

双频信号驱动含分数阶内、外阻尼 Duffing 振子的振动共振*

张路¹⁾²⁾ 谢天婷¹⁾ 罗懋康^{1)†}

1) (四川大学数学学院, 成都 610065)

2) (电子信息控制重点实验室, 成都 610036)

(2013 年 8 月 30 日收到; 2013 年 10 月 12 日收到修改稿)

本文利用解析和数值的方法研究了由双频周期信号驱动含分数阶内、外阻尼的 Duffing 振子的振动共振现象, 并讨论了分数阶阶数对上述现象的影响. 研究发现: 双频周期信号同时驱动的分阶 Duffing 振子响应幅值增益 Q 可随着高频周期激励幅值的改变达到最大值, 即出现了和整数阶非线性动力系统相似的振动共振现象, 而相应的分数阶导数项则分别为系统提供了内、外两种阻尼力从而导致了系统有效势函数的改变, 进而引发了比整数阶动力系统更为丰富的振动共振现象.

关键词: 振动共振, Duffing 振子, 分数阶阻尼, 分数阶系统

PACS: 05.45.-a, 05.90.+m

DOI: 10.7498/aps.63.010506

1 引言

振动共振 (vibration resonance) 现象最早是由 Landa 和 McClintock 于 2000 年提出来的^[1], 他们将随机共振 (stochastic resonance) 模型中的噪声源用高频周期信号替代后发现随着高频周期信号幅值的逐渐增大, 系统响应幅值增益会出现和随机共振现象^[2]相似的共振峰. 由于双频周期信号在数学、物理及工程系统中普遍存在^[3], 因此这类由双频信号引发的振动共振现象逐渐受到学者的重视, 并在多种系统中讨论^[4–10]. 与此同时, 近年来, 以分数阶微积分为基础的分数阶动力学已逐步渗透到振动力学的许多问题中, 在这些问题中用分数阶模型描述的结果往往比传统的整数阶模型能更精确地模拟现实问题^[11].

经典的整数阶受迫阻尼振动方程可以描述为

$$m\ddot{x} = -g(x, t) - V(x) + f(t), \quad (1)$$

其中, m 表示物体的质量, $m\ddot{x}$ 表示惯性力, $V(x)$

表示物体所受势场力, $f(t)$ 表示外激励力. 这里的整数阶振动方程只能通过理想瑞利比例阻尼形式 $g(x, t) = -\delta\dot{x}$ 描述物体所受的外部阻尼力, 而这种阻尼一般适用于水等纯黏性液体, 在描述具有记忆特征的介质 (如磁流变液、黏弹性介质等) 的力学行为时并不准确. 为此有学者提出用分数阶导数来描述这些阻尼材料中的阻尼振动^[12,13], 即在 (1) 式中将 $g(x, t)$ 取定为用分数阶导数 $-\delta d^\alpha x / dt^\alpha$ 表示的分数阶外阻尼力. 另一方面, 由黏弹性材料构成的振子在振动过程中会消耗能量从而使得振子作阻尼振动, 这种振子本身产生的阻尼力被称为内在的阻尼力^[14], 以便区别于由外在摩擦力产生的外阻尼力. 已有一些学者提出采用分数阶导数可以更好地描述内在阻尼力带来的动力学效应^[14–17], 即将 (1) 式的 $m\ddot{x}$ 修正为用分数阶导数 $md^p x / dt^p$ ($1 < p \leq 2$) 表示的分数阶内部阻尼力.

不过, 目前还少有文献讨论分数阶系统的振动共振现象, 而关于振动共振的一个最新研究进展是 Yang 和 Zhu 在文献^[18]中讨论了具有分数阶外阻

* 国家自然科学基金 (批准号: 11171238) 和国家自然科学基金创新研究群体科学基金 (批准号: 11221101) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: makaluo@scu.edu.cn

尼项的 Duffing 振子的振动共振现象. 本文将讨论更一般的情况, 即如下的同时具有分数阶内、外两种阻力项的 Duffing 振子的振动共振现象:

$$\begin{aligned} d^p x / dt^p = & -\delta d^q x / dt^q - V(x) + f \cos \omega t \\ & + F \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $f \ll F$, $\omega \ll \Omega$, $\beta > 0$. $d^p x / dt^p$ 和 $-\delta d^q x / dt^q$ 分别表示记忆性材料构成的振子所产生的分数阶内部阻尼力和它所受到分数阶外部阻尼力, 并且这里的分数阶导数定义选用 Caputo 型分数阶导数的定义^[19]. $V(x) = \omega_0^2 x^2 / 2 + \beta x^4 / 4$ 为系统的势函数. 特别地, 当 $p = 2$, $q = 1$, 系统即为传统的欠阻尼 Duffing 系统; 当 $p = 0$, $q = 1$, 系统即为传统的过阻尼 Duffing 系统.

