

矩形表面波探头声场的高斯声束叠加法*

段晓敏¹⁾²⁾ 赵新玉^{3)4)†} 孙华飞¹⁾

1) (北京理工大学数学学院, 北京 100081)

2) (大连交通大学理学院, 大连 116028)

3) (北京理工大学机械与车辆学院, 北京 100081)

4) (大连交通大学材料科学与工程学院, 大连 116028)

(2013年8月20日收到; 2013年9月17日收到修改稿)

利用矩形压电晶片和有机玻璃楔块折射可激励出超声表面波, 广泛用于固体近表面缺陷检测和材料特性测量. 由于描述表面波三维声场的理论方法还鲜有报道, 因而主要采用简化的表面波二维声场模型来定量分析这类问题. 高斯声束模型近些年被广泛应用于解决超声体波传播的各种复杂问题, 然而, 目前还没有将其扩展应用到超声表面波的声场的计算中. 通过结合表面波格林方程和矩形换能器的高斯声束模型, 推导出基于高斯声束叠加的表面波三维声场解析解. 进一步, 将该方法与点源叠加的数值解进行了分析比较, 计算结果表明表面波声场的高斯声束叠加方法在具有较好计算精度的同时, 还具有更快的计算效率.

关键词: 超声表面波, 高斯声束模型, 声场计算, 点源叠加

PACS: 43.35.Cg, 81.70.Cv

DOI: 10.7498/aps.63.014301

1 引言

超声表面波传播距离远, 对材料表面和近表面缺陷敏感, 在材料缺陷无损检测和材料特性分析领域获得了广泛的应用^[1,2]. 准确的计算表面波换能器辐射的声场, 对换能器的设计、检测工艺优化和缺陷定量评价都有重要的指导意义. 由于描述表面波三维声场的理论方法还鲜有报道, 因而经典方法主要采用简化的表面波二维声场模型来定量分析这类三维问题^[3]. 最近, Schmerr等利用格林方程和静态相位近似推导了一个表面波三维声场的积分表达式^[4], 即表面波的点源叠加法. 点源叠加方法能够获得解析积分的情况是非常少的, 通常以数值方法来计算, 因而其计算效率较低.

高斯声束叠加方法具有较高的计算精度和效率^[5], 已被广泛用于解决超声体波传播的各种复

杂问题, 如双晶换能器^[6], 相控阵换能器^[7]和各向异性材料中传播的声场^[8,9], 非线性声场等^[10]. 然而, 高斯声束叠加方法目前主要用于计算超声体波的声场, 还未推广应用到超声表面波的声场计算领域. 针对矩形晶片透过角度楔块辐射的超声表面波声场计算问题, 通过结合表面波格林方程和高斯声束模型, 推导了表面波的高斯声束叠加解析解. 与经典格林方程的数值解的分析比较表明, 三维表面波声场的高斯声束叠加方法在具有较好计算精度的同时还具有更快的计算效率.

2 理论模型

考虑矩形压电晶片透过有机玻璃楔块向铝板表面辐射的表面波声场问题, 选入射点为坐标原点, 坐标系定义如图1所示.

* 国家自然科学基金(批准号: 51105033, 61179031)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: xyz@bit.edu.cn

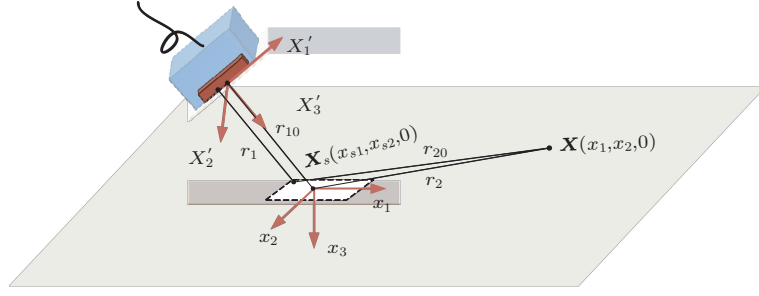


图 1 表面波换能器示意图

2.1 表面波格林方程

如果能够求得楔块底面与工件之间的声压分布状态 $p(\mathbf{x}_s, \omega)$, 那么工件表面任意一点的质点速度 $v_i(\mathbf{x})$ 可以通过应用表面波格林方程, 进行面积分来计算^[11]

$$v_i(\mathbf{x}) = \frac{-i\omega}{4Pc_{R2}} \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2\pi k_{R2}}} \int_S p(\mathbf{x}_s, \omega) \times G_{3i}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_s) \frac{\exp(ikr_2)}{\sqrt{r_2}} dS(\mathbf{x}_s), \quad (1)$$

