

任意横截面柱形热斗篷研究与设计*

毛福春¹⁾ 李廷华¹⁾ 黄铭^{1)†} 杨晶晶¹⁾ 陈俊昌²⁾

1) (云南大学无线创新实验室, 昆明 650091)

2) (北京邮电大学电子工程学院, 北京 100876)

(2013年7月29日收到; 2013年9月6日收到修改稿)

基于变换热力学, 导出了具有非共形任意横截面的柱形热斗篷热导率表达式, 并在此基础上设计了具有非共形横截面的柱形热斗篷. 全波仿真结果表明, 热斗篷迫使外部热流绕过斗篷, 导致隐身区域热通量为零, 从而具有热保护功能; 同时, 热流绕过斗篷后将恢复原来的温度场分布, 使其具有完美热隐身功能. 此外, 基于所导出的变换媒质热导率表达式, 设计并求解了具有规则共形和非规则共形横截面的柱形热斗篷, 发现它们同样具有热保护和完美热隐身功能. 这表明通过选择适当的边界函数, 所得变换媒质热导率表达式可用于设计任意横截面柱形热斗篷, 具有普遍的适用性, 这种技术在计算机芯片、卫星和航天器等的热保护中有潜在应用.

关键词: 变换热力学, 热斗篷, 任意形状, 非共形

PACS: 44.10.+I, 05.70.-a, 81.05.Xj, 07.05.Tp

DOI: 10.7498/aps.63.014401

1 引言

正如惠勒所述: “物质告诉时空如何弯曲, 时空告诉物质如何运动”. 2006年, Pendry等^[1]和Leonhardt^[2]从Maxwell方程的形式不变性出发, 通过引入空间形变将电磁波传输与空间形变等效起来, 从而在材料本构参数与坐标变换之间建立起对应关系, 并最终发展成为变换光学的一般理论^[3]. 变换光学最初用于电磁斗篷设计^[1,2,4-8], 后来又扩展到电磁聚焦器、透明体、超散射、超吸收等具有特殊功能器件^[9-12]. 与此同时, 许多学者将变换光学思想应用于声学^[13,14]、物质波^[15,16]、等离子体^[17]、弹性力学^[18,19]、热力学^[20,21]等领域.

2008年, Fan等^[22]发现在一定条件下热扩散方程具有形式不变性, 并利用坐标变换原理设计了球形和椭球形热斗篷. 2010, Li等^[23]采用复合材料设计了一个能够对电流和热隐形的双功能斗篷. 2012年, Guenneau等^[24]将变换光学拓展到变

换热力学, 设计了圆形热斗篷和热聚焦器. 最近, Guenneau等^[25]求解非稳态热扩散方程, 利用几何形变与材料参数变化之间的等效关系, 解出了热旋转器的瞬态响应, 并观察到负热导率现象; Schittny等^[26]利用铜和聚二甲硅氧烷实现了圆形热斗篷, 并用红外相机拍摄了斗篷随着时间变化的温度分布, 证实了其热隐身效果; Han等^[27]提出将普通材料按一定周期交替填充, 通过调整填充率获得所需各向异性媒质的方法, 并计算了用环氧树脂与橡胶制成的圆形热斗篷和用不锈钢及木材制成的圆形热斗篷; He等^[28]提出了开放式热斗篷, 该斗篷内部的温度近似等于开口区域的温度; Guenneau等^[29]将变换热力学方法扩展到非稳态对流热扩散问题, 基于有效媒质思想简化参数并设计了质量浓度扩散斗篷; Yang等^[30]导出了共形任意形状热斗篷的热导率表达式, 并仿真研究了具有共形任意轮廓热隐身斗篷的性能.

由于外部热流绕过斗篷, 使斗篷区保持低温, 这样的特点使其可用于计算机芯片、卫星和航天器

* 国家自然科学基金(批准号: 61161007, 61261002)、云南省自然科学基金重点项目(批准号: 2013FA006)和云南省自然科学基金(批准号: 2011FB018)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: huangming@ynu.edu.cn

等的热保护中. 然而, 据我们所知, 目前文献报道的成果基本上考虑的都是圆和椭圆这样的规则对称的形状, 或者虽然允许有任意形状轮廓, 但又要求内外边界必须共形, 因而都不能用于像内外边界非共形这样具有完全任意形状的热斗篷设计. 为解决此问题, 本文导出了内外边界非共形热斗篷的热导率表达式, 并通过全波仿真分析横截面非共形的任意形状热斗篷和圆柱形、椭圆柱形、正六边柱形、任意横截面共形等具有规则和非规则形状的热斗篷, 验证表达式的有效性和热斗篷的热保护及完美热隐身功能.