2 分数阶 Duffing 振子的输出响应

我们首先利用快慢变量分离法推导方程 (2) 的输出响应, 不妨设 $x(t) = X(t) + \Psi(t)$, 其中 $X(t)$ 是以 $2\pi/\omega$ 为周期的慢变量, $\Psi(t)$ 是“快”时间变量 $\tau = \Omega t$ 的以 2π 为周期的快变量, 并且 $\Psi(t)$ 对时间 τ 的平均为 0, 即满足

$$\overline{\Psi(t, \tau)} = \int_0^{2\pi} \Psi(t, \tau) d\tau / 2\pi = 0.$$

将代入方程 (2) 并对方程两边取平均可分别得到慢、快变量所满足的微分方程

$$\begin{aligned} d^p X / dt^p + \delta d^q X / dt^q + \omega_0^2 X \\ + \beta (X^3 + 3X\overline{\Psi^2} + \overline{\Psi^3}) \\ = f \cos \omega t \end{aligned} \quad (3a)$$

$$\begin{aligned} d^p \Psi / dt^p + \delta d^q \Psi / dt^q + \omega_0^2 \Psi \\ + \beta (3X^2 \Psi + 3X(\Psi^2 - \overline{\Psi^2}) + \Psi^3 - \overline{\Psi^3}) \\ = F \cos \Omega t, \end{aligned} \quad (3b)$$

其中, $\overline{\Psi^k} = \int_0^{2\pi} \Psi^k(t, \tau) d\tau / 2\pi$.

由于 $\Psi(t)$ 是一个快速变化的量, 我们可以假设 $\dot{\Psi} \gg \Psi^2, \Psi^3$. 因此在方程 (3b) 中略去和 Ψ^2, Ψ^3 有关的非线性项后, 并对此方程线性化可得到快变量 $\Psi(t)$ 所满足的线性方程为

$$d^p \Psi / dt^p + \delta d^q \Psi / dt^q + \omega_0^2 \Psi = F \cos \Omega t. \quad (4)$$

不妨设 $\Psi(t) = F \cos(\Omega t + \theta_{p,q}) / \mu_{p,q}$, 代入 (4) 式并利用公式 $d^\alpha \cos(\Omega t + \theta) / dt^\alpha = \Omega^\alpha \cos(\Omega t + \theta +$

$\alpha\pi/2)$ 化简可得

$$\begin{aligned} \mu_{p,q} &= \sqrt{(A_{p,q})^2 + (B_{p,q})^2}, \\ \theta &= -\arctan(B_{p,q}/A_{p,q}), \end{aligned} \quad (5)$$

其中,

$$\begin{aligned} A_{p,q} &= \omega_0^2 + \Omega^p \cos(p\pi/2) + \delta \Omega^q \cos(q\pi/2), \\ B_{p,q} &= \Omega^p \sin(p\pi/2) + \delta \Omega^q \sin(q\pi/2). \end{aligned} \quad (6)$$

又由快变量的表达式可得 $\overline{\Psi^2} = F^2 / (2\mu_{p,q}^2)$, $\overline{\Psi^3} = 0$, 代入方程 (3a) 可得慢变量所满足的方程为

$$\begin{aligned} d^p X / dt^p + \delta d^q X / dt^q + C_{p,q}(F)X + \beta X^3 \\ = f \cos \omega t, \end{aligned} \quad (7)$$

其中, $C_{p,q}(F) = 3\beta F^2 / (2\mu_{p,q}^2) + \omega_0^2$. 于是, 系统 (7) 的有效势场势函数为

$$V_{F,p,q}(x) = C_{p,q}(F)x^2/2 + \beta x^4/4. \quad (8)$$

因此, 系统 (7) 也可以理解为物体在其有效势场 $V_{F,p,q}(x)$ 中所作的受迫振动. 当时, 若 $C_{p,q}(F) = 0$ (即 $F = F_{p,q} = [2(\mu_{p,q})^2 |\omega_0^2| / (3\beta)]^{1/2}$), $V_{F,p,q}(x)$ 是一个单稳势函数, 系统 (7) 只有一个平衡点 $X_0^* = 0$; 若 $C_{p,q}(F) \neq 0$ (即 $F \neq F_{p,q}$), $V_{F,p,q}(x)$ 是一个双稳势函数, (7) 式有三个平衡点: $X_0^* = 0$, $X_\pm^* = \pm \sqrt{-C_{p,q}(F)/\beta}$.

