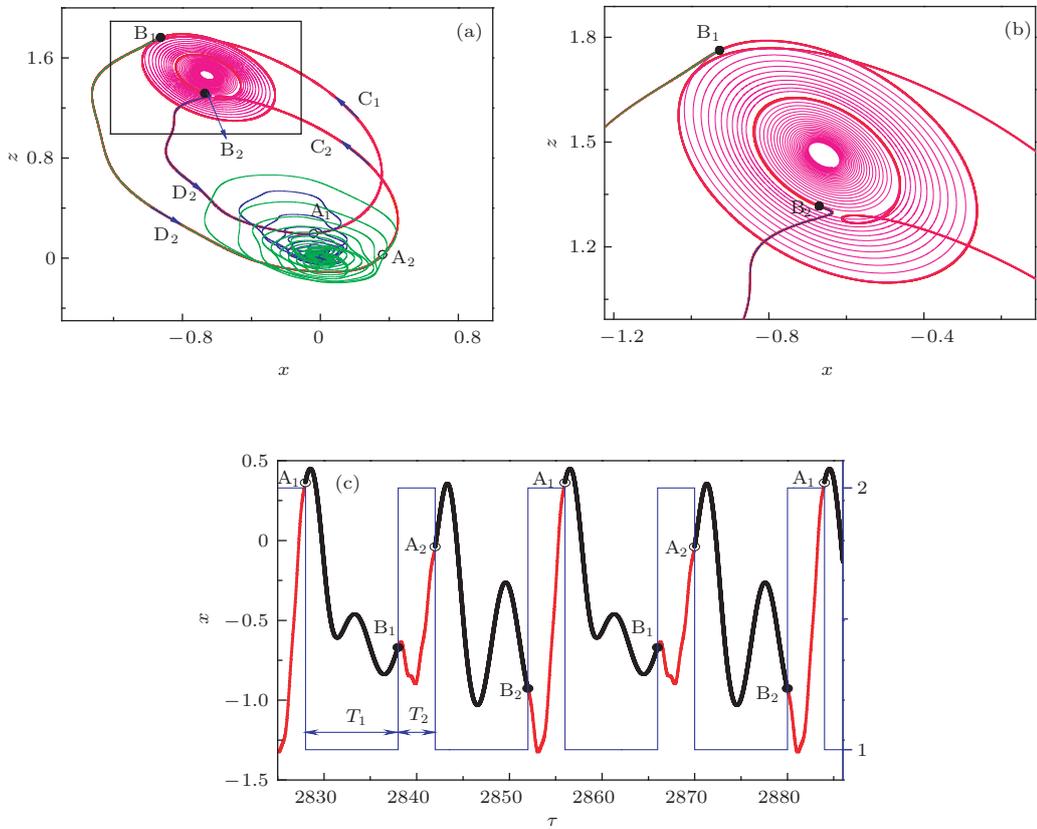


图6 $g_1 = 0.01$ 时的周期解 (a) 平面相图; (b) 局部放大图; (c) 时间历程

5.2 切换系统 k -周期解的振荡机理

随着参数的变化, 切换系统的轨道失稳发生倍周期分岔, 周期1振荡演变成周期2振荡. 对于周期 $2(T_1 + T_2)$ 振荡解(见图6(a), (b))而言, 假设切换系统从自治子系统开始振荡, 不妨取 A_1 点为切换系统轨迹起始点, 在 T_1 时间内, 切换系统受自治子系统控制, 即轨沿迹 $A_1C_1B_1$ 向自治子系统的焦点逼近, 经过时间 T_1 后, 轨迹经过 C_1 运动到 B_1 点, 此时满足时间切换条件, 轨迹开始受到非自治子系统控制, 即以 B_1 点为初值, 沿着轨迹 $B_1D_1A_2$ 向非自治子系统的稳定极限环逼近. 由于参数 g_1 值的变化, 自治子系统的轨迹失稳发生变换, 使得其在 $T_1 + T_2$ 时刻轨迹无法回到起始点 A_1 , 即切换系统在 $[0, T_1 + T_2]$ 时间内无法在一组切换点下反复振荡, 达到稳定的周期解.