2 理论与方法

热扩散方程描述了热量从高温区域流向低温区域的扩散过程, 它与热源、温度梯度、媒质热导率和边界条件等有关. 一般地, 热扩散方程可写为如下形式^[22]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + Q, \quad (1)$$

其中 ∇ 表示梯度算符, ρ , c 和 κ 分别代表媒质的密度、热容量和热导率, T 是温度, Q 为热源. 对无源区域的稳态过程, 即 $Q = 0$, $\partial T / \partial t = 0$, (1) 式可化简为 $\nabla \cdot (\kappa \nabla T) = 0$, 该方程具有形式不变性, 在变换空间中可表示为^[27]

$$\nabla' \cdot (\kappa' \nabla' T') = 0, \quad (2)$$

式中 κ' , T' 分别代表变换空间的温度和媒质热导率, ∇' 表示在变换空间中求梯度. 变换空间与原坐

标空间媒质热导率的关系如下:

$$\kappa' = \frac{J \kappa J^T}{\det(J)}, \quad (3)$$

式中

$$J = \frac{\partial(x', y', z')}{\partial(x, y, z)} = \begin{bmatrix} \partial x' / \partial x & \partial x' / \partial y & \partial x' / \partial z \\ \partial y' / \partial x & \partial y' / \partial y & \partial y' / \partial z \\ \partial z' / \partial x & \partial z' / \partial y & \partial z' / \partial z \end{bmatrix}$$

为雅可比变换矩阵, J^T 是 J 的转置, $\det(J)$ 是矩阵行列式.

任意横截面形状柱形热斗篷的坐标变换见图 1 所示, 其中 Ω 与 Ω' 分别表示原坐标空间和变换空间, 参数方程 $r' = R_1(\theta')$ 和 $r' = R_2(\theta')$ 分别为热斗篷的内、外边界曲线, 求解时可以用傅里叶级数表示. 值得注意的是, $r' = R_1(\theta')$ 和 $r' = R_2(\theta')$ 是非共形的. 为实现完美热隐身, 需要将原坐标空间中 $r < R_2(\theta)$ 的区域沿径向压缩到变换空间中 $R_1(\theta') < r' < R_2(\theta')$ 的区域, 得到一个 $r' < R_1(\theta')$ 的封闭区域, 该区域即为隐身区域. 坐标变换方程为

$$r' = \frac{R_2(\theta) - R_1(\theta)}{R_2(\theta)} r + R_1(\theta) \quad (4a)$$

$$\theta' = \theta \quad (4b)$$

$$z' = z \quad (4c)$$

将 (4) 式转换为直角坐标系下的形式, 得到变换空间中的坐标 (x', y', z') 与原空间中的坐标 (x, y, z) 之间的关系如下:

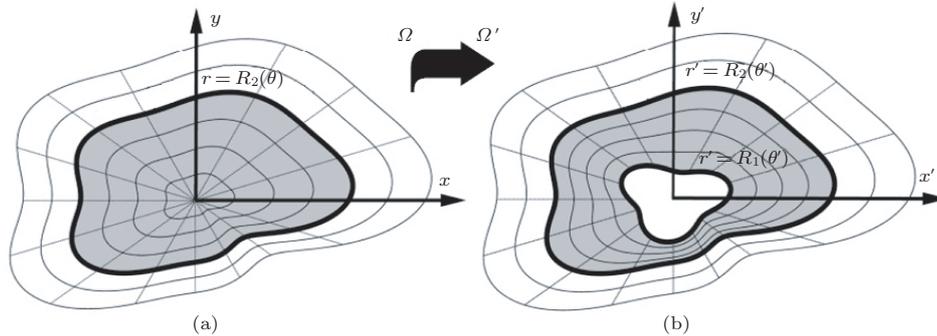


图 1 任意形状热隐身斗篷坐标变换示意图 (a) 原坐标空间; (b) 变换空间

$$x' = r' \cos \theta' = \frac{R_2 \left(\arctan \frac{y}{x} \right) - R_1 \left(\arctan \frac{y}{x} \right)}{R_2 \left(\arctan \frac{y}{x} \right)} x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} R_1 \left(\arctan \frac{y}{x} \right), \quad (5a)$$

