

# 含定向非均匀体固体材料的横观各向同性有效弹性模量\*

宋永佳 胡恒山†

(哈尔滨工业大学, 航天科学与力学系, 哈尔滨 150001)

(2013年5月27日收到; 2013年10月2日收到修改稿)

针对非均匀体定向指向的情况, 将非均匀体对弹性波的散射等效为球形有效体对弹性波的散射, 推导出了呈现横观各向同性的有效弹性模量. 理论分析表明: 本文得到的有效模量公式至少具有二阶精度. 数值计算表明: 本文的有效模量随孔隙度增加而降低, 不会出现 Hudson 模型中在孔隙度超过一定阈值后不减反增的问题. 另外, 在非均匀体指向随机的情况, 本文得到的有效模量公式归结为 Kuster-Toksöz 模型的公式. 对于由扁状裂隙作为非均匀体的孔隙岩石, 裂隙内液体主要影响横观各向同性对称轴方向的纵波模量.

**关键词:** 有效弹性模量, 弹性波散射, 横观各向同性, 孔隙介质

**PACS:** 62.20.de, 91.60.Ba, 81.05.Rm, 91.55.Ax **DOI:** 10.7498/aps.63.016202

## 1 引言

两相或多相材料的有效弹性模量<sup>[1]</sup>是固体力学关注的经典问题. 人们既关注人工合成复合材料的有效弹性性质, 又关注天然含孔隙、裂隙岩石的有效弹性模量<sup>[2]</sup>. 为使人工合成的复合材料具有特定的性能, 所添加的“包体”往往具有某种特定的排列方式, 例如添加纤维增强体用来增强抗拉伸性; 多孔岩石在地应力作用下, 其内部孔隙或裂隙的指向往往具有定向特点, 这些都会导致宏观模量呈现出各向异性, 尤其是横观各向同性 (transverse isotropy, TI)<sup>[3,4]</sup>. 近年来, 地球物理领域关心与弹性波传播相关的模量问题<sup>[5-8]</sup>. Eshelby<sup>[9,10]</sup>给出了各向同性基质中稀疏椭球形非均匀体内、外的弹性场. 由于非均匀体内部弹性场的简易性, Eshelby<sup>[9]</sup>的解成为了很多有效弹性模量预报理论的基础, 包括自洽理论 (self-consistent 理论, S-C 理论, 例如 O’Connell 等<sup>[11]</sup> 和 Berryman 等<sup>[12]</sup>) 和微分法 (DEM 法, 例如 Bruner<sup>[13]</sup> 和 Sun 等<sup>[14]</sup>) 等.

Kuster 和 Toksöz<sup>[15]</sup> 基于弹性波散射理论给出了含随机非均匀体材料的有效弹性模量预报公式, 也正是由于非均匀体是随机指向的, 他们的模型 (K-T 模型) 只限于预报各向同性的有效模量. 断层和一些孔隙岩石中会存在定向裂隙, 这会导致有效模量呈现出横观各向同性的特征, 因此对含定向非均匀体介质的有效模量预报具有实际意义.

对于非均匀体定向指向的情况, 已有的、应用比较广泛的有效模量模型包括 Eshelby-Cheng 模型<sup>[16]</sup> (E-C 模型) 和 Hudson 模型<sup>[17]</sup>. 基于 Eshelby 的解<sup>[9]</sup>, Cheng<sup>[16]</sup> 从应变能出发, 给出了含一般椭球形非均匀体固体材料有效弹性模量的计算公式, 即 E-C 模型. Hudson<sup>[17]</sup> 从分别求非均匀体的单散射波和二重散射波的角度也给出了有效弹性模量的计算公式. E-C 模型和 Hudson 模型预报的有效模量均呈现 TI 特征. Liu 等<sup>[6]</sup> 和 Chapman<sup>[18]</sup> 在 E-C 模型的框架内考虑液体在孔隙和裂隙间的局域流动, 得到了复 TI 弹性模量, 这对解释弹性波在多孔岩石中传播时的频散和衰减具有重要理论意义. 但 E-C 模型只具有一阶精度且过于粗糙, 计算

\* 国家自然科学基金 (批准号: 41174110, 11372091) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: hhs@hit.edu.cn

的有效模量随孔隙度的增加而线性降低, 不能够应用于更高孔隙度或更高裂隙密度的情况. Hudson模型虽然具有二阶精度, 但当孔隙度超过一定阈值后有效模量不减反增, 这与实际不符. 因此, E-C模型和Hudson模型都只适用于低含量非均匀体的情况. Jakobsen等<sup>[19]</sup>基于Eshelby<sup>[10]</sup>的外部解给出了有效模量预报理论(即T-Matrix方法), 该理论也能预报含定向非均匀体材料的有效模量, 且精度高. 但由于T-Matrix方法不仅需要准确知道非均匀体的分布和微结构, 还需要数值解积分式(来自于对Green函数的积分), 所以该理论不是一种易于实现、简单的快速方法. 最近, 孔丽云等<sup>[20]</sup>考虑了裂隙诱导的TI双孔隙介质的弹性模量; Shen等<sup>[21]</sup>考虑一维纵向应力的情况, 利用能量守恒原理给出了含缺陷固体介质的杨氏模量; Ma等<sup>[22]</sup>考虑了非均匀体指向及形状对有效弹性模量的影响, 结合成像技术和有限元方法计算了含孔隙和定向裂隙涂层材料的有效弹性模量.

线性的E-C模型和抛物型的Hudson模型都没法相对准确预报非均匀体中等含量范围的有效弹性模量, Hudson也曾证明过微分法和自洽理论都不具有二阶精度. 建立一种适用于非均匀体含量较高、计算简便且精度高的模型具有重要的意义. 本文的目的是建立一种适用于非均匀体中等含量、计算简便且精度高的含定向非均匀体固体材料的有效弹性模量模型. 这不仅对解释一些岩石呈现弹性各向异性的特点具有实际意义, 而且对认识断层的弹性性质具有一定意义, 还对预报人工复合材料有效模量具有指导意义.

## 2 基于球形有效体的TI有效弹性模量推导

假设复合材料中的各成分相(包括背景基质和非均匀体)的弹性模量是各向同性的, 图1给出了含定向非均匀体复合材料的示意图, 本文研究的有效弹性模量的各向异性是由椭球形非均匀体定向排列造成的. 从图1中适当抽取一小块包含有非均匀体的球形区域作为有效体, 如图2(a)虚线包围的区域所示. 设 $\Omega$ 为非均匀体所占据的区域. 在弹性波扰动作用下, 设 $\mathbf{u}^0(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$ 为远处弹性波入射位移场,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$ 和 $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \exp(-i\omega t)$

分别为 $\Omega$ 外部和 $\Omega$ 内部的总位移场, 则有

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^s(\mathbf{x}), \mathbf{x} \notin \Omega, \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}) &= \mathbf{u}^0(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^s(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in \Omega, \end{aligned} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{u}^s$ 和 $\mathbf{v}^s$ 为散射场,  $\omega$ 为角频率,  $t$ 为时间,  $i = \sqrt{-1}$ 为单位虚数. 根据Mal和Knopoff<sup>[23]</sup>给出的散射位移场积分表达式, 非均匀体(即散射子)外部散射场为

$$\begin{aligned} u_k^s(\mathbf{x}) &= \int_{\Omega} \left[ \Delta\rho\omega^2 v_i(\boldsymbol{\zeta}) G_{ki}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta}) \right. \\ &\quad \left. - \Delta C_{ijpq} \frac{\partial v_p(\boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta_q} \frac{\partial G_{ki}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})}{\partial \zeta_j} \right] d\boldsymbol{\zeta}, \end{aligned} \quad (2)$$

其中重复下标满足Einstein求和约定.  $G_{ki}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\zeta})$ 为格林函数, 向量 $\mathbf{x}$ 和 $\boldsymbol{\zeta}$ 分别为观测点的空间坐标和散射子内部的空间坐标,  $v_i$ 为散射子内的总位移场,  $\Delta\rho$ 和 $\Delta C_{ijpq}$ 分别为非均匀体与背景基质的密度差和弹性模量差

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \rho' - \rho, \\ \Delta C &= C' - C, \end{aligned} \quad (3)$$

其中上标带一撇的物理量表示非均匀体的密度和弹性模量, 不带撇的物理量表示背景基质的密度和弹性模量. 各向同性弹性模量 $C$ 和 $C'$ 的表达式为

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= \lambda\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \\ C'_{ijkl} &= \lambda'\delta_{ij}\delta_{kl} + \mu'(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \end{aligned} \quad (4)$$

其中 $\lambda, \mu$ 和 $\lambda', \mu'$ 分别为背景基质和非均匀体的拉梅常数,  $\delta_{ij}$ 为Kronecker符号.