这里, $S(\mathbf{x}_s)$ 表示对楔块下表面区域进行的面积分, c_{R2} 为表面波声速, k_{R2} 为表面波波数, 距离因子 $r_2 = \sqrt{(x_1 - x_{s1})^2 + (x_2 - x_{s2})^2}$ 表示楔块下任意一点 $\mathbf{x}_s(x_{s1}, x_{s2}, 0)$ 到工件表面任意计算点 $\mathbf{x}(x_1, x_2, 0)$ 的水平距离. P 定义为能流, 可以表示为

$$P = \frac{1}{2} \rho_2 c_{R2} \int_0^{+\infty} (|v_1(z_2)|^2 + |v_2(z_2)|^2) dz_3, \quad (2)$$

这里考虑超声表面波在各向同性固体表面传播, 其三维格林函数可以表示为

$$G_{ij}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_{s2}) = p_i^*(z_{s2}) p_j(z_2), \quad (3)$$

其中, $p_i^*(x_{s3})$, $p_j(x_3)$ 为质点振动极性矢量, * 表示共轭复数, 极性矢量可表示为

$$\mathbf{p}(x_3) = \begin{Bmatrix} v_{n1}(x_3) \frac{(x_1 - x_{s1})}{r_2} \\ v_{n1}(x_3) \frac{(x_2 - x_{s2})}{r_2} \\ i v_{n2}(x_3) \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{p}(x_{s3}) = \begin{Bmatrix} v_{n1}(x_{s3}) \frac{(x_1 - x_{s1})}{r_2} \\ v_{n1}(x_{s3}) \frac{(x_2 - x_{s2})}{r_2} \\ i v_{n2}(x_{s3}) \end{Bmatrix}, \quad (4)$$

式中的 $v_{n1}(x_3)$, $v_{n2}(x_3)$ 对应于传统的二维表面波模态方程, 在诸多经典文献中都有详细描述^[3], 具体表达为

$$v_{n1}(x_3) = \exp(-\alpha_{n1} x_3) - \frac{(2c_{s2}^2 - c_{R2}^2)}{2c_2^2} \exp(-\alpha_{n2} x_3),$$

$$v_{n2}(x_3) = \frac{c_{R2} \alpha_{n1}}{\omega} \exp(-\alpha_{n1} x_3) - \frac{\omega}{c_{R2} \alpha_{n2}} \frac{(2c_{s2}^2 - c_{R2}^2)}{2c_2^2} \exp(-\alpha_{n2} x_3), \quad (5)$$

式中, $\alpha_{n1} = \omega \sqrt{\frac{1}{c_{R2}} - \frac{1}{c_{p2}^2}}$, $\alpha_{n2} = \omega \sqrt{\frac{1}{c_{R2}} - \frac{1}{c_{s2}^2}}$, ω 代表角频率, c_{p2} , c_{s2} 分别对应于工件中纵波和横波声速.

2.2 表面波点源叠加法

Schmerr 等将楔块下声压分布用带有修正项的瑞利积分表达为^[12]

$$p(\mathbf{x}_s, \omega) = \frac{-i\omega p_0}{2\pi \rho_1 c_{p1}^2} \rho_2 c_{s2} T \times \int_{S_T} K_p(\theta_p) \frac{\exp(ik_{p1} r_1)}{r_1} dS, \quad (6)$$

式中 ρ_1 , c_{p1} 是有机玻璃楔块的密度和纵波声速, ρ_2 , c_{s2} 为工件材料的密度和横波声速, T 为声波从有机玻璃楔块传播到工件表面的透射系数, $K_p(\theta_p)$ 纵波是指向性系数.

进一步, 将(6)式代入到表面波格林方程(1)式, 并应用静态相位近似, 可推导出基于点源叠加的三维表面波质点速度场表达式^[4]

$$v_i(\mathbf{x}) = \frac{-ik_{R2} p_0 \rho_2 c_{s2}}{4P \rho_1 c_{p1} \cos \theta} \frac{\exp(i\pi/4)}{\sqrt{2\pi k_{R2}}} \times \int_{S_T} T K_p(\theta_p) p_3^*(0) p_i(x_3)$$

$$\times \frac{\exp(ik_{p1}r_{10} + ik_{R2}r_{20})}{\sqrt{r_{20} + r_{10}\sin\theta}} dS_T, \quad (7)$$

式中 r_{10} 是晶片中心到入射点的距离, r_{20} 是入射点到计算点间的距离, 详见图 1 所示, S_T 代表对晶片表面的面积分, θ 为激励出表面波时的入射角. 表面波的点源叠加法需要用数值方法来计算面积分, 因而其计算效率较低.

