

色散介质电磁特性时域有限差分分析的 Newmark方法*

王飞[†] 魏兵 李林茜

(西安电子科技大学物理与光电工程学院, 西安 710071)

(2013年12月17日收到; 2014年1月13日收到修改稿)

根据Debye模型、Drude模型和Lorentz模型3种常见色散介质模型频域极化率的特点, 利用频域到时域
的转换关系 $j\omega \rightarrow \partial/\partial t$, 将极化矢量 \mathbf{P} 与电场强度 \mathbf{E} 的频域关系转换成时域内关于 \mathbf{P} 的二阶微分方程, 其
对3种色散介质模型皆适用, 具有统一的形式. 然后采用相比于中心差分具有更高精度的Newmark两步算法
(Newmark- β - γ 法) 求解该方程, 进而得到 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{P}$ 的递推公式, 再结合本构关系得到 $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ 的时域递推式.
实现了色散介质电磁场量的时域有限差分迭代计算. 数值计算结果表明该方法是适用于3种色散介质模型的
通用算法, 并且相比于移位算子时域有限差分方法等以中心差分为基础的离散方案具有更高的计算精度.

关键词: Newmark方法, 色散介质, 电磁散射, 时域有限差分方法

PACS: 41.20.Jb

DOI: 10.7498/aps.63.104101

1 引言

1966年Yee^[1]提出了时域有限差分(FDTD)方法. 经过数十年的发展, FDTD方法已经被广泛应用于研究电磁问题^[2-6]. 该算法的特点是便于处理非均匀、时变和色散介质的电磁问题, 结合傅里叶变换一次计算即可获得系统的宽带信息. FDTD方法属于时域算法, 在处理色散介质的电磁问题时, 理论推证和实验测量获得的本构关系通常以频域的形式给出, 这给直接应用FDTD方法计算色散介质电磁响应带来了一定的困难. 常见色散介质模型包括Debye模型、Drude模型和Lorentz模型^[7]. 处理频域本构关系以适应于FDTD计算的方案包括递归卷积(RC)法^[8-11]、分段线性递归卷积(PLRC)法^[12]、电流密度卷积(JEC)法^[13]、分段线性电流密度递归卷积(PLJERC)法^[14,15]、辅助方程(ADE)法^[16,17]、Z变换法^[18-20]、移位算子(SO)法^[21,22]和半解析递推卷积(SARC)法^[23]等.

上述方法中, RC法、PLRC法、JEC法、PLJERC法和Z变换法等方法需要针对不同的色散介质模型推导递推计算式和编制相应的程序, 通用性差. SARC法、SO法和ADE法可以用同一递推式处理所有色散介质模型的电磁问题, 其中SO法稳定性较好, SARC法内存需求更小. 一般而言, 这3种方法对时间变量的离散均基于中心差分方案, 计算精度受限于中心差分. 本文将动力学时域微分方程数值积分经典时域步进算法——Newmark方法^[24-26]引入到色散介质时域本构关系的处理中, 给出了一种既适用于3种色散介质模型同时具有更高计算精度的新方法.

本文根据Debye模型、Drude模型和Lorentz模型3种常见色散介质模型频域极化率的特点, 利用频域到时域的转换关系 $j\omega \rightarrow \partial/\partial t$ 将极化矢量 \mathbf{P} 与电场强度 \mathbf{E} 的频域关系转换成时域内关于 \mathbf{P} 的二阶微分方程, 其对3种模型色散介质模型皆适用, 具有统一的形式. 然后采用已经广泛应用于

* 国家高技术研究发展计划(批准号: 2012AA01A308)、国家自然科学基金重点项目(批准号: 61231003)和中央高等学校基本科研基金资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: wfei79@163.com

时域有限元方法中求解二阶微分方程的Newmark两步算法(Newmark- β - γ 法)求解该方程,进而得到 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{P}$ 的递推公式,再结合本构关系得到 $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ 的时域递推式.实现了色散介质电磁场量的FDTD迭代计算.与SO-FDTD和SARC法相同,本文方法适用于3种常见色散介质模型的电磁计算,具有通用性.另外,由于采用Newmark步进算法求解时域本构关系的微分方程,相比于SO-FDTD法等算法,本文方法具有更高的计算精度.本文算例中Mie级数解、SO-FDTD算法和本文方法的计算结果的比较验证了本文算法的通用性和高精度.本文时谐因子取为 $\exp(j\omega t)$.