一方面, 对于小体积的散射子而言, Miles<sup>[24]</sup>指出: 散射子内部位移的一阶近似等于无散射子时的位移, 即 $\mathbf{v}(\boldsymbol{\zeta}) = \mathbf{u}^0$ ; 另一方面, 在波长远大于非均匀体尺寸的前提下, 小尺度非均匀体内的应变可近似为准静态的情况. 因此(2)式可改写为

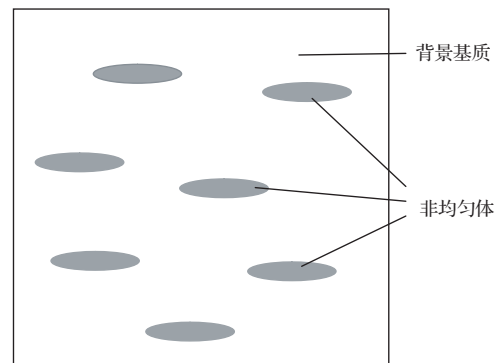


图1 含定向非均匀体复合材料的示意图

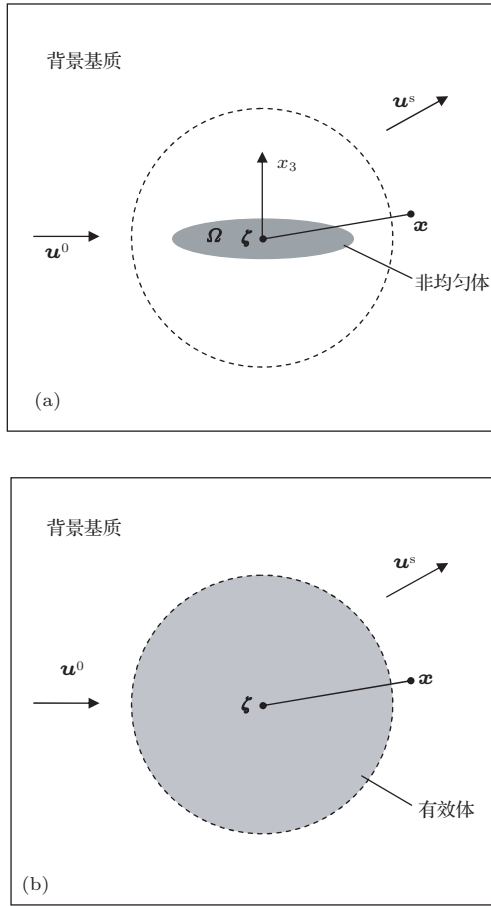


图2 弹性波散射示意图 (a) 非均匀体散射; (b) 球形有效体散射

$$u_k^s(\mathbf{x}) = V_\Omega \left[ \Delta \rho \omega^2 u_i^0(\zeta) G_{ki}(\mathbf{x}, \zeta) - \Delta C_{ijpq} U_{pqrs} e_{rs}^0 \frac{\partial G_{ki}(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \zeta_j} \right], \quad (5)$$

其中  $V_\Omega$  为  $\Omega$  的体积. 四阶张量  $U_{pqrs}$  与非均匀体的指向有关, 它表示远处施加应变场到非均匀体内部总应变场的变换关系

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\partial v_p(\zeta)}{\partial \zeta_q} + \frac{\partial v_q(\zeta)}{\partial \zeta_p} \right] = U_{pqrs} e_{rs}^0. \quad (6)$$

(6) 式中远处施加应变  $e_{rs}^0$  与入射位移场  $u^0$  存在几何对应关系. 张量  $U$  与应变集中张量  $T$  (也称 Wu 张量<sup>[25]</sup>) 满足坐标变换关系

$$U_{ijkl} = l_{\alpha i} l_{\beta j} l_{\gamma k} l_{\delta l} T_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (7)$$

(7) 式中的  $l_{mn}$  为非均匀体的局部系第  $m$  个坐标轴与宏观系第  $n$  个坐标轴夹角的余弦, 因此  $l_{\alpha i} l_{\beta j} l_{\gamma k} l_{\delta l}$  是张量  $T$  由局部系到宏观系的坐标变换. Wu 张量  $T$  是在非均匀体局部系与宏观系一致时远场施加应变  $e^0$  到非均匀体内总应变的函数关系, 它与背景基质的弹性模量、非均匀体的弹性模

量及其形状有关,  $T$  的表达式为 (Qu 等<sup>[26]</sup>)

$$T = [I + SC^{-1}(C' - C)]^{-1}, \quad (8)$$

其中  $I$  为四阶单位张量.  $S$  为非均匀体的 Eshelby 张量<sup>[9]</sup>, 它只与非均匀体的形状和背景基质的泊松比有关. 括号外的上标  $-1$  表示求逆. (7) 式中坐标变换的引入是为考虑局部系与宏观系可能不重合的情况 (本文只限局部系与宏观系间存在旋转变换的情况). 以椭球形非均匀体为例, 若半轴  $a_1 = a_2 \neq a_3$ , 可定义  $a_3/a_1$  为纵横比,  $a_3$  半轴所在的方向为非均匀体的指向.

若非均匀体  $\Omega$  在背景基质中的散射场等效为球形有效体 (图 2 (b) 虚线部分) 在背景基质中的散射场, 则可利用这一假设求得有效体的弹性模量. 参照 (5) 式, 可直接写出有效体在背景基质中的散射位移场

$$u_k^s(\mathbf{x}) = V^* \left[ \Delta \rho^* \omega^2 u_i^0(\zeta) G_{ki}(\mathbf{x}, \zeta) - \Delta C_{ijpq}^* U_{pqrs}^* e_{rs}^0 \frac{\partial G_{ki}(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \zeta_j} \right], \quad (9)$$

其中上标 \* 表示与有效体有关的待求物理量,  $V^*$  为有效体的体积,

$$\begin{aligned} \Delta \rho^* &= \rho^* - \rho, \\ \Delta C^* &= C^* - C. \end{aligned} \quad (10)$$

(10) 式中的  $\rho^*$  和  $C^*$  分别为待求有效体的密度和弹性模量. 令

$$c = \frac{V_\Omega}{V^*} \quad (11)$$

表示非均匀体在有效体中占有的体积份数. 为简便, 假设我们考虑的是两相复合材料且非均匀体的形状和大小相同、指向也相同. 若非均匀体的散射场等于有效体的散射场, 即 (5) 式和 (9) 式相等得到

$$\begin{aligned} &(\Delta \rho^* - c \Delta \rho) \omega^2 u_i^0(\zeta) G_{ki}(\mathbf{x}, \zeta) \\ &- (\Delta C_{ijpq}^* U_{pqrs}^* - c \Delta C_{ijpq} U_{pqrs}) \\ &\times e_{rs}^0 \frac{\partial G_{ki}(\mathbf{x}, \zeta)}{\partial \zeta_j} = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

(12) 式对任意施加的位移  $u^0$  及应变  $e^0$  都成立, 因此 (12) 式左端两项同时为零, 再由 (3) 式和 (10) 式得有效密度的表达式为

$$\rho^* = (1 - c) \rho + c \rho', \quad (13)$$

有效弹性模量满足

$$(C^* - C) U^* = c (C' - C) U, \quad (14)$$

或

$$C^* = cC'UU^{*-1} + C(I - cUU^{*-1}). \quad (15)$$

张量  $cUU^{*-1}$  和  $I - cUU^{*-1}$  相当于非均匀体弹性模量和背景基质弹性模量在有效弹性模量中的权. 但由于张量  $U^{*-1}$  本身也与  $C^*$  有关, 因而 (15) 式只是  $C^*$  的隐式表达.