2.3 表面波高斯声束叠加法

为了获得表面波声场的解析表达式, 将楔块下表面与工件之间的声压分布用高斯声束叠加来表

$$\begin{aligned} p(\mathbf{x}_s, \omega) = & \rho_2 c_{s2} T \exp(ik_{p1}r_{10}) \exp(ik_{R2}x_{s1}) \\ & \times \sum_{r=1}^{10} \frac{A_r \exp\left(iM_1 \frac{x_{s1}^2}{2}\right)}{\sqrt{1 + iB_r x_3/D_{R1}}} \\ & \times \sum_{q=1}^{10} \frac{A_q \exp\left(iM_2 \frac{x_{s2}^2}{2}\right)}{\sqrt{1 + iB_q x_3/D_{R2}}}, \end{aligned} \quad (8)$$

式中 A_r, A_q, B_r, B_q 代表复数高斯系数, 本文中仿真计算时所用的 10 个复数系统详见文献 [13, 14].

$$\begin{aligned} M_1 = & \frac{k_{p1} \cos^2 \theta}{r_{10} - iD_{R1}/B_r}, \\ M_2 = & \frac{k_{p1}}{r_{10} - iD_{R2}/B_q}, \end{aligned} \quad (9)$$

式中 $D_{R1} = k_{p1}a_1^2/2$, $D_{R2} = k_{p1}a_2^2/2$ 为瑞利距离, 矩形晶片的长宽分别为 $2a_1, 2a_2$.

同时, 利用一种近轴近似来表示 (1) 式中的距离因子

$$\begin{aligned} r_2 = & \sqrt{(x_1 - x_{s1})^2 + (x_2 - x_{s2})^2} \\ \approx & x_1 + \frac{x_2^2}{2x_1} + \frac{x_{s2}^2}{2x_1} - x_{s1} - \frac{x_2}{x_1} x_{s2}. \end{aligned} \quad (10)$$

(1) 式被积函数中指数项的距离因子对应于波动相位, 相比于距离因子平方根项而言, 指数项对距离因子的变化更加敏感, 考虑到上述因素, 将带有距离因子的指数项和平方根项近似为

$$\begin{aligned} \frac{\exp(ik_{R2}r_2)}{\sqrt{r_2}} \approx & \frac{1}{\sqrt{x_1}} \exp\left(ik_{R2}\left(x_1 + \frac{x_2^2}{2x_1} + \frac{x_{s2}^2}{2x_1} \right. \right. \\ & \left. \left. - x_{s1} - \frac{x_2 x_{s2}}{x_1}\right)\right). \end{aligned} \quad (11)$$

将 (8) 和 (11) 式代入到表面波格林方程 (1) 式, 方程中的积分部分可以应用积分恒等式简化如下:

$$\begin{aligned} & \int_{S_P} \exp(ik_{R2}x_{s1}) \exp\left(iM_1 \frac{x_{s1}^2}{2}\right) \\ & \times \exp\left(iM_2 \frac{x_{s2}^2}{2}\right) \frac{\exp(ik_{R2}r)}{\sqrt{r}} dS(\mathbf{x}_s) \\ = & \frac{\exp\left(ik_{R2}x_1 + ik_{R2} \frac{x_2^2}{2x_1}\right)}{\sqrt{x_1}} \int_{S_P} \exp\left(iM_1 \frac{x_{s1}^2}{2}\right) \\ & \times \exp\left(i \frac{M_2 + k_{R2}/x_1}{2} x_{s2}^2 - \frac{ik_{R2}x_2}{x_1} x_{s2}\right) dx_{s1} dx_{s2} \\ = & \frac{\exp\left(ik_{R2}x_1 + ik_{R2} \frac{x_2^2}{2x_1}\right)}{\sqrt{x_1}} \sqrt{\frac{2i\pi}{M_1}} \\ & \times \sqrt{\frac{2i\pi}{M_2 + k_{R2}/x_1}} \exp\left(\frac{-ik_{R2}^2 \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2}{2(M_2 + k_{R2}/x_1)}\right) \\ = & \frac{2i\pi \exp(ik_{R2}x_1)}{\sqrt{M_1} \sqrt{M_2 x_1 + k_{R2}}} \\ & \times \exp\left(ik_{R2} \frac{x_2^2}{2} \left(\frac{M_2}{M_2 x_1 + k_{R2}}\right)\right). \end{aligned} \quad (12)$$