从下面的讨论中, 我们将看到系统的振动共振现象和这里的有效势场 $V_{F,p,q}(x)$ 的形态密切相关: 1) 当 $\omega_0^2 < 0$ 时, 原系统 (2) 的势函数 $V(x)$ 是一个双势阱函数. 而系统 (7) 有一个分岔点 $F_{p,q}$, 即当 $F < F_{p,q}$ 时, 势函数 $V_{F,p,q}(x)$ 是一个双稳势函数, 系统 (7) 有一个不稳定的平衡点 X_0^* 和两个稳定的平衡点 $X_\pm^*$, 系统的输出响应中的慢变量将围绕平衡点 $X_\pm^*$ 振动; 当 $F \geq F_{p,q}$ 时, 势函数 $V_{F,p,q}(x)$ 是一个单稳势函数, 系统 (7) 只有一个稳定的平衡点 X_0^* , 系统的输出响应中的慢变量将围绕平衡点 X_0^* 振动. 2) 当 $\omega_0^2 > 0$ 时, 原系统 (2) 的势函数 $V(x)$ 是一个单势阱函数且只有一个平衡点 X_0^* , 并且对任意的 F 有 $C_{p,q}(F) > 0$ 成立. 因此, 系统 (7) 的势函数 $V_{F,p,q}(x)$ 始终是一个单稳势函数. 可见, 当高频信号幅值 F 的大小取定时, 分数阶阶数 p 和 q 的取值通过影响分岔点 $F_{p,q}$ 的值而决定系统 (7) 的稳定平衡点的个数.

设 $Y = X - X^*$ 并代入方程 (7) 后有

$$\begin{aligned} d^p Y / dt^p + \delta d^q Y / dt^q + \omega_{p,q}^2(F)Y \\ + 3\beta X^* Y^2 + \beta Y^3 = f \cos \omega t. \end{aligned} \quad (9)$$

这里, $\omega_{p,q}^2(F) = C_{p,q}(F) + 3\beta(X^*)^2$. 当 $t \rightarrow \infty$, $\omega \rightarrow 0$ 时, 可以得到方程(9)的近似线性方程的解析解为 $Y = fQ \cos(\omega t + \Phi)$, 这里幅值增益 Q 和相位 Φ 的解析表达式分别为

$$Q = \left\{ [\omega_{p,q}^2(F) + \Delta_{p,q}]^2 + [\Delta_{p,q}]^2 \right\}^{-1/2},$$

$$\Phi = -\arctan [\Delta_{p,q} / (\omega_{p,q}^2(F) + \Delta_{p,q})], \quad (10)$$

其中

$$\Delta_{p,q} = \omega^p \cos(p\pi/2) + \delta\omega^q \cos(q\pi/2). \quad (11)$$

3 分数阶 Duffing 振子的振动共振研究

下面我们分双势阱和单势阱两种情况讨论系统幅值增益 Q 的振动共振现象.

3.1 双势阱情况: $\omega_0^2 < 0$

从(11)式可知, 当 $F > 0$ 时, Q 作为 F 的函数的极值点可能出现在 $F = F_{p,q}$ 处, 也可能出现在 $dQ/dF = 0$ 处, 即满足如下方程之一:

$$\begin{aligned} -3\beta F^2 / \mu_{p,q}^2 - 2\omega_0^2 + \Delta_{p,q} &= 0, \\ F &< F_{p,q}, \end{aligned} \quad (12a)$$

$$\begin{aligned} -3\beta F^2 / (2\mu_{p,q}^2) - \omega_0^2 - \Delta_{p,q} &= 0, \\ F &\geq F_{p,q}, \end{aligned} \quad (12b)$$

当 $\Delta_{p,q} > 2\omega_0^2$ 时, 方程(12a)有正根 $F_{VR}^{(1)}$; 当 $\Delta_{p,q} < -\omega_0^2$ 时, 方程(12b)有正根 $F_{VR}^{(2)}$, 其中,

$$\begin{aligned} F_{VR}^{(1)} &= [\mu_{p,q}^2 (\Delta_{p,q} - 2\omega_0^2) / (3\beta)]^{1/2}, \\ F_{VR}^{(2)} &= [-2\mu_{p,q}^2 (\Delta_{p,q} + \omega_0^2) / (3\beta)]^{1/2}. \end{aligned} \quad (13)$$

因此, 通过判断 dQ/dF 的正负性以及 $F_{VR}^{(1)}$, $F_{VR}^{(2)}$ 和 $F_{p,q}$ 的取值大小, 可以得到系统幅值响应增益 Q 的共振特性一共有下面 3 种情况:

情况 1 当 $2\omega_0^2 < \Delta_{p,q} < 0$ 时, Q 在 $F_{VR}^{(1)}$, $F_{VR}^{(2)}$ 两处分别取到极大值, 且 $F_{VR}^{(1)} < F_{p,q} < F_{VR}^{(2)}$, 此时系统将存在双峰振动共振现象;

情况 2 当 $\Delta_{p,q} \leq 2\omega_0^2$ 时, Q 只在 $F = F_{VR}^{(2)}$ 处取到极大值, 此时系统将存在单峰振动共振现象;

情况 3 当 $\Delta_{p,q} \geq 0$ 时, Q 在 $F = F_{p,q}$ 处取到极大值, 此时系统将存在单峰振动共振现象.