$$y' = r' \sin \theta' = \frac{R_2 \left(\arctan \frac{y}{x} \right) - R_1 \left(\arctan \frac{y}{x} \right)}{R_2 \left(\arctan \frac{y}{x} \right)} y + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} R_1 \left(\arctan \frac{y}{x} \right), \quad (5b)$$

$$z' = z. \quad (5c)$$

将(5)式代入(3)式, 经推导可得所需变换媒质的热导率满足

$$\kappa'_{xx} = \frac{r'^2 \sin^2 \theta' - 2Kr' \sin \theta' \cos \theta' + [(r' - R_1(\theta'))^2 + K^2] \cos^2 \theta'}{r'(r' - R_1(\theta'))} \kappa, \quad (6a)$$

$$\kappa'_{xy} = \kappa'_{yx} = \frac{Kr' (\cos^2 \theta' - \sin^2 \theta') + [K^2 - R_1(\theta')(2r' - R_1(\theta'))] \sin \theta' \cos \theta'}{r'(r' - R_1(\theta'))} \kappa, \quad (6b)$$

$$\kappa'_{yy} = \frac{r'^2 \cos^2 \theta' - 2Kr' \sin \theta' \cos \theta' + [(r' - R_1(\theta'))^2 + K^2] \sin^2 \theta'}{r'(r' - R_1(\theta'))} \kappa, \quad (6c)$$

$$\kappa'_{zz} = \frac{r' - R_1(\theta')}{r'} \left[\frac{R_2(\theta')}{R_2(\theta') - R_1(\theta')} \right]^2 \kappa, \quad (6d)$$

式中

$$K = \frac{R_1(\theta')(r' - R_1(\theta')) \frac{dR_2(\theta')}{d\theta'} - R_2(\theta')(r' - R_2(\theta')) \frac{dR_1(\theta')}{d\theta'}}{R_2(\theta')(R_2(\theta') - R_1(\theta'))}.$$

方程组(6)是内外边界为 $r' = R_1(\theta')$ 和 $r' = R_2(\theta')$ 的柱形热斗篷媒质热导率的一般形式, 在 $R_1(\theta')$ 和 $R_2(\theta')$ 共形时可以简化为文献[27]的形式.

3 结果与讨论

为验证所得表达式的有效性, 采用 COMSOL 软件进行全波仿真. 仿真条件如下: 最高温度和最低温度分别为 600 K 和 293.15 K, $r' < R_1(\theta')$ 区和 $r' > R_2(\theta')$ 区材料为铜. 常温下铜的密度为 $\rho = 8700 \text{ kg/m}^3$, 热导率为 $\kappa = 400 \text{ W/m}\cdot\text{K}$, 热容量为 $c = 385 \text{ J/kg}\cdot\text{K}$. $R_1(\theta') < r' < R_2(\theta')$ 区的材料参数由(6)式计算.

3.1 非共形横截面热斗篷

热斗篷的横截面轮廓取决于边界函数, 对于非共形的任意柱形热斗篷, 只需令内外边界 $R_1(\theta')$ 和 $R_2(\theta')$ 分别取不同的函数使得 $R_2(\theta')/R_1(\theta') \neq C_0$ (C_0 为常数) 成立即可. 需注意的是, 为得到闭合区域, 应确保 $R_1(\theta')$ 所形成的全部区域位于 $R_2(\theta')$ 所包围的区域内. 仿真时将斗篷轮廓设置成如下形式:

$$R_1(\theta') = [12 + 2 \cos \theta' + \sin(2\theta') - 2 \sin(3\theta')] / 30,$$