进一步, 整理获得矩形晶片表面波高斯声束叠加的表达式如下:

$$\begin{aligned} v_i(\mathbf{x}) = & \frac{\rho_2 c_{s2} k_{R2} \exp(i\pi/4)}{4P} \sqrt{\frac{2\pi}{k_{R2}}} T \\ & \times \exp(ik_{p1}r_{10} + ik_{R2}x_1) p_3^*(0) \\ & \times p_i(x_3) \sum_{r=1}^{10} \frac{A_r}{\sqrt{M_1} \sqrt{1 + iB_r x_3/D_{R1}}} \\ & \times \sum_{q=1}^{10} \frac{A_q}{\sqrt{1 + iB_q x_3/D_{R2}}} \\ & \times \frac{\exp\left(\frac{ik_{R2}M_2 x_2^2}{2(M_2 x_1 + k_{R2})}\right)}{\sqrt{M_2 x_1 + k_{R2}}}. \end{aligned} \quad (13)$$

3 声场计算结果分析与比较

本节通过数值计算表面波声场, 来比较说明表面波点源叠加法和高斯声束叠加方法在计算精度和速度上的差异. 计算中所用表面波换能器主要参数为, 晶片大小 $8 \text{ mm} \times 10 \text{ mm}$, 中心频率 5 MHz , 有机玻璃楔块中纵波声速 $2.7 \text{ mm}/\mu\text{s}$, 铝板中表面波声速 $2.845 \text{ mm}/\mu\text{s}$, 楔块入射角度 71.63° , 计算

时的坐标原点选为位于工件表面的入射点, 具体坐标系如图1所示.

图2给出了两种方法计算 x_1 轴向的一维质点速度场的幅度比较, 可以看出表面波质点振动能量主要表现为 v_1 和 v_3 分量, 而 v_2 分量很小, 表明其振动主要在 x_1x_3 平面内做椭圆形位移振动. 点源叠加法 (PSM) 和高斯声束叠加 (MGB) 两种方法的计算结果具有较好一致性. 采用点源叠加方法计算楔块下面部分区域时, 难以满足所有点源都以 71.63° 入射的要求, 因此 $0 < x_1 < 13$ mm区域并未显示.

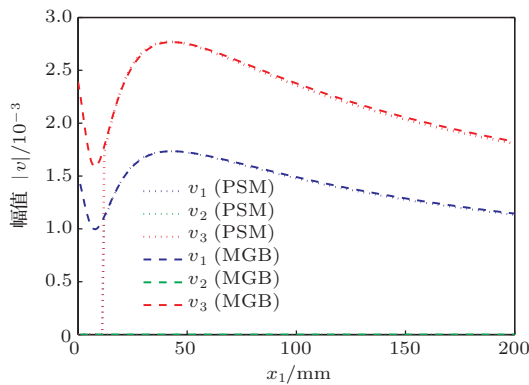


图2 轴向质点振动幅度比较

图3为 $x_1 = 40$ 处离轴方向的质点振动幅度, 两种方法在声束主要能量集中的轴线中心区域, 即 $-10 < x_2 < 10$, 具有很好一致性; 而在 $x_2 < -10$ 和 $x_2 > 10$ 的远离轴线区域, 基于近轴近似假设的高斯声束叠加方法会出现一些失真, 偏差随着离轴

距离的增加而加大.

图4为工件表面, 即 x_1x_2 面内的二维质点振动速度幅度分布, 可以看出表面波具有较好指向性, 在主要能量集中的轴线附近区域, 两种方法计算出的二维声场分布较为一致.

图5为 $x_1 = 40, x_2 = 0$ 处沿工件深度方向的质点速度场分布, 深度方向 v_2 分量同样很小, 表明其振动主要在 x_1x_3 平面内. 还可以看出表面波声束能量主要集中在工件近表面一倍波长范围内, 随着深度的增加迅速衰减. 两种方法算出的深度方向幅值也具有很好的一致性.