下面将给出有效模量的显式表达. 为简便, 认为宏观系与有效体的坐标系是重合的, 因此有

$$U^* = T^* = [I + S^*C^{-1}(C^* - C)]^{-1}, \quad (16)$$

其中  $S^*$  为球形有效体的 Eshelby 张量, 它只与背景基质的泊松比  $\nu$  有关, 其表达式为 (Eshelby [9], Mura [27])

$$S_{ijkl}^* = \frac{1}{15} \left[ \delta_{ij}\delta_{kl} \frac{5\nu - 1}{1 - \nu} + (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) \frac{4 - 5\nu}{1 - \nu} \right]. \quad (17)$$

将 (16) 式代入 (14) 式得  $C^*$  满足

$$C^* - C = c(C' - C)U [I + S^*C^{-1}(C^* - C)]. \quad (18)$$

移项后得  $C^*$  的显式表达式

$$C^* = C + c [I - c(C' - C)US^*C^{-1}]^{-1} \times (C' - C)U. \quad (19)$$

$T$  与  $U$  间的关系式 (7) 也可表示为

$$U = L^{-1}TL, \quad (20)$$

其中  $L$  为四阶坐标变换张量. 各向同性弹性模量  $C$ ,  $C'$  和弹性柔度  $C^{-1}$  以及球形 Eshelby 张量  $S^*$  与坐标旋转无关, 这四个张量满足

$$X = L^{-1}XL, \quad (21)$$

其中  $X$  可取  $C$ ,  $C'$ ,  $C^{-1}$  和  $S^*$ . 将 (20) 式代入 (19) 式并由张量的旋转不变性 (21) 式得

$$C^* = C + cL^{-1} [I - c(C' - C)TS^*C^{-1}]^{-1} \times (C' - C)TL. \quad (22)$$

有效模量表达 (22) 中含有的张量  $L$  体现了非均匀体局部系可能与宏观观测系存在旋转变换. 当非均匀体局部系与宏观系一致时 (即  $L = I$  时), 有效模量为

$$C^* = C + c [I - c(C' - C)TS^*C^{-1}]^{-1} \times (C' - C)T. \quad (23)$$

可以证明有效模量表达 (23) 式呈现 TI 的特征.  $C^*$  的显式表达 (22) 式或 (23) 式是本文得到的主要公式.

### 3 非均匀体在两种特殊指向情况下的有效弹性模量

若非均匀体的指向都相同, 用 (23) 式可以直接求出有效弹性模量. 但当非均匀体随机指向或指向具有一定规律的时候, (22) 式中坐标变换张量  $L$  的作用就体现了出来. 有效弹性模量的表达 (22) 可改写为隐式形式

$$\frac{1}{c}(C' - C)^{-1}(C^* - C)T^* = L^{-1}TL = U, \quad (24)$$

从 (24) 式可以看出惟一与指向有关的变量是  $U$ , 因此当非均匀体的指向具有一定规律时, 只需要找到等效的  $\tilde{T}$  代替 (24) 式中  $L^{-1}TL$  (或  $U$ ) 即可求出相应的有效模量. 再由 (24) 式与 (19) 等价知只要将  $\tilde{T}$  代替 (19) 式中的  $U$  即可求出相应的有效模量

$$\tilde{C}^* = C + c [I - c(C' - C)\tilde{T}S^*C^{-1}]^{-1} \times (C' - C)\tilde{T}. \quad (25)$$

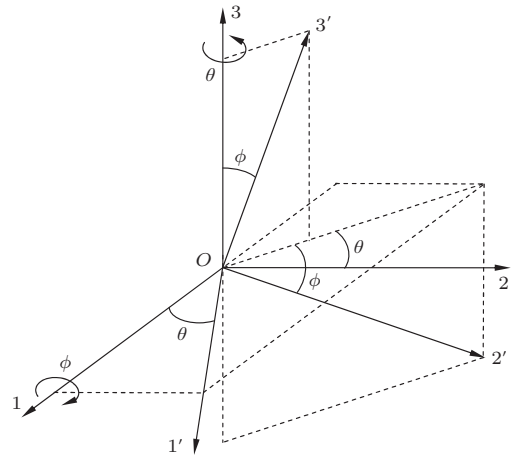


图3 坐标系旋转示意图

首先考虑如图 3 所示两个直角坐标系 (1, 2, 3) 和 (1', 2', 3'). 坐标系 (1', 2', 3') 可由坐标系 (1, 2, 3) 绕固定  $O$  点进行如下旋转得到: 坐标系 (1, 2, 3) 先以 1 轴为对称轴顺时针旋转  $\phi$  角, 再以 3 轴为对称轴逆时针旋转  $\theta$  角. (1, 2, 3) 系与 (1', 2', 3') 系坐标轴夹角余弦如表 1 所示.



表1 坐标轴夹角余弦

	1	2	3
1'	$\cos \theta$	$\sin \theta$	0
2'	$-\cos \phi \sin \theta$	$\cos \phi \cos \theta$	$-\sin \phi$
3'	$-\sin \phi \sin \theta$	$\cos \theta \sin \phi$	$\cos \phi$

在下文的推导中认为(1, 2, 3)系为宏观观测系, (1', 2', 3')系为非均匀体局部坐标系.

### 3.1 非均匀体在某一平面内随机指向的情况

多孔岩石中的孔隙(非均匀体的一种), 可能是或近似是球形( $a_1 = a_2 = a_3$ )的, 也可能是扁状的椭球( $a_1 = a_2 > a_3$ ), 还可能是细长形的椭球( $a_1 = a_2 < a_3$ ). 在沉积岩形成过程中, 若扁状孔隙的短轴 $a_3$ 平行于TI对称轴, 这种情况下可直接利用(23)式求出岩石的有效模量.

若细长形孔隙(包括针状裂隙或圆管型裂隙)的长轴 $a_3$ 垂直于竖直方向且指向(长轴方向)在水平面内是随机的, 这相当于非均匀体在某一平面内随机指向的, 这种情况也可以造成TI. 因此也需要考虑非均匀体方向( $a_3$ 所在的方向)垂直于TI对称轴且非均匀体在向同性面内随机指向的情况. 当非均匀体方向垂直于TI对称轴(即 $\phi = \frac{\pi}{2}$ )且在同性面内随机指向时,  $\tilde{T}$ 的表达式为

$$\tilde{T} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} L^{-1} T L d\theta. \quad (26)$$

将表1给出的夹角余弦代入(26)式得 $\tilde{T}$ 的各个分量为

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{1111} &= \frac{3}{8}T_{1111} + \frac{3}{8}T_{3333} + \frac{1}{8}T_{1133} + \frac{1}{8}T_{3311} \\ &\quad + \frac{1}{4}(T_{1313} + T_{1331}), \\ \tilde{T}_{1122} &= \frac{1}{8}T_{1111} + \frac{1}{8}T_{3333} + \frac{3}{8}T_{1133} + \frac{3}{8}T_{3311} \\ &\quad - \frac{1}{4}(T_{1313} + T_{1331}), \\ \tilde{T}_{1133} &= \frac{1}{2}T_{1122} + \frac{1}{2}T_{3322}, \\ \tilde{T}_{2211} &= \tilde{T}_{1122}, \\ \tilde{T}_{2222} &= \tilde{T}_{1111}, \\ \tilde{T}_{2233} &= \tilde{T}_{1133}, \\ \tilde{T}_{3311} &= \frac{1}{2}T_{2211} + \frac{1}{2}T_{2233}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{T}_{3322} &= \tilde{T}_{3311}, \\ \tilde{T}_{3333} &= T_{2222}, \\ \tilde{T}_{2323} &= \frac{1}{4}(T_{2323} + T_{2332}) + \frac{1}{4}(T_{1212} + T_{1221}), \\ \tilde{T}_{1313} &= \tilde{T}_{2323}, \\ \tilde{T}_{1212} &= \frac{1}{8}T_{1111} + \frac{1}{8}T_{3333} - \frac{1}{8}T_{1133} - \frac{1}{8}T_{3311} \\ &\quad + \frac{1}{4}(T_{1313} + T_{1331}), \end{aligned} \quad (27)$$

其余非零分量(例如 $\tilde{T}_{1221}, \tilde{T}_{2332}$ 等)可通过对称性关系 $\tilde{T}_{ijkl} = \tilde{T}_{jikl} = \tilde{T}_{ijlk}$ 由(27)式得到. 因此, 当非均匀体在某一平面内随机指向时(例如, 细长形非均匀体随机地”躺在”各向同性面内), 将(27)式代入(25)式就得到了TI有效弹性模量 $\tilde{C}^*$ .