$$R_2(\theta') = [10 + \sin \theta' - \sin(2\theta') + 2 \cos(5\theta')] / 12.$$

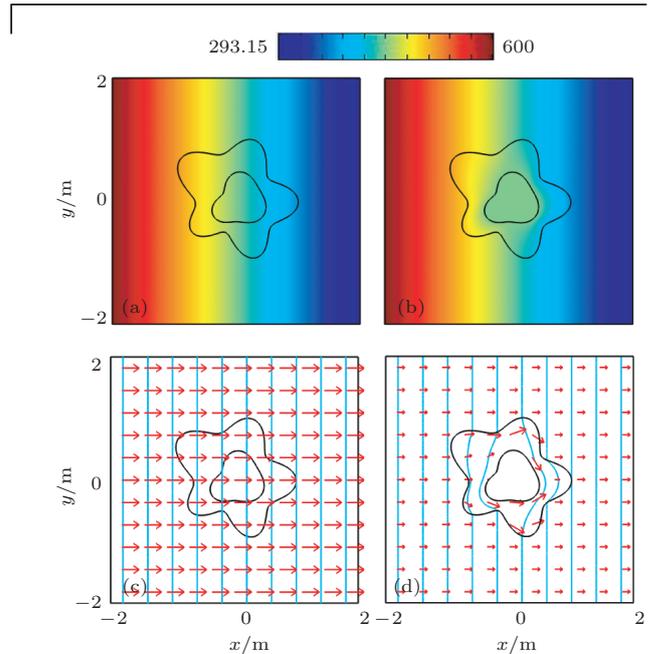


图2 横截面非共形的热隐身斗篷 (a), (b) 温度分布图; (c), (d) 等温线和热通量分布

图2(a)和(b)分别给出了仿真区域的温度分布, 图2(a)仿真的是铜柱, 图2(b)中 $r' < R_1(\theta')$ 和 $r' > R_2(\theta')$ 区的媒质也为铜, 而 $R_1(\theta') < r' < R_2(\theta')$ 区媒质的热导率由方程(6)计算. 由图可见, 斗篷外部的温度分布与铜柱情况完全一致, 就像斗篷不存在一样; 而斗篷内部温度分布与铜柱完全不同, 其温度分布与斗篷存在之前的温度分布相同[24]. 图2(c)和(d)是对应的热扩散图, 图中的浅蓝色实线表示等温线, 红色箭头表示热通量. 由

图2(c)可以看出,左侧的热均匀地向右流动,因此等温线均匀等距,热通量处处相等;在图2(d)中,左侧的热量沿着斗篷绕过中心区域流向右侧,斗篷区域没有热量流入,其温度分布与初始状态相同.显然,所设计的任意横截面形状热斗篷具备了热保护和热隐身的功能.

3.2 共形横截面热斗篷

为与其他文献结果比较,接下来研究圆柱形、椭圆柱形、正多边形柱形以及横截面共形的任意柱形热斗篷.作为典型例子,首先考虑圆柱形热斗篷.单位圆参数方程为 $R(\theta) = 1$, 仿真时将热斗篷边界设置为 $R_1(\theta') = 0.15R(\theta)$, $R_2(\theta') = 0.25R(\theta)$. 图3(a)和(b)分别表示温度分布及热扩散图,且浅蓝色实线和红色箭头分别表示等温线和热通量.由图可以看出,斗篷使等温线发生了弯曲,热量未流入斗篷区,这与文献[24]的结论一致.该斗篷同样具有热保护和热隐身双重功能.

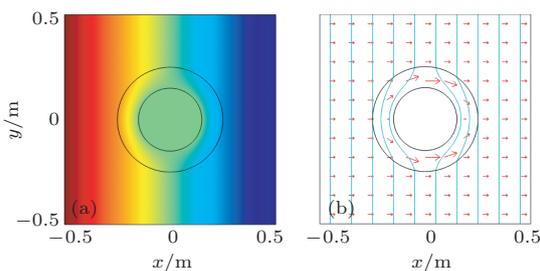


图3 圆柱形热斗篷 (a) 温度分布; (b) 等温线和热通量分布

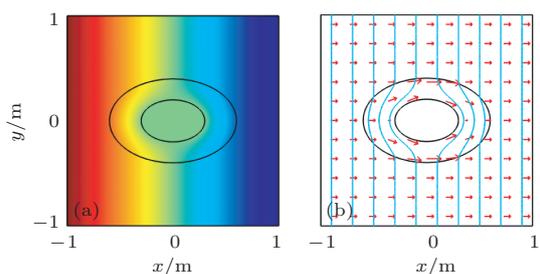


图4 椭圆柱形热隐身斗篷 (a) 温度分布; (b) 等温线和热通量分布

图4和图5分别是椭圆柱形和正六边柱形热斗篷的仿真结果.椭圆的参数方程为

$$R(\theta) = \frac{ab}{\sqrt{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta}},$$

a, b 分别对应长半轴和短半轴. 仿真时取 $a = 0.3 \text{ m}$, $b = 0.2 \text{ m}$, $R_1(\theta') = R(\theta)$, $R_2(\theta') = 2R(\theta)$.