可以看到, 分数阶阶数 p, q 的取值决定了判别式 $\Delta_{p,q}$ 的取值, 而 $\Delta_{p,q}$ 的取值最后决定了系统响应的幅值增益 Q 的共振特性(即极值点个数). 为了给读者一个更直观的认识, 我们绘制了 p, q 的取值与以上三种共振特性的关系(图 1(a)), 其中 $(p, q) \in R_i$ 分别对应情况 $i, i = 1, 2, 3$ 的情况, 其他参数取定为 $\omega_0^2 = -0.015$, $\omega = 0.1$, $\delta = 2$. 从图 1(a)中可以看到, 当 $p = 2, q = 1$ 时, 有 $(p, q) \in R_2$, 即对于传统的欠阻尼 Duffing 振子系统, 只会出现情况 1 所对应双峰共振现象. 当 $p \in [1, 2], q \in [0, 2]$ 时, 带有分数阶内外阻尼项的分数阶 Duffing 系统则可能出现情况 1 所对应的双峰共振以及情况 2, 3 所对应两种形式的单峰共振现象. 此外, 不同的 $\omega_0^2, \omega, \delta$ 的取值会改变区域 $R_i, i = 1, 2, 3$ 的范围, 例如当其他参数取定为 $\omega_0^2 = -0.02, \omega = 0.1, \delta = 1$ 时, 图 1(b) 给出了 p, q 的取值与三种共振特性的关系, 此时, 当 $p = 2, q \in [0, 2]$ 时, 即对于文献[18]所讨论的带有分数阶外阻尼项的欠阻尼 Duffing 振子系统, 则不再会出现情况 2 所对应的单峰共振现象.

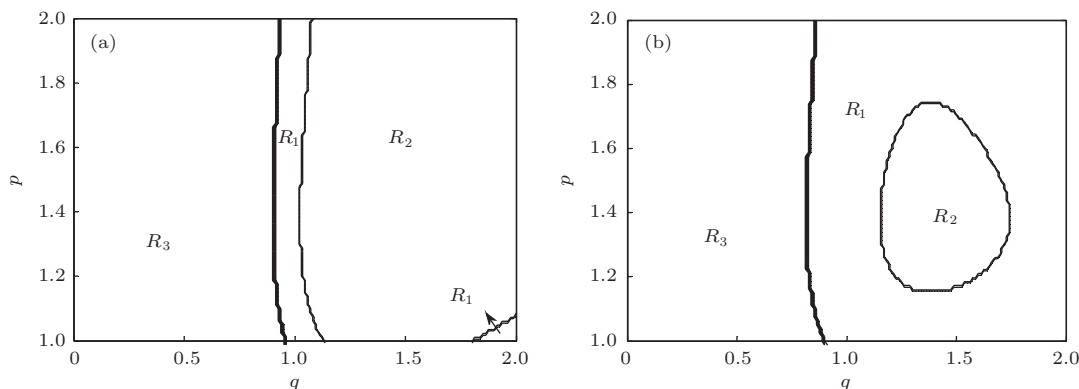
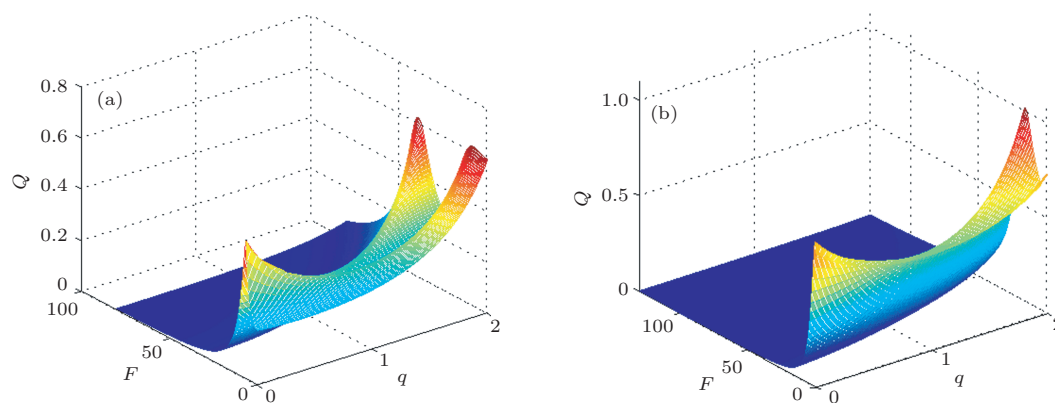
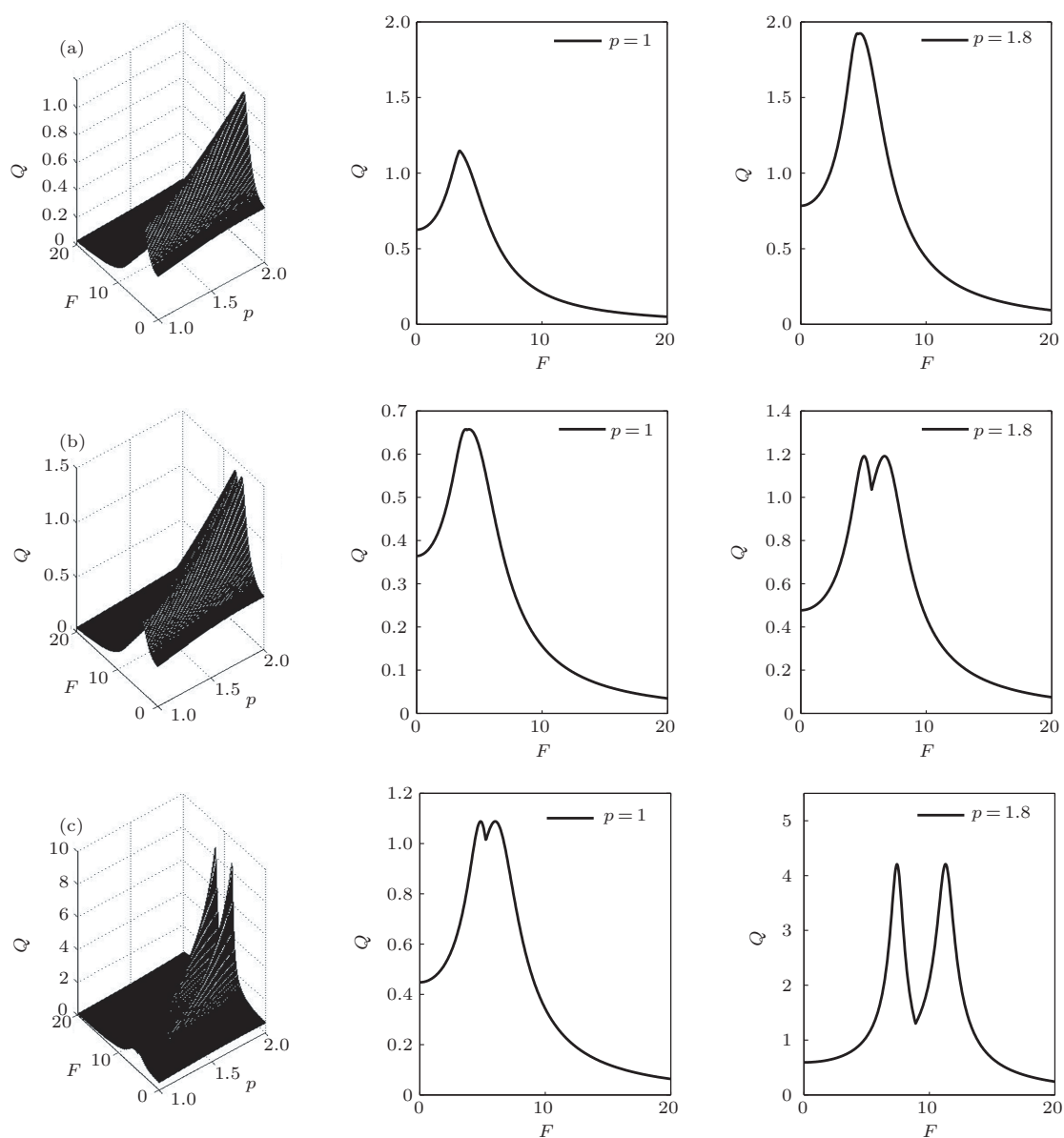