图6为计算二维表面波质点速度场时 (200点 $\times$ 200点图像), 两种方法的运算时间比较. 采用点源叠加时, 为保证计算精度, 将换能器表面分成100个面积为 0.8 mm $\times$ 1 mm的小点源, 而高斯声束叠加方法仅需要10个高斯型声束, 因而, 其计算效率明显优于点源叠加方法.

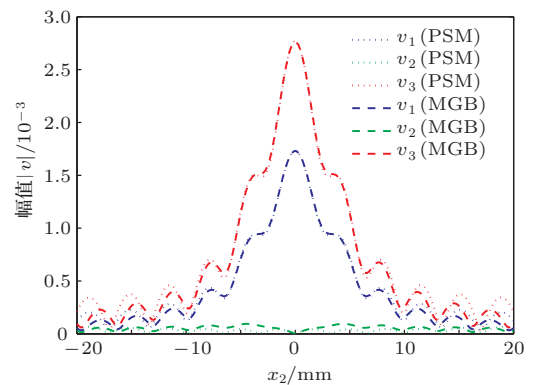


图3 离轴表面波质点振速幅度比较 ($x_1 = 40$ mm)

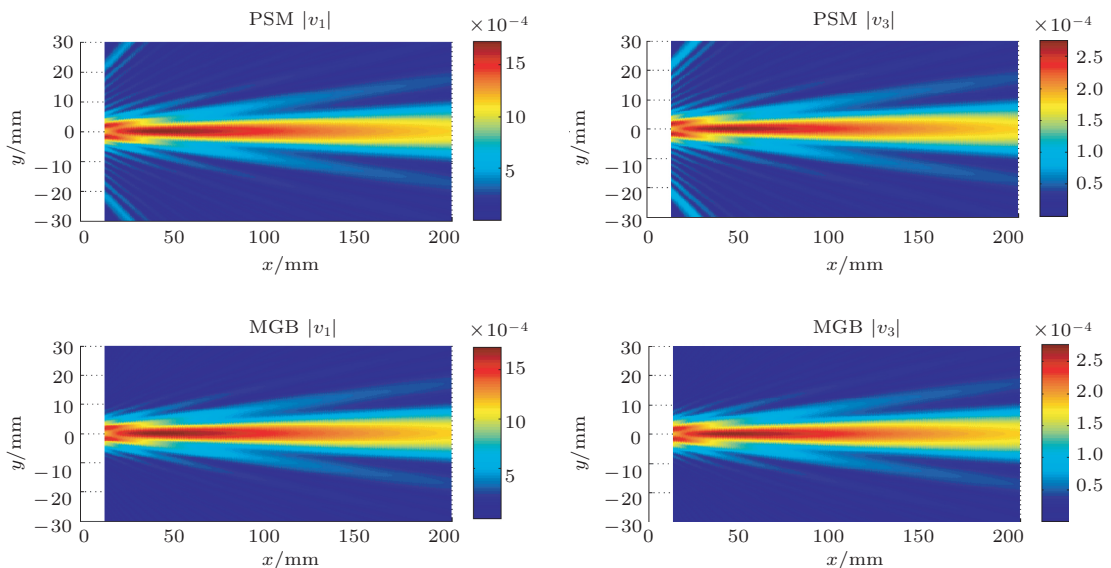


图4 工件表面二维质点振动幅度比较

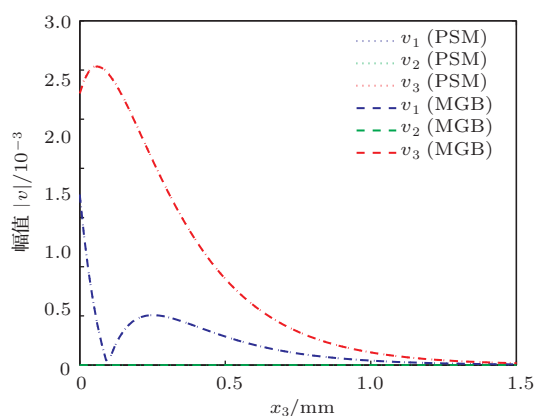


图 5 工件深度方向质点振动幅度比较 ($x_1 = 40$, $x_2 = 0$)