而正多边形的参数方程是

$$R(\theta) = \frac{a_0 \tan(\pi/2 - \pi/N)}{2 \cos[\theta - 2(n-1)\pi/N - \theta_0]},$$

其中 a_0 为正多边形的边长, N, θ_0 分别为沿顺时针方向各边的编号和旋转角. 仿真时令 $N = 6$, 内、外环外接圆半径为 0.2 m 和 0.4 m , $R_1(\theta') = R(\theta)$, $R_2(\theta') = 2R(\theta)$. 由仿真结果可见,它们也同样具有双重的热隐身和热保护功能.

图6给出了具有共形横截面的任意柱形热斗篷的仿真结果.当边界函数 $R_1(\theta')$ 和 $R_2(\theta')$ 为一般曲线,且 $R_2(\theta')/R_1(\theta') = C_0$ 时 (C_0 为常数,即内外边界之间是线性关系),可得到具有共形轮廓的热斗篷.仿真参数如下:

$$\begin{aligned} R(\theta) &= 0.7 + 0.1 \sin \theta + 0.3 \sin(3\theta) + 0.2 \cos(5\theta), \\ R_1(\theta') &= \frac{1}{3}R(\theta), \\ R_2(\theta') &= R(\theta). \end{aligned}$$

从图6可看出,该斗篷外围的温度分布与其形状无关,而内部的温度分布由初始温度决定,这与文献[30]得到的结果是一致的.

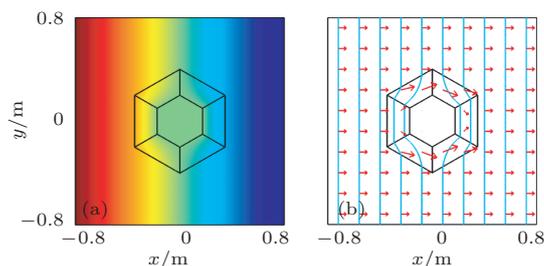


图5 正六边柱形热隐身斗篷 (a) 温度分布; (b) 等温线和热通量分布

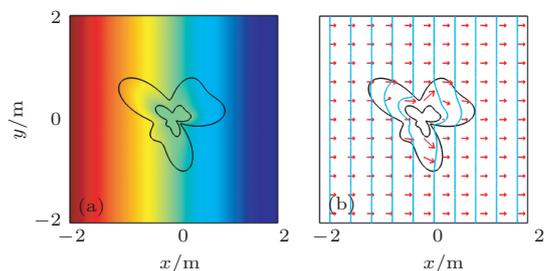


图6 横截面共形任意柱形隐身斗篷 (a) 温度分布图; (b) 等温线和热通量分布

4 结论

根据变换热力学思想,导出了任意横截面柱形热斗篷变换媒质热导率的一般表达式,并通过全波仿真进行了证实.分析仿真了非共形横截面柱形热

斗篷的温度分布特性和热传导特性, 结果表明, 热流绕过斗篷后将恢复原来的温度场分布, 从而对热“不可见”, 并导致斗篷区域热通量为零, 具有完美的热保护功能和热隐身功能, 进一步说明了文中方法的有效性. 为了与文献结果进行比较, 本文通过改变边界函数设计并分析了圆柱形、椭圆柱形、正六边柱形及具有共形横截面的任意柱形热斗篷的性能, 结果表明, 所推导变换媒质热导率公式具有普适性. 本文所导出的热导率表达式是在稳态和无源条件下得到的, 属于静热力学范畴, 下一步我们将研究有源非稳态条件下的热扩散问题, 以促进其在热保护和完美热隐身中的应用研究.