图 1 $\omega_0^2 < 0$ 时, p, q 的取值与三种共振特性的关系 (a) $\omega_0^2 = -0.015, \omega = 0.1, \delta = 2$; (b) $\omega_0^2 = -0.02, \omega = 0.1, \delta = 1$


 图2 分数阶 Duffing 系统响应增益 Q 作为 F 和阶数 q 的函数 (a) $p = 1.4$; (b) $p = 1.1$

 图3 响应增益 Q 作为 F 和阶数 p 的函数 (a) $q = 0.8$; (b) $q = 1.1$; (c) $q = 1.3$

为讨论分数阶外阻尼项阶数 q 对振动共振现象的影响,图2(a)给出了当内阻尼项阶数 $p = 1.4$ 时,系统响应幅值增益 Q 作为高频幅值 F 和外阻尼项阶数 q 的函数的解析结果,其他参数取定为 $\omega_0^2 = -0.8$, $\omega = 1$, $\Omega = 5$, $\delta = 1$, $\beta = 2$, $f = 0.5$. 可以看到随着 q 的增加,系统的振动共振由单峰共振逐渐转化为双峰共振. 这是有别于文献[18]的仅带有分数阶外阻尼项的Duffing系统(即 $p = 2$, $q \in [0, 2]$)的另一类现象. 在文献[18]中,随着分数阶外阻尼项阶数的增加,分数阶Duffing系统的振动共振由单峰共振逐渐转化为双峰共振后再次转化为单峰共振. 图2(b)给出了当 $p = 1.1$ 时,系统响应幅值增益 Q 作为 F 和 q 的函数的解析结果,其他参数取定为 $\omega_0^2 = -0.8$, $\omega = 1$, $\Omega = 5$, $\delta = 1$, $\beta = 2$, $f = 0.5$. 可以看到随着分数阶外阻尼项阶数 q 的增加, Q 作为 F 的函数由单调递减函数逐渐转化为具有一个单峰的非单调曲线,即系统一开始并没有振动共振现象,而后随着 q 的增加而出现了单峰振动共振现象.