### 3.2 非均匀体随机指向的情况

岩石材料中的椭球形孔隙也可能是随机指向的. 在非均匀体随机指向情况下, 附录A1推导出了各向同性的有效弹性模量(体积模量 $K^*$ 和剪切模量 $\mu^*$ )满足

$$\begin{aligned} (K^* - K) \frac{3K + 4\mu}{3K^* + 4\mu} &= c(K' - K)P, \\ (\mu^* - \mu) \frac{5\mu(3K + 4\mu)}{6\mu^*(K + 2\mu) + \mu(9K + 8\mu)} \\ &= c(\mu' - \mu)Q, \end{aligned} \quad (28)$$

其中 $K$ 和 $\mu$ 分别为背景基质的体积模量和剪切模量,  $K'$ 和 $\mu'$ 分别为非均匀体的体积模量和剪切模量. 无量纲的参数

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3}T_{ijij}, \\ Q &= \frac{1}{5} \left( T_{ijij} - \frac{1}{3}T_{iijj} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

各向同性有效弹性模量(28)式与Kuster和Toksöz<sup>[15]</sup>得到的结果一致, 即当非均匀体随机指向时本文模型归结为K-T模型.

## 4 数值算例

下面对本文得到的主要(23)式给出数值算例. 假设TI对称轴方向为 $x_3$ 方向, 如图2(a)所示. 算例给出的双下标弹性模量与四阶张量形式的弹性模量存在对应关系

$$\begin{aligned} C_{11} &= C_{1111}, & C_{12} &= C_{1122}, \\ C_{13} &= C_{1133}, & C_{22} &= C_{2222}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{23} &= C_{2233}, & C_{33} &= C_{3333}, \\
 C_{44} &= C_{2323} + C_{2332}, \\
 C_{55} &= C_{1313} + C_{1331}, \\
 C_{66} &= C_{1212} + C_{1221}. \quad (30)
 \end{aligned}$$

本文所有与弹性模量有关的算例都是针对有效弹性模量,在不引起混淆的前提下,图中(例如图4、图5和图7)有效模量符号省略星号上标。

以多孔岩石为例,固体基质往往被看做背景基质,孔隙看做是非均匀体.孔隙不可能是厚度为零的圆形或是理想的球体或是无限长的圆管,我们将孔隙看做是两个轴长度相等( $2a_1 = 2a_2 = 2a$ ),纵横比 $\gamma (= a_3/a_1)$ 在0到无穷大间可任意取值的椭球体.小纵横比的孔隙相当于扁状的裂隙,大纵横比的孔隙相当于针状或圆管形的裂隙.孔隙密度 $\varepsilon$ 与孔隙度 $\varphi$ 表达式为

$$\varepsilon = \frac{Na^3}{V}, \quad \varphi = N \cdot \frac{4\pi a^3}{3V} \gamma = \frac{4}{3}\pi\varepsilon\gamma, \quad (31)$$

其中 $N$ 表示在体积为 $V$ 的有效体中孔隙的个数.孔隙度 $\varphi$ 表示孔隙占有的体积份数, $\varphi$ 相当于是(22)式中的 $c$ .

在计算时采用文献[28]给出的Eshelby张量

$$\begin{aligned}
 S_{1111} &= S_{2222} \\
 &= -\frac{3\gamma^2}{8(1-\nu)(1-\gamma^2)} \\
 &\quad + \frac{1}{4(1-\nu)} \left[ 1 - 2\nu + \frac{9}{4(1-\gamma^2)} \right] g, \\
 S_{3333} &= \frac{1}{1-\nu} \left( 2 - \nu - \frac{1}{1-\gamma^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ -2(2-\nu) + \frac{3}{1-\gamma^2} \right] g, \\
 S_{1122} &= S_{2211} \\
 &= \frac{1}{8(1-\nu)} \left( 1 - \frac{1}{1-\gamma^2} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{16(1-\nu)} \left[ -4(1-2\nu) + \frac{3}{1-\gamma^2} \right] g, \\
 S_{1133} &= S_{2233} \\
 &= \frac{\gamma^2}{2(1-\nu)(1-\gamma^2)} \\
 &\quad - \frac{1}{4(1-\nu)} \left[ 1 - 2\nu + \frac{3\gamma^2}{1-\gamma^2} \right] g, \\
 S_{3311} &= S_{3322} \\
 &= \frac{1}{2(1-\nu)} \left[ -(1-2\nu) + \frac{1}{1-\gamma^2} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\quad + \frac{1}{4(1-\nu)} \left[ 2(1-2\nu) - \frac{3}{1-\gamma^2} \right] g, \\
 S_{1212} &= S_{2121} \\
 &= -\frac{\gamma^2}{8(1-\nu)(1-\gamma^2)} \\
 &\quad + \frac{1}{16(1-\nu)} \left[ 4(1-2\nu) + \frac{3}{1-\gamma^2} \right] g, \\
 S_{1313} &= S_{2323} \\
 &= \frac{1}{4(1-\nu)} \left( 1 - 2\nu + \frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{8(1-\nu)} \left( 1 - 2\nu + 3\frac{1+\gamma^2}{1-\gamma^2} \right) g, \quad (32)
 \end{aligned}$$

其余非零分量可由对称性 $S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk}$ 计算得到.(32)式中 $\nu$ 为背景基质的泊松比.与纵横比有关的函数

$$g = \begin{cases} \frac{\gamma}{(1-\gamma^2)^{3/2}} \left( \arccos \gamma - \gamma\sqrt{1-\gamma^2} \right), & \gamma < 1, \\ \frac{\gamma}{(\gamma^2-1)^{3/2}} \left( \gamma\sqrt{\gamma^2-1} - \operatorname{arccosh} \gamma \right), & \gamma > 1. \end{cases} \quad (33)$$

以干燥情况为例,为研究纵横比(或孔隙形状)对有效模量的影响,图4(a)–(f)在不同纵横比条件下给出了随孔隙密度 $\varepsilon$ 或孔隙度 $\varphi$ 变化的归一化弹性模量.选取的计算参数为:固体体积模量 $K = 37.9$  GPa,固体剪切模量 $\mu = 32.6$  GPa,纵横比如图所示.对比图4(a)–(f)可知,对扁状裂隙而言,裂隙增多主要降低 $C_{13}$ 和 $C_{33}$ ,而对 $C_{11}$ 和 $C_{66}$ 影响很小.图4(a)中的 $C_{13}$ 和 $C_{33}$ 两条曲线很接近,几乎重合.对于细长形的裂隙而言,所有的弹性模量均随裂隙含量的增加而显著减小,而最敏感的模量是 $C_{66}$ 和 $C_{11}$ .因此不仅孔隙含量,孔隙形状也对弹性模量产生重要影响.

孔隙中也可能充满液体.为研究液体对有效模量的影响,图5计算了随流体体积模量 $K_f$ 变化的有效弹性模量.计算选取的背景基质模量参数同图4,孔隙参数:纵横比 $\gamma = 0.1$ ,孔隙密度 $\varepsilon = 0.1$ .从图中可以看出,与剪切有关的模量 $C_{44}$ 和 $C_{66}$ 不随流体体积模量变化而变化.对算例中所选用的扁状裂隙来说,TI对称轴方向上的纵波模量 $C_{33}$ 受流体体积模量的影响最大(曲线斜率最大),其余模量 $C_{11}$ , $C_{12}$ 和 $C_{13}$ 虽然也受流体体积模量的影响,但影响很微小.