参考文献

- [1] Pendry J B, Schurig D, Smith D R 2006 *Science* **312** 1780
- [2] Leonhardt U 2006 *Science* **312** 1777
- [3] Qu S B, Wang J F, Ma H, Xu Z, Zhang J Q 2013 *Metamaterial Design and Applications in Stealth Technology* (Beijing: Science Press) p174 (in Chinese)[屈绍波, 王甲富, 马华, 徐卓, 张介秋 2013 超材料设计及其在隐身技术中的应用 (北京: 科学出版社) 第 174 页]
- [4] Wu Q, Zhang K, Meng F Y, Li L W 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6071
- [5] Gu C, Qu S B, Pei Z B, Xu Z, Liu J, Gu W 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 027801 (in Chinese)[顾超, 屈绍波, 裴志斌, 徐卓, 刘嘉, 顾巍 2011 物理学报 **60** 027801]
- [6] Wang Z, Luo X Y, Liu J J, Dong J F 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 024101 (in Chinese)[王战, 罗孝阳, 刘锦景, 董建峰 2013 物理学报 **62** 024101]
- [7] Wang S Y, Liu S B 2012 *Chin. Phys. B* **21** 044102
- [8] Guo P F, Li D, Dai Q, Fu Y Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 054101
- [9] Yang J J, Huang M, Yang C F, Xiao Z, Peng J H 2009 *Opt. Express* **17** 19661
- [10] Li T H, Huang M, Yang J J, Yu J, Lan Y Z 2011 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **44** 325102
- [11] Zheludev N I, Kivshar Y S 2012 *Nat. Mater.* **11** 917
- [12] Pendry J B, Aubry A, Smith D R, Maier S A 2012 *Science* **337** 549
- [13] Chen H Y, Chan C T 2010 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **43** 113001
- [14] Richard V C, Sébastein G 2013 *Acoustic Metamaterials* (Netherlands: Springer) pp197–218
- [15] Zhang S, Genov D A, Sun C, Zhang X 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 132002
- [16] Greenleaf A, Kurylev Y, Lassas M, Uhlmann G 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 220404
- [17] Yu Z Z, Feng Y J, Wang Z B, Zhao M J, Jiang T 2013 *Chin. Phys. B* **22** 034102
- [18] Milton G W, Briane M, Willis J R 2006 *New J. Phys.* **8** 248
- [19] Brun S, Guenneau, Movchan A B 2009 *Appl. Phys. Lett.* **94** 061903
- [20] Chen T, Weng C N, Chen J S 2008 *Appl. Phys. Lett.* **93** 114103
- [21] Narayana S, Sato Y 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 214303
- [22] Fan C Z, Gao Y, Huang J P 2008 *Appl. Phys. Lett.* **92** 251907
- [23] Li J Y, Gao Y, Huang J P 2010 *J. Appl. Phys.* **108** 074504
- [24] Guenneau S, Amra C, Veynante D 2012 *Optics Express* **20** 8207
- [25] Guenneau S, Amra C 2013 *Optics Express* **21** 6578
- [26] Schittny R, Kadic M, Guenneau S, Wegener M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 195901
- [27] Han T C, Yuan T, Li B W, Qiu C W 2013 *Scientific Reports* **3** 1593
- [28] He X, Wu L 2013 *Appl. Phys. Lett.* **102** 211912
- [29] Guenneau S, Puvirajesinghe T M 2013 *J. R. Soc. Interface* **10** 20130106
- [30] Yang T Z, Huang L J, Chen F, Xu W K 2013 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **46** 305102

Research and design of thermal cloak in arbitrary shape*

Mao Fu-Chun¹⁾ Li Ting-Hua¹⁾ Huang Ming^{1)†} Yang Jing-Jing¹⁾
Chen Jun-Chang²⁾

1) (*Wireless Innovation Lab of Yunnan University, Kunming 650091, China*)

2) (*School of Electronic Engineering, Beijing University of Posts and Telecommunications, Beijing 100876, China*)

(Received 29 July 2013; revised manuscript received 6 September 2013)

Abstract

On the basis of transformation thermodynamics, a thermal conductivity expression for cylindrical thermal cloak with arbitrary cross section is derived. Based on the expression, we design a thermal cloak with a non conformal section profile. Results of full wave simulation show that the cloak possesses heat protection function, since it is capable of guiding heat fluxes to travel around its inner domain, leaving the inner region untouched; meanwhile, the heat fluxes return to their original pathways, resulting in a perfect thermal invisible effect. Arbitrary shaped cylindrical thermal cloak with conformal or non-conformal cross section can be designed based on the derived thermal conductivity expression, and all of them have perfect thermal protection and invisibility functions. It is indicated that the derived conductivity expression is applicable to designing cylindrical thermal cloaks with an arbitrary cross section. The generality of this method has been confirmed, and it may have potential applications in the designing of thermal protection devices for computer chips and satellite, etc.

Keywords: transformation thermodynamics, thermal cloak, arbitrary shape, non conformal

PACS: 44.10.+I, 05.70.-a, 81.05.Xj, 07.05.Tp

DOI: [10.7498/aps.63.014401](https://doi.org/10.7498/aps.63.014401)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61161007, 61261002), the Key Program of Natural Science of Yunnan Province, China (Grant No. 2013FA006), and the Natural Science Foundation of Yunnan Province, China (Grant No. 2011FB018).

† Corresponding author. E-mail: huangming@ynu.edu.cn