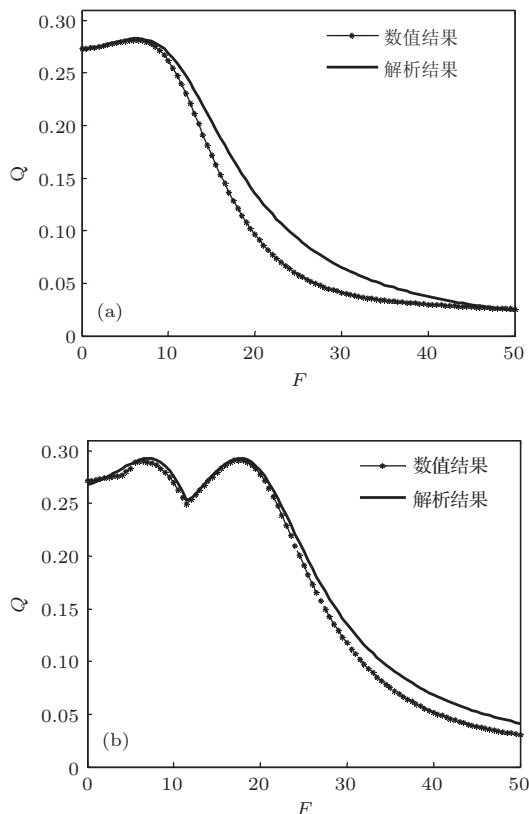


图4 响应增益 Q 作为 F 的函数的数值结果和解析结果比较 (a) $p = 1.4$, $q = 0.6$; (b) $p = 1.4$, $q = 1.3$

同样地,为讨论分数阶内阻尼阶数 p 对振动共振现象的影响,图3(a), (b), (c)分别给出了分数阶外阻尼阶数分别取定为 $q = 0.8, 1.1, 1.3$ 时,系

统响应的幅值增益 Q 作为 F 和 p 的函数的解析结果,其他参数取定为 $\omega_0^2 = -0.6$, $\omega = 0.4$, $\Omega = 4$, $\delta = 1$, $\beta = 1$, $f = 0.5$. 从图3(a)中可以看到,当 $q = 0.8$ 时,系统的振动共振始终是单峰共振;从图3(b)中可以看到,当 $q = 1.1$ 时,随着内阻尼项阶数 p 的增加,系统的振动共振由单峰共振逐渐转化为双峰共振;当 $q = 0.8$ 时,系统的振动共振始终是双峰共振.

图4(a)和(b)则给出了当 p, q 取值给定时,分别用解析方法和数值模拟方法绘制的系统响应幅值增益 Q 作为 F 的函数的解析结果和数值仿真结果曲线的比较结果,其他参数同图2. 可以看到,本节给出的解析结果和数值模拟结果基本一致. 当 $p = 1.4$, $q = 0.9$ 时,有 $\Delta_{p,q} \geq 0$,此时 Q 在 $F = 5$ 处取得最大值;当 $p = 1.4$, $q = 1.3$ 时,有 $2\omega_0^2 < \Delta_{p,q} < 0$, Q 在 $F = 7$ 和 $F = 17.5$ 两处取得最大值.

3.2 单势阱情况: $\omega_0^2 > 0$

此时,由(10)式可知 Q 的极值取值可以有如下两种情况:

情况1 当 $\Delta_{p,q} < -\omega_0^2$ 时,系统将在 $F = F_{VR}^{(2)}$ 处出现单峰振动共振,其中, $F_{VR}^{(2)}$ 的取值由(13)式给出;

情况2 当 $\Delta_{p,q} \geq -\omega_0^2$ 时,系统不存在振动共振现象.

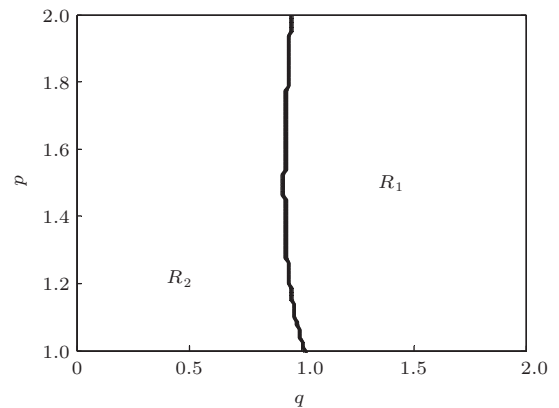


图5 $\omega_0^2 > 0$ 时, p, q 的取值与共振特性情况1, 2的关系

我们也绘制了 p, q 的取值与共振特性情况1, 2的关系,如图5(a), (b)所示,其中 $(p, q) \in R_i$ 分别对应情况 $i, i = 1, 2$ 的情况,其他参数取定为 $\omega_0^2 = -0.01$, $\omega = 0.2$, $\delta = 2$. 从图5(a)中可以看到,当 $p = 2$, $q = 1$ 时,有 $(p, q) \in R_1$,即对于传