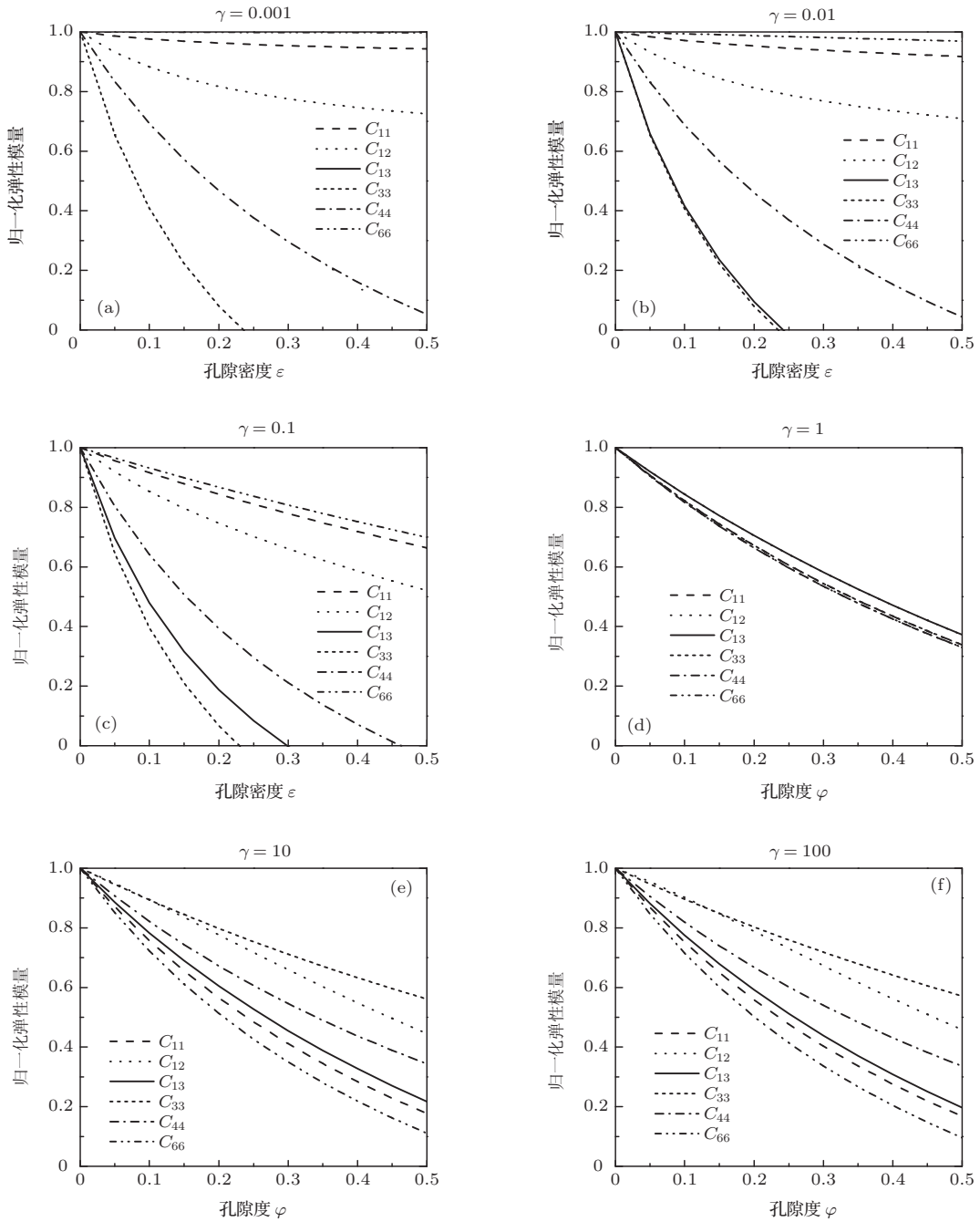


图4 随孔隙含量变化的归一化弹性模量 (a) 纵横比  $\gamma = 0.001$  的计算结果; (b) 纵横比  $\gamma = 0.01$  的计算结果; (c) 纵横比  $\gamma = 0.1$  的计算结果; (d) 纵横比  $\gamma = 1$  的计算结果; (e) 纵横比  $\gamma = 10$  的计算结果; (f) 纵横比  $\gamma = 100$  的计算结果

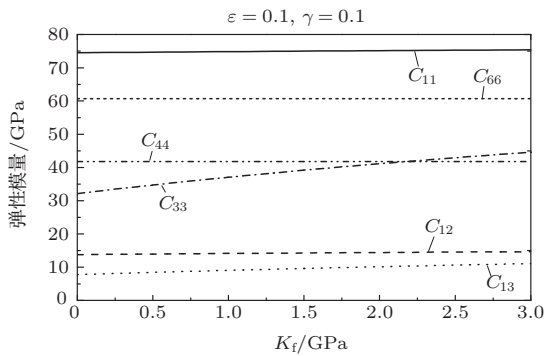


图5 随流体体积模量变化的有效弹性模量

采用Auld(文献[29]中的公式7.14)给出的TI介质中准P波、准SV波和准SH波的平面波速度公式计算弹性波慢度. 图6(a)和(b)分别给出了干燥和液体饱和情况下平面波的归一化慢度图. 图中的竖线表示对称轴, 计算选取的基质模量参数同图4, 孔隙参数:  $\epsilon = 0.1, \gamma = 0.01$ , 图6(b)中的液体体积模量  $K_f = 2.2$  GPa. 比较图6(a)和(b)知: 由于干燥到液体饱和变化过程中, 准P波以及准SV波的慢度存在显著差异. 相比于液体饱和情况, 干燥情

况下的准P波展现出更强的各向异性, 对称轴方向的纵波慢度明显大于其他方向的准P波慢度, 这是因为干燥条件下  $C_{33}$  较小. 而在液体饱和情况下, 液体的引入降低了准P波的各向异性程度. 准SV波在干燥和液体饱和这两种情况下的慢度也存在较大差异. 准SH波在干燥和液体饱和两种情况下的慢度几乎没有区别, 这是因为液体的引入不改变

模量  $C_{44}$  和  $C_{66}$ , 并且扁状的裂隙体积份数很小以至于 (13) 式决定的有效密度几乎不变. 从图 6 (b) 知对于液体饱和的岩样, 在与TI对称轴成一定夹角的方向上可能存在准SH波波速小于准SV波波速的情况(即准SH波慢度大于准SV波慢度的情况).

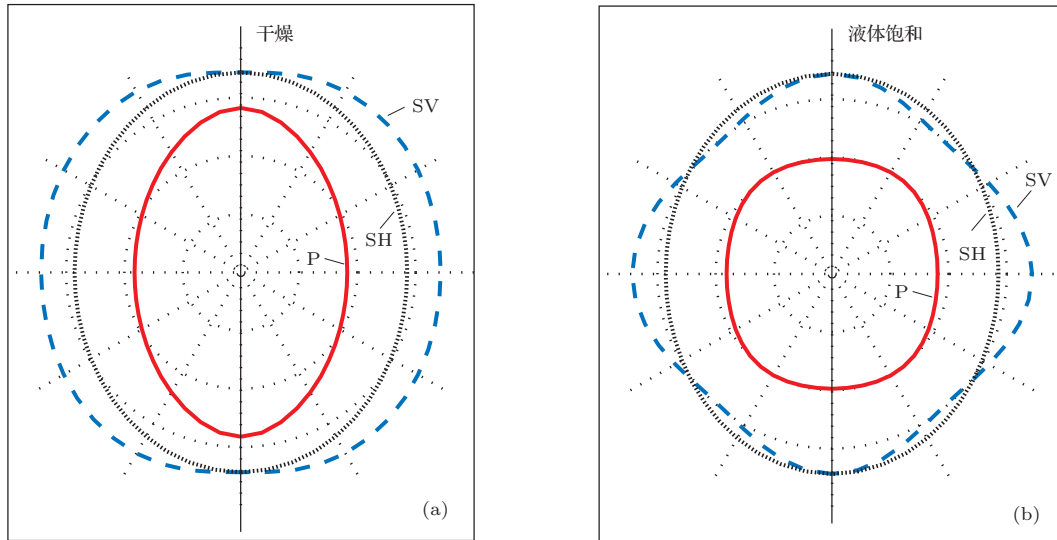


图6 归一化慢度 (a) 孔隙内干燥(不含液体)情况的计算结果; (b) 孔隙内液体饱和情况的计算结果

## 5 本文模型与 Eshelby-Cheng 模型和 Hudson 模型比较

### 5.1 Eshelby-Cheng 模型

Cheng<sup>[16]</sup> 基于 Eshelby<sup>[9]</sup> 的解从考虑应变能出发给出了两相材料的有效模量(TI特点)预报理论, 因此简称为 E-C 模型, 但该模型只限于非均匀体定向指向的情况, 且只具有一阶精度. 下面在重新推导出 E-C 模型基础上, 将 E-C 模型推广到适用于非均匀体随机指向的情况.