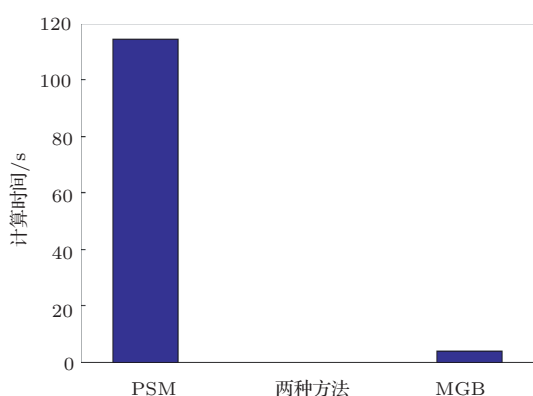


图 6 计算效率比较

4 结 论

给出了一个基于高斯叠加方法的表面波三维声场解析解, 与点源叠加数值解比较表明该方法计算精度较好, 同时计算效率很高. 拓展了高斯声束叠加方法, 用于表面波声场分析和表面缺陷回波预测等超声建模领域.

感谢在美国爱荷华州立大学无损检测与评价中心访问期间, L. W. Schmerr 教授给予的悉心指导和帮助.

参考文献

- [1] Fan Y, Dixon S, Edwards R S, Jian X 2007 *NDT & E International* **40** 471
- [2] Yuan L, Sun K H, Cui Y P, Shen Z H, Ni X W 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 014210 (in Chinese)[袁玲, 孙凯华, 崔一平, 沈中华, 倪晓武 2012 物理学报 **61** 014210]
- [3] Rose J L 1999 *Ultrasonic Waves in Solid Media* Cambridge University Press
- [4] Schmerr L W, Sedov L 2011 *AIP Conf. Proc.* **1335** 771
- [5] Wen J J, Breazeale M A 1988 *J. Acoust. Soc. Amer.* **83** 1752
- [6] Zhao X Y, Gang T, Zhang B X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 5049 (in Chinese)[赵新玉, 刚铁, 张碧星 2008 物理学报 **57** 5049]
- [7] Spies M 2000 *NDT & E International* **33** 155
- [8] Huang R J, Schmerr L W, Sedov A 2007 *Res. Nondestruct. Eval.* **18** 193
- [9] Yu J, Zhang D, Liu X Z, Gong X F, Song F X 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 5909 (in Chinese)[于洁, 章东, 刘晓宙, 龚秀芬, 宋富先 2007 物理学报 **56** 5909]
- [10] Zhao X Y, Gang T 2009 *Ultrasonics* **49** 126
- [11] Aki K, Richards P G 1980 *Quantitative Seismology-Theory and Methods* (University Science Books)
- [12] Schmerr L W 1998 *Fundamentals of Ultrasonic Non-destructive Evaluation-A Modeling Approach*, Plenum New York
- [13] Schmerr L W, Song S J 2007 *Ultrasonic Non-destructive Evaluation Systems-Models and Measurements* (Springer)
- [14] Ding D, Zhang Y, Liu J 2003 *J. Acoust. Soc. Am.* **113** 3043

Multi-Gaussian beam model for ultrasonic surface waves with angle beam rectangular transducers*

Duan Xiao-Min¹⁾²⁾ Zhao Xin-Yu^{3)4)†} Sun Hua-Fei¹⁾

1) (*School of Mathematics, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

2) (*School of Science, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China*)

3) (*School of Mechanical and Vehicular Engineering, Beijing Institute of Technology, Beijing 100081, China*)

4) (*School of Materials Science and Engineering, Dalian Jiaotong University, Dalian 116028, China*)

(Received 20 August 2013; revised manuscript received 17 September 2013)

Abstract

Rayleigh waves propagating in an elastic surface are commonly used for the near surface flaw detection and material characterization. However, unlike the bulk wave case, there are seldom three-dimensional models to be provided for the Rayleigh waves. In the past decade, multi-Gaussian beam models have been gradually developed and perfectly applied to solve many complicated propagation problems of bulk waves. However, up to date they have not been extended to the simulation of the Rayleigh waves. By combining the Rayleigh wave Green function and the multi-Gaussian beam model, a three-dimensional Rayleigh wave model is presented to calculate the beam fields radiated from a rectangular transducer mounted on the Lucite wedge. Furthermore, some simulation results of the provided method are compared to those of a more exacted point source model. It is shown that the multi-Gaussian surface wave model has good capability in both computational accuracy and efficiency.

Keywords: ultrasonic Rayleigh wave, multi-Gaussian beam, acoustic field calculation, point source model

PACS: 43.35.Cg, 81.70.Cv

DOI: 10.7498/aps.63.014301

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51105033, 61179031).

† Corresponding author. E-mail: xyz@bit.edu.cn