统的欠阻尼 Duffing 振子系统会出现单峰共振现象, 这和文献 [4] 中的分析是一致的; 当 $p = 0$, $q = 1$ 时, 有 $(p, q) \in R_2$, 即对于传统的过阻尼 Duffing 振子系统不会出现振动共振现象; 当 $p \in [1, 2]$, $q \in [0, 2]$ 时, 带有分数阶内、外两种阻尼力的 Duffing 振子则可能出现单峰共振或者无共振现象. 同样地, 不同的 ω_0^2 , ω , δ 的取值也会改变区域 R_i , $i = 1, 2$ 的范围.

图 6(a) 给出了当内阻尼阶数 $p = 1.3$ 时, 系统响应幅值增益 Q 作为高频幅值 F 和外阻尼阶数 q 的函数的解析结果, 其他参数取定为 $\omega_0^2 = 0.02$, $\omega = 1$, $\Omega = 5$, $\delta = 1$, $\beta = 1$, $f = 0.5$. 可以看到随着外阻尼项阶数的增加, 系统由没有振动共振逐渐变为具有单峰振动共振. 图 6(b) 则给

出了当外阻尼阶数 $q = 1.35$ 时, 系统响应幅值增益 Q 作为高频幅值 F 和内阻尼阶数 p 的函数的解析结果, 其他参数取定为 $\omega_0^2 = 0.001$, $\omega = 0.4$, $\Omega = 4$, $\delta = 1$, $\beta = 0.6$, $f = 0.5$, 同样地, 随着内阻尼项阶数 p 的增加, 系统也由没有振动共振逐渐变为具有单峰振动共振.

图 7(a) 和 (b) 则给出了当 p, q 取值给定时, 分别用解析方法和数值模拟方法绘制的系统响应幅值增益 Q 作为 F 的函数的解析结果和数值仿真结果曲线的比较结果, 其他参数取值同图 6(a). 可以看到, 本文给出的解析结果和数值模拟结果非常符合. 当 $p = 1.3$, $q = 0.3$ 时, 有 $\Delta_{p,q} > -\omega_0^2$, Q 是 F 的单调递减的函数; 当 $p = 1.3$, $q = 1.1$ 时, 有 $\Delta_{p,q} < -\omega_0^2$, 此时 Q 在 $F = 7$ 处取得最大值.

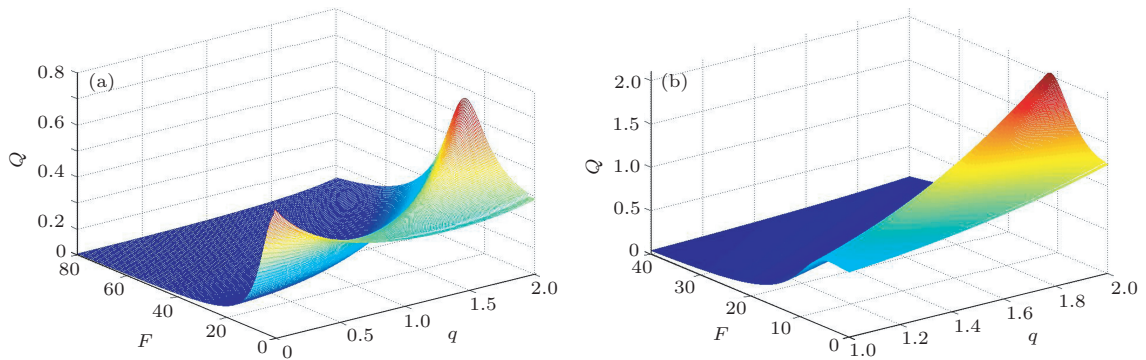


图 6 (a) $p = 1.3$ 时, 响应增益 Q 作为 F 和阶数 q 的函数; (b) $q = 1.35$ 时, 响应增益 Q 作为 F 和阶数 p 的函数