复合材料的有效(或平均)应力  $\bar{\sigma}$  和有效(或平均)应变  $\bar{e}$  可表示为(Hill<sup>[30]</sup>)

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \frac{1}{V^*} \int_{V^*} \sigma dV = \frac{1}{V^*} \sum_{n=0}^N \int_{V_n} \sigma_n dV \\ &= \sum_{n=0}^N c_n \sigma_n, \\ \bar{e} &= \frac{1}{V^*} \int_{V^*} e dV = \frac{1}{V^*} \sum_{n=0}^N \int_{V_n} e_n dV \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^N c_n e_n = \sum_{n=0}^N c_n C_n^{-1} \sigma_n, \quad (34)$$

其中  $c_n$  为第  $n$  个材料体的体积份数.  $n=0$  表示背景基质, 有  $C_0^{-1} = C^{-1}$ ;  $e_0$  为背景基质的总应变, 不同于远处施加应变  $e^0$ .

两相材料总应变能为

$$\begin{aligned} \frac{V^*}{2} \bar{\sigma} \bar{e} &= \frac{1}{2} \bar{\sigma} \sum_{n=0}^N V_n C_n^{-1} \sigma_n \\ &= \frac{V^*}{2} \bar{\sigma} C^{-1} \bar{\sigma} \\ &\quad + \sum_{n=1}^N \frac{V_n}{2} \bar{\sigma} (C'^{-1} - C^{-1}) \sigma_n, \quad (35) \end{aligned}$$

其中  $V_n$  为第  $n$  个非均匀体的体积. (35) 式右端第一项是不含非均匀体时的应变能, 第二项是引入非均匀体后产生的附加相互作用能量. 有效应力  $\bar{\sigma}$  与有效应变  $\bar{e}$  满足

$$\bar{\sigma} = C_E^* \bar{e}, \quad (36)$$

其中  $C_E^*$  为待求的有效弹性模量. 若只考虑非均匀体与背景基质间的相互作用而忽略非均匀体与非



均匀体间的相互作用, 则非均匀体内的总应力  $\sigma_n$  满足 (Eshelby<sup>[9]</sup>)

$$\sigma_n = C' U_n e^0. \quad (37)$$

(37) 式中的  $U_n$  考虑了第  $n$  个非均匀体与宏观系可能存在坐标旋转. 对于非均匀体稀疏的情况, 远处施加应变等于有效应变  $\bar{e}$ , 即

$$e^0 = \bar{e}. \quad (38)$$

若不同非均匀体的形状和大小相同, 指向也相同 (即  $U_n = U$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ), 由 (36) 式—(38) 式可将 (35) 式可改写为

$$\begin{aligned} \frac{V^*}{2} C_E^* \bar{e} \bar{e} &= \frac{V^*}{2} C_E^* \bar{e} C^{-1} C_E^* \bar{e} \\ &+ \sum_{n=1}^N \frac{V_n}{2} C_E^* \bar{e} (C'^{-1} - C^{-1}) C' U \bar{e}, \end{aligned} \quad (39)$$

化简后整理得

$$C_E^* = C + c(C' - C)U. \quad (40)$$

(40) 式中的  $c$  和  $C'$  分别为非均匀体的体积份数和弹性模量,  $U$  如 (7) 式所示. (40) 式也可记为

$$C_E^* = C + C^1, \quad (41)$$

其中  $C^1$  为

$$C^1 = c(C' - C)U. \quad (42)$$

当非均匀体局部系与宏观系一致时,  $U = T$ , (41) 便为 E-C 模型对有效模量的预报公式. 从能量的角度来说,  $C^1$  体现了非均匀体与背景基质的相互作用能.

若对 (40) 式或 (42) 式中的  $U$  取指向平均, 即  $U$  等于附录 A1 中的 (A5) 式, 即可将 E-C 模型推广为非均匀体随机指向的情况.

## 5.2 Hudson 模型

Hudson<sup>[17]</sup> 考虑了定向非均匀体对弹性波的单散射和二重散射, 给出了固体材料有效模量的预报公式. 该公式具有二阶精度, 且有效弹性模量呈现出 TI 的特点. Hudson 模型<sup>[17]</sup> 中有效模量公式为

$$C_H^* = C + C^1 + C^2, \quad (43)$$

其中  $C_H^*$  为 Hudson 模型中的有效模量,  $C$  为背景基质的弹性模量,  $C^1$  的表达式同 (42) 式. 从弹性波散射的角度来说,  $C^1$  体现了每个非均匀体对入射波单散射的叠加.  $C^2$  的表达式为

$$C^2 = \frac{1}{\mu} C^1 \chi C^1, \quad (44)$$

其中  $\mu$  为背景基质的剪切模量.  $C^2$  体现了非均匀体对弹性波的二重散射. (44) 式中四阶张量  $\chi$  的表达式为

$$\begin{aligned} \chi_{ijkl} &= \frac{1}{15} \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} \left( 4 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \right. \\ &\left. - (\delta_{jk} \delta_{il} + \delta_{ij} \delta_{kl}) \left( 1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \right], \end{aligned} \quad (45)$$

其中  $\alpha$  和  $\beta$  分别为背景基质的纵波速度和横波速度.

## 5.3 三种模型的比较

将 (19) 式展开保留到非均匀体体积份数的二阶项得本文模型有效弹性模量  $C^*$  的二阶近似表达式

$$\begin{aligned} C^* &\approx C + c(C' - C)U \\ &+ c^2(C' - C)US^*C^{-1}(C' - C)U. \end{aligned} \quad (46)$$

由  $C$  的表达 (4) 式、 $S^*$  的表达 (17) 式和 (45) 式可知 (46) 式右端二阶项中的  $S^*C^{-1}$  与  $\chi$  间满足关系为

$$S^*C^{-1} = \frac{1}{\mu} \chi. \quad (47)$$

再经过对比 (43) 式和 (46) 式知, 本文模型的一阶项  $c(C' - C)U$  和二阶项

$$c^2(C' - C)US^*C^{-1}(C' - C)U$$

分别等于 Hudson 模型中的单散射项  $C^1$  和二重散射项  $C^2$ . 因此, 本文模型对非均匀体体积份数的二阶截断就是 Hudson 模型. 具有二阶精度的 Hudson 模型说明本文模型至少具有二阶精度.

对比本文有效模量 (19) 式、Hudson 模型的 (43) 式和 E-C 模型的 (41) 式知: 本文模型和 Hudson 模型对非均匀体体积份数的一阶截断都是 E-C 模型. 因此, 从弹性波散射的角度来讲, 一阶项  $C^1$  表征了非均匀体对入射波的单散射; 从能量的角度来讲,  $C^1$  表征了非均匀体与背景基质间的相互作用能.

在孔隙干燥情况下, 图 7 比较了三种模型随孔隙密度  $\varepsilon$  变化的归一化有效弹性模量. 其中模量的计算参数同图 4, 纵横比  $\gamma = 0.01$ . 从图 7 中可以看出, 本文模型的有效弹性模量位于线性的 E-C 模型和抛物型的 Hudson 模型之间. 当裂隙含量低时, 三种模型预报的模量趋于一致; 但当孔隙含量超过一定阈值时, Hudson 模型预报的有效弹性模量不减反增, 这显然与实际不符合.