经过 $T_1 + T_2$ 时间后, 切换系统受自治子系统控制, 其轨迹以 A_2 为起始点, 沿轨迹 $A_2C_2B_2$ 重新向自治子系统的焦点逼近, 经过 $2T_1 + T_2$ 时间后, 切换系统再一次满足时间切换条件, 进行相应的切换, 此时切换系统开始受非自治子系统控制, 即沿着轨迹 $B_2D_2A_1$ 向非自治子系统的稳定极限环逼近, 经过 $2(T_1 + T_2)$ 时间后, 其轨迹回到初始点 A_1 , 从而就构成了一个封闭的2周期切换系统的 $2(T_1 + T_2)$ 解(见图6(c)).

切换系统的3周期, 4周期等 k -周期解振荡行为与上述周期2解的振荡过程类似.

6 结 论

在不同的参数条件下, 子系统呈现出不同的稳态解和闭轨的鞍结分岔解, 当两子系统存在周期切换时, 子系统的行为直接影响到切换系统的吸引子结构, 导致诸如周期振荡、概周期振荡等复杂的特性, 并随着参数的变化产生不同的混沌途径.

参考文献

- [1] Xie G M, Wang L 2005 *J. Math. Anal. Appl.* **305** 277
- [2] Santis E D 2011 *Syst. Control Lett.* **60** 807
- [3] Cheng D Z 2004 *Syst. Control Lett.* **51** 79
- [4] Liu F, Song Y D 2011 *Syst. Control Lett.* **60** 787
- [5] Hu H, Jiang B, Yang H 2013 *Signal Processing* **93** 1804
- [6] Yildirim H, Frank G, Bernard B 2004 *Automatica* **40** 1647
- [7] Dalvi A, Guay M 2009 *Control Eng. Pract.* **17** 924
- [8] Wyczalek F A 2001 *IEEE Aero. El. Sys. Mag.* **16** 15
- [9] Varaiya P P 1993 *IEEE T. Automat. Contr.* **38** 195
- [10] Zhang W, Yu P 2000 *J. Sound Vib.* **231** 145
- [11] Yu Y, Zhang C, Han X J, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 200507 (in Chinese) [余跃, 张春, 韩修静, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 200507]
- [12] Zhang C, Han X J, Bi Q S 2013 *Nonlinear Dyn.* **73** 29
- [13] Zhang C, Han X J, Bi Q S 2012 *Chin. Phys. B* **21** 100501
- [14] Margallo J G, Bejarano J D 1992 *J. Sound Vib.* **156** 283
- [15] Ma X D, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 240506 (in Chinese) [马新东, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 240506]
- [16] Cveticanin L, Abd El-Latif G M, El-Naggar A M, Ismail G M 2008 *J. Sound Vib.* **318** 580
- [17] Kousaka T, Ueta T, Ma Y, Kawakami H 2006 *Chaos Solitons Fract.* **27** 1019
- [18] Wu T Y, Zhang Z D, Bi Q S 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 070502 (in Chinese) [吴天一, 张正娣, 毕勤胜 2012 物理学报 **61** 070502]

Oscillation behaviors and mechanism of Rayleigh oscillator with periodic switches*

Chen Zhang-Yao[†] Xue Zeng-Hong Zhang Chun Ji Ying Bi Qin-Sheng

(Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China)

(Received 17 September 2013; revised manuscript received 3 October 2013)

Abstract

A system, which alternates between autonomous and non-autonomous circuit systems observing the time periodic switched rules, is investigated in order to explore its complicated dynamical behaviors. By analyzing the equilibrium point, limiting cycles, and the stability of the autonomous subsystems, as well as deriving the Lyapunov exponents of the switching systems in theory and numerical calculation, we have studied the variation of periodic oscillation behaviors of the compound systems with different stable solutions to the two subsystems. By using the bifurcation diagram of the switched systems and their corresponding largest Lyapunov exponent diagrams, we can observe the complex dynamical behaviors and oscillating mechanism of alternating periodic oscillations, quasi-periodic oscillations and chaotic oscillations with different parameters in the switched systems. Furthermore, dynamical evolutions of the switching system to chaos by period-doubling bifurcations, saddle-node bifurcations and torus bifurcations are observed.

Keywords: switching system, bifurcation, periodic oscillations, chaotic oscillations

PACS: 05.45.-a, 05.45.pq

DOI: [10.7498/aps.63.010504](https://doi.org/10.7498/aps.63.010504)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 21276115, 11302086), the Scientific Research Innovation Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. CXZZ13-0653), and the Scientific and Technological Foundation of Zhenjiang, China (Grant Nos. GY2012020, GY2013032).

[†] Corresponding author. E-mail: zychen@ujs.edu.cn