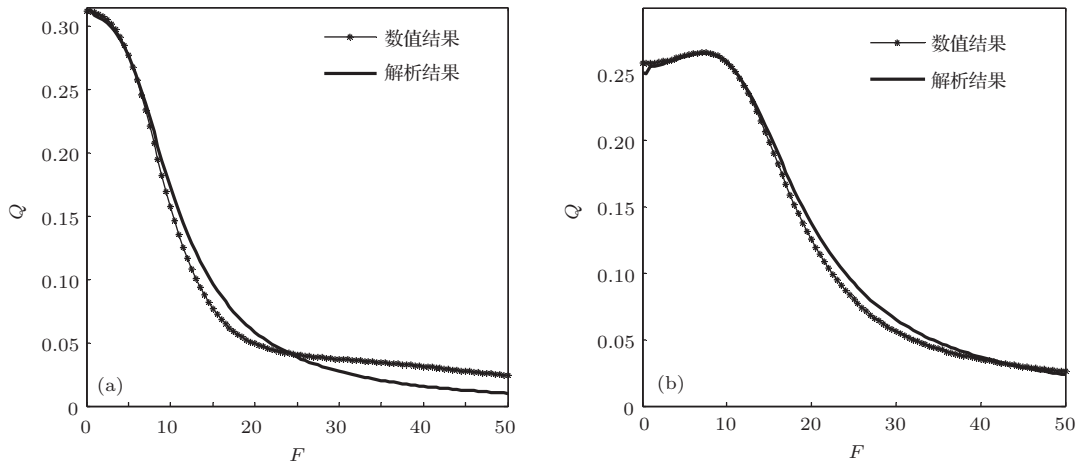


图 7 响应增益 Q 作为 F 的函数的解析结果和数值结果比较 (a) $p = 1.3$, $q = 0.3$; (b) $p = 1.3$, $q = 1.1$

4 结 论

本文将分数阶内、外两种阻尼力同时引入到整数阶 Duffing 振子, 讨论了高频周期信号和低频周

期信号诱发的振动共振现象, 并研究了分数阶阶数对上述现象的影响. 解析分析和数值结果均表明, 分数阶 Duffing 振动动力系统中仍然存在振动共振现象, 而分数阶导数的引入则导致了系统有效势函

数的改变,从而引发了比整数阶 Duffing 系统更丰富的振动共振现象。

参考文献

- [1] Landa P S, McClintock P V E 2000 *J. Phys. A: Math. Gen.* **33** L433
- [2] Gitterman M 2005 *Physica A* **352** 309
- [3] Lin M, Fang L M, Zhu R G 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 2642 (in Chinese) [林敏, 方利民, 朱若谷 2008 物理学报 **57** 2642]
- [4] Baltans J P 2003 *Phys. Rev. E* **67** 66119
- [5] Wang C J 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 090504
- [6] He Z Y, Zhou Y R 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 110505
- [7] Fang C J, Liu X B 2012 *Chin. Phys. Lett.* **29** 050504
- [8] Yang J H, Liu X B 2010 *J. Phys. A: Math. Theor.* **43** 122001
- [9] Guo F, Chen X F 2011 *Journal of the Korean Physical Society* **56** 1567
- [10] Yang J H, Liu H G, Cheng G 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 180503 (in Chinese) [杨建华, 刘后, 广程刚 2013 物理学报 **62** 180503]
- [11] Yang J H, Liu X.B. 2011 *Phys. Scr.* **83** 065008
- [12] Hilfer R 2003 *Applications of Fractional Calculus in Physics* (Singapore: World Scientific)
- [13] Torvik P J, Bagley R L 1984 *J. Appl. Mech.* **51** 294
- [14] Wang Z H, Hu H Y 2009 *Science in China: G* **39** 1495 (in Chinese) [王在华, 胡海岩 2009 中国科学 G **39** 1495]
- [15] Tofghi A 2003 *Physica A* **3** 29
- [16] Ryabov Y E, Puzenko A 2002 *Phys. Rev. B* **66** 184201
- [17] Narahari Achar B N, Hanneken J W, Clarke T 2002 *Physica A* **309** 275
- [18] Yang J H, Zhu H 2012 *Chaos* **22** 13112
- [19] Petras I 2010 *Fractional-order nonlinear system: modeling, analysis and simulation* (Beijing: Higher Education Press)

Vibrational resonance in a Duffing system with fractional-order external and intrinsic dampings driven by the two-frequency signals*

Zhang Lu¹⁾²⁾ Xie Tian-Ting¹⁾ Luo Mao-Kang^{1)†}

1) (Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, China)

2) (Science and Technology on Electronic Information Control Laboratory, Chengdu 610036, China)

(Received 30 August 2013; revised manuscript received 12 October 2013)

Abstract

The phenomenon of vibrational resonance (VR) in a Duffing system with both fractional-order external damping and fractional-order intrinsic damping driven by the two-frequency periodic signals is investigated. It is observed that the resonance amplitude Q can be optimized by an appropriate choice of the amplitude of the high-frequency signal. The obtained relationship between VR and the fractional-orders shows that both fractional-order external damping and fractional-order intrinsic damping can induce changes of the shapes of the effective potential function and then lead to more abundant resonance behaviors than in the traditional dynamic systems.

Keywords: vibrational resonance, Duffing system, fractional-order damping, fractional system

PACS: 05.45.-a, 05.90.+m

DOI: 10.7498/aps.63.010506

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11171238), and the Science Fund for Creative Research Groups of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11221101).

† Corresponding author. E-mail: makaluo@scu.edu.cn