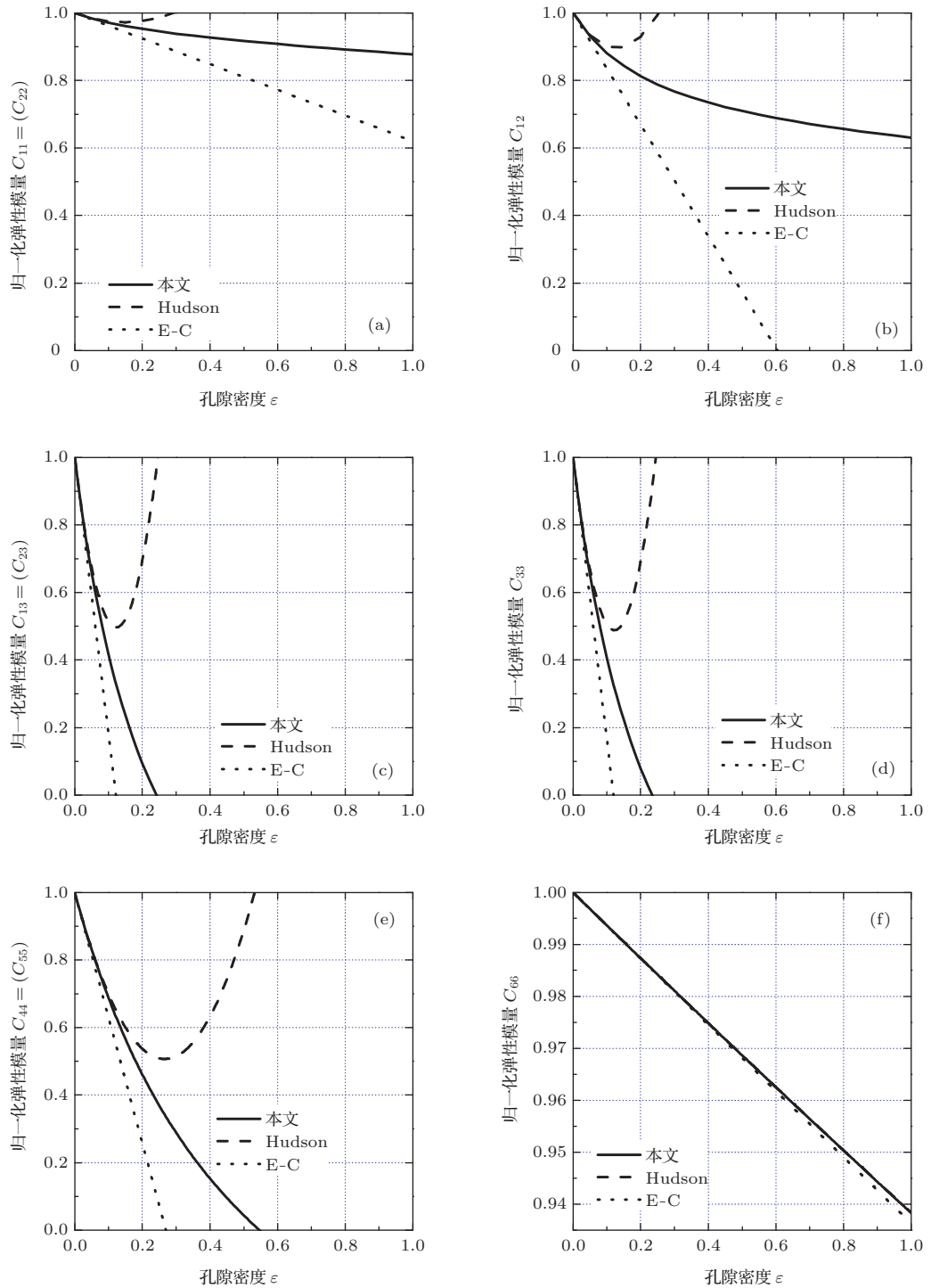


图7 随孔隙密度  $\varepsilon$  变化的归一化弹性模量 (a)  $C_{11}$  的计算结果; (b)  $C_{12}$  的计算结果; (c)  $C_{13}$  的计算结果; (d)  $C_{33}$  的计算结果; (e)  $C_{44}$  的计算结果; (f)  $C_{66}$  的计算结果

图8中分别比较了干燥(a)和液体饱和(b)情况下, 三种模型的准P波、准SV波和准SH波随 $\phi$ 角(波传播方向与对称轴的夹角)的变化规律. 选取的背景基质模量参数同图4; 孔隙参数 $\varepsilon = 0.1$ ,  $\gamma = 0.01$ , 固体密度 $\rho_s = 2.65 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 图8(b)中液体密度 $\rho_f = 1.0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ , 液体体积 $K_f = 2.2 \text{ GPa}$ . 由图8知无论干燥还是液体饱

和情况, 根据本文模型计算的波速位于Hudson模型和E-C模型之间. 相比于液体饱和的情况, 在干燥情况下三种模型的波速存在较大差异. 在干燥情况下, 准P波在 $\phi = 0$ 时的速度明显小于 $\phi = \pi/2$ 时的速度; 而在液体饱和情况下, 准P波没有在干燥情况下的差异明显, 这是因为干燥的裂隙显著降低了对称轴方向的纵波模量 $C_{33}$  (见图7(d)).

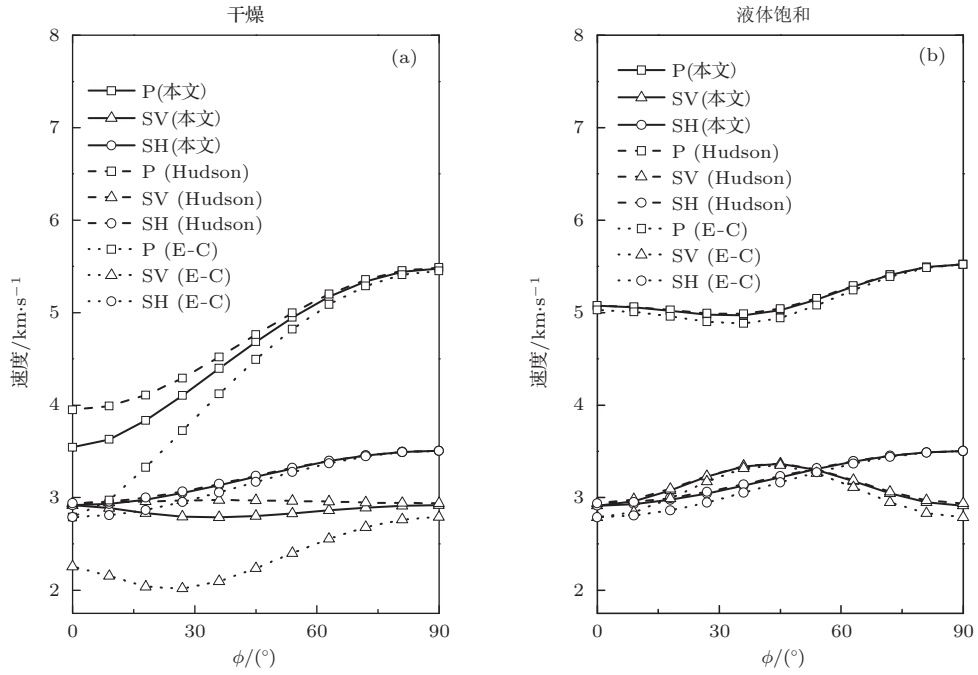


图8 准P波、准SV波和准SH波随 $\phi$ 角变化的波速 (a) 干燥情况; (b) 液体饱和情况

## 6 结 论

基于弹性波散射理论本文给出了指向定向非均匀体诱导的宏观TI弹性模量公式, 这一结果对解释一些岩石会呈现出TI特征具有一定理论意义. 本文有效模量公式至少具有二阶精度. 理论分析表明: 本文的有效模量公式对非均匀体体积份数的一阶近似就是线性的E-C模型, 二阶近似就是抛物线型的Hudson模型; 当非均匀体随机排列时, 本文模型退化为K-T模型. 结合多孔岩石的数值算例显示: 本文模型不会像Hudson模型那样出现当孔隙含量超过一定阈值时有效弹性模量反而增大的问题; 相比于E-C模型和Hudson模型, 本文模型能够较好地适用于非均匀体体积份数更大的情况.

在计算有效模量((22)式)时需要输入三点信息: 1) 背景基质的弹性模量(比如体积模量和剪切模量), 2) 非均匀体的体积份数及其弹性模量, 3) 非均匀体的指向及形状. 对于含扁状裂隙的岩石, 本文预测裂隙在干燥与液体饱和两种情况下岩石呈现出两种不同的TI弹性特征, 其原因在于液体的引入会显著增强对称轴方向上的纵波模量. 表达式(27)给出了非均匀体在某一平面内随机指向情况下的有效应变集中张量, 将(27)式代入(25)式可计算另一种TI有效弹性模量, 但本文并没有给出这

种情况的数值算例.

### 附录A1 非均匀体随机指向时的有效模量

当非均匀体随机指向时, 需要对 $\mathbf{T}$ 在所有可能的情况取平均, 此时不妨用平均应变集中张量 $\overline{\mathbf{T}}$ 代替(24)式中的 $\mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{L}$ . 各向同性的有效弹性模量 $\overline{\mathbf{C}}^*$ 满足

$$\overline{\mathbf{T}} = \frac{1}{c} (\mathbf{C}' - \mathbf{C})^{-1} (\overline{\mathbf{C}}^* - \mathbf{C}) \overline{\mathbf{T}}^*, \quad (\text{A1})$$

其中各向同性有效体的应变集中张量

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{T}}^* &= \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin\phi d\phi \int_0^{2\pi} \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}^*\mathbf{L} d\theta \\ &= [\mathbf{I} + \mathbf{S}^*\mathbf{C}^{-1}(\overline{\mathbf{C}}^* - \mathbf{C})]^{-1}. \end{aligned} \quad (\text{A2})$$

利用(17)式以及各向同性弹性模量的表达式(4)可将 $\overline{\mathbf{T}}^*$ 写成

$$\begin{aligned} \overline{T}_{ijkl}^* &= \frac{1}{3} (P^* - Q^*) \delta_{ij} \delta_{kl} \\ &\quad + \frac{1}{2} Q^* (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

其中

$$\begin{aligned} P^* &= \frac{1}{3} T_{iijj}^* = \frac{3K + 4\mu}{3K^* + 4\mu}, \\ Q^* &= \frac{1}{5} \left( T_{ijij}^* - \frac{1}{3} T_{iijj}^* \right) \\ &= \frac{5\mu(3K + 4\mu)}{6\mu^*(K + 2\mu) + \mu(9K + 8\mu)}. \end{aligned} \quad (\text{A4})$$

$K$ 和 $K^*$ 分别为背景基质和有效体的体积模量,  $\mu$ 和 $\mu^*$ 分别为背景基质和有效体的剪切模量. 张量 $\overline{\mathbf{T}}$ 表达式为

$$\overline{\mathbf{T}} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \sin\phi d\phi \int_0^{2\pi} \mathbf{L}^{-1}\mathbf{T}\mathbf{L} d\theta. \quad (\text{A5})$$

将表 1 给出的夹角余弦代入 (A5) 式解得  $\bar{T}$  的各个分量为

$$\bar{T}_{ijkl} = \frac{1}{3} (P - Q) \delta_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} Q (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad (A6)$$

其中

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{3} T_{iijj}, \\ Q &= \frac{1}{5} \left( T_{iijj} - \frac{1}{3} T_{iijj} \right). \end{aligned} \quad (A7)$$

(A6) 式和 (A7) 式与 Berryman<sup>[31]</sup> 给出的结果一致. 将弹性模量的表达式 (4) 及  $\bar{T}^*$  和  $\bar{T}$  的表达式 (A3) 式和 (A5) 式代入 (A1) 式得有效体积模量和剪切模量分别满足

$$\begin{aligned} (K^* - K) P^* &= c (K' - K) P, \\ (\mu^* - \mu) Q^* &= c (\mu' - \mu) Q. \end{aligned} \quad (A8)$$

(A8) 式正是非均匀体随机指向时有效弹性模量满足的关系式, 这一结果与 Kuster 和 Toksöz<sup>[15]</sup> 早前得到的结果一致. 但是 Kuster 和 Toksöz 在推导出 (A8) 的过程中, 首先假设膨胀波入射时得到了  $K^*$ , 然后假设横波入射时得到了  $\mu^*$ . 与他们推导不同, 本文直接通过张量推导得到  $K^*$  和  $\mu^*$ , 且推导过程与入射波是膨胀波还是横波无关.

### 参考文献

[1] Du S, Wang B 1998 *Micromechanics of composites* (Beijing: Science Press) p5–8 [杜善义, 王彪 1998 复合材料细观力学 (北京: 科学出版社) 第 5—8 页]  
 [2] Mavko G, Mukerji T, Dvorkin J 2009 *The rock physics handbook second edition* (Cambridge: Cambridge University Press) pp183–205  
 [3] Thomsen L 1986 *Geophysics* **51** 1954  
 [4] He X, Hu H 2009 *Geophysics* **74** E149  
 [5] Tang X 2011 *Sci. China Earth Sci.* **41** 784 (in Chinese)[唐晓明 2011 中国科学: **41** 784]  
 [6] Liu E, Chapman M, Zhang Z, Queen J H 2006 *Wave Motion* **44** 44  
 [7] Gurevich B, Makarynska D, Pervukhina M 2009 *Geophysics* **74** N25

[8] Song Y, Hu H 2013 *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **45** 395 (in Chinese)[宋永佳, 胡恒山 2013 力学学报 **45** 395]  
 [9] Eshelby J D 1957 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **241** 376  
 [10] Eshelby J D 1959 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **252** 561  
 [11] O'Connell R J, Budsonsky B 1974 *J. Geophys. Res.* **79** 5412  
 [12] Berryman J G, Berge P A 1996 *Mechanics of Materials* **22** 149  
 [13] Bruner W M 1976 *J. Geophys. Res.* **81** 2573  
 [14] Sun Z, Garboczi E J, Shah S P 2007 *Cement and Concrete Composites* **29** 22  
 [15] Kuster G T, Toksöz M N 1974 *Geophysics* **39** 587  
 [16] Cheng C H 1993 *J. Geophys. Res.* **98** 675  
 [17] Hudson J A 1994 *Geophys. J. Int.* **117** 555  
 [18] Chapman M 2003 *Geophysical Prospecting* **51** 369  
 [19] Jakobsen M, Hudson J A, Johansen T A 2003 *Geophys. J. Int.* **154** 533  
 [20] Kong L Y, Wang Y B, Yang H Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 139101 in Chinese 2013 **62** 139101 (in Chinese)[孔丽云, 王一博, 杨慧珠 2013 物理学报 **62** 139101]  
 [21] Shen Wei, Fan Qun-Bo, Wang Fu-Chi, Ma Zhuang 2013 *Chin. Phys. B* **22** 044601  
 [22] Ma K, Zhu J, Xie H, Wang H 2013 Effect of porous microstructure on the elastic modulus of plasma-sprayed thermal barrier coatings: experiment and numerical analysis *Surface & Coatings Technology* (in Press) doi: 10.1016/j.surfcoat (http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0257897213007950)  
 [23] Mal A K, Knopoff L 1967 *J. Inst. Math. Appl.* **3** 376  
 [24] Miles J W 1960 *Geophysics* **25** 642  
 [25] Wu T T 1966 *Int. J. Solids Structures* **2** 1  
 [26] Qu J, Cherkaoui M 2006 *Fundamentals of micromechanics of solids* (New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.) pp87  
 [27] Mura T 1987 *Micromechanics of defects in solids* (Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers) pp79  
 [28] David E C, Zimmerman R W 2011 *Int. J. Solids Structures* **48** 680  
 [29] Auld B A 1973 *Acoustic fields and waves in solids* (New York: John Wiley & Sons, Inc.) pp211–212  
 [30] Hill R 1963 *J. Mech. Phys. Solids* **11** 357  
 [31] Berryman J G 1979 *Appl. Phys. Lett.* **35** 856

# Variation of effective elastic moduli of a solid with transverse isotropy due to aligned inhomogeneities\*

Song Yong-Jia Hu Heng-Shan<sup>†</sup>

(Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

( Received 27 May 2013; revised manuscript received 2 October 2013 )

## Abstract

In this paper the effective or overall moduli of a solid containing aligned ellipsoidal inhomogeneities, are derived by making the scattered displacement field equal to that scattered by a spherical-shaped effective medium in the same matrix. It is shown that the obtained formulae of effective elastic moduli are of second-order accuracy at least. The effective moduli decrease monotonically with porosity, thus excluding the unphysical behavior in Hudson's model in which there is an increase of moduli with porosity when the porosity goes beyond a certain threshold. By integration of inhomogeneity orientation angle, the effective moduli can be obtained for a solid with randomly orientated inhomogeneities, which are the same as those in the Kuster-Toksöz model. Numerical calculations show that a rock with fluid-saturated inhomogeneities has a higher longitudinal wave modulus in the direction of TI symmetric axis than the modulus for a rock with empty inhomogeneities.

**Keywords:** effective elastic modulus, elastic wave scattering, transverse isotropy, porous medium

**PACS:** 62.20.de, 91.60.Ba, 81.05.Rm, 91.55.Ax

**DOI:** [10.7498/aps.63.016202](https://doi.org/10.7498/aps.63.016202)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41174110, 11372091).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [hhs@hit.edu.cn](mailto:hhs@hit.edu.cn)