2 色散介质通用Newmark-FDTD方法

2.1 色散介质Maxwell旋度方程和频域本构关系

线性各向同性电色散介质Maxwell旋度方程和频域本构关系为^[27]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} &= \nabla \times \mathbf{H}, \\ \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathbf{E}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\omega) &= \varepsilon(\omega) \mathbf{E}(\omega) \\ &= \varepsilon_0 [\varepsilon_\infty + \chi(\omega)] \mathbf{E}(\omega), \end{aligned} \quad (2)$$

式中, \mathbf{D} 为电位移矢量, \mathbf{H} 为磁场强度, $\varepsilon(\omega)$ 为频域介电系数, $\chi(\omega)$ 为频域极化率, ε_∞ 为无穷大频率时的相对介电系数, ε_0 为真空介电常数, μ_0 为真空磁导率. 介质介电系数是综合了电子云畸变极化、分子极矩的位移极化和转向极化等微观过程的宏观物理量.

按标准Yee元胞^[1]对旋度方程(1)式差分离散便可实现 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{D}$ 的FDTD迭代计算,而要实现 $\mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ 的迭代计算则需要对频域本构关系(2)式进行特殊处理.

2.2 常见色散介质模型

常见的3种线性各向同性色散介质模型为Debye模型、Drude模型和Lorentz模型,它们的频域极化率可表示为如下多极点相加的形式^[27]:

$$\chi^{\text{Debye}}(\omega) = \sum_{l=1}^L \chi_l^{\text{Debye}}(\omega)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{l=1}^L \frac{\Delta \varepsilon_l}{1 + j\omega \tau_{0,l}}, \\ \chi^{\text{Drude}}(\omega) &= \sum_{l=1}^L \chi_l^{\text{Drude}}(\omega) \\ &= \sum_{l=1}^L \frac{-\omega_l^2}{\omega^2 - j\omega \nu_{c,l}}, \\ \chi^{\text{Lorentz}}(\omega) &= \sum_{l=1}^L \chi_l^{\text{Lorentz}}(\omega) \\ &= \sum_{l=1}^L \frac{\Delta \varepsilon_l \omega_{0,l}^2}{\omega_{0,l}^2 + 2j\omega \nu_{c,l} - \omega^2}, \end{aligned} \quad (3)$$

式中, L 为极点数; $\Delta \varepsilon_l = \varepsilon_{s,l} - \varepsilon_\infty$, 其中 $\varepsilon_{s,l}$ 为零频时的相对介电系数; $\tau_{0,l}$ 为极点弛豫时间; $\nu_{c,l}$ 为碰撞频率; ω_l 为Drude频率; $\omega_{0,l}$ 为振子固有频率. 极化率 $\chi(\omega)$ 的虚部代表介质的损耗, 其是由于极化过程中的摩擦阻尼所致, 在频域上表现为电位移矢量 \mathbf{D} 和电场矢量 \mathbf{E} 的相位滞后, 在时域上表现为响应的弛豫时间. Debye模型经常用于土壤、水、人体组织等介质的色散特性描述. 基于金属电子气模型并考虑电子碰撞建立的Drude模型常被用于描述等离子体、金属等介质的色散特性. Lorentz模型可用于生物组织、光学材料、人工介质(新型双负介质)等介质的色散特性描述. 实际介质的介电系数需要通过实验测试获得, 再用上述模型拟合. 如果所关心频率范围较宽, 可以采用上述模型联合描述.

令

$$\xi_l(\omega) = 1/\chi_l(\omega), \quad (4)$$

上述3种色散介质模型的 $\xi_l(\omega)$ 可统一表示为

$$\xi_l(\omega) = M_l \cdot (j\omega)^2 + C_l \cdot (j\omega) + K_l, \quad (5)$$

对于Debye模型,

$$M_l = 0, \quad C_l = \frac{\tau_{0,l}}{\Delta \varepsilon_l}, \quad K_l = \frac{1}{\Delta \varepsilon_l},$$

对于Drude模型,

$$M_l = \frac{1}{\omega_l^2}, \quad C_l = \frac{\nu_{c,l}}{\omega_l^2}, \quad K_l = 0,$$

对于Lorentz模型,

$$M_l = \frac{1}{\Delta \varepsilon_l \omega_{0,l}^2}, \quad C_l = \frac{2\nu_{c,l}}{\Delta \varepsilon_l \omega_{0,l}^2}, \quad K_l = \frac{1}{\Delta \varepsilon_l}.$$

2.3 时域本构关系及其Newmark解

引入极化矢量 \mathbf{P} , 在频域

$$\mathbf{P}(\omega) = \chi(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (6)$$

频域本构关系 (2) 式可改写为

$$D(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_\infty \mathbf{E}(\omega) + \varepsilon_0 \mathbf{P}(\omega). \quad (7)$$

令

$$\mathbf{P}_l(\omega) = \chi_l(\omega) \mathbf{E}(\omega), \quad (8)$$

则由 (3) 和 (6) 式可知

$$\mathbf{P}(\omega) = \sum_{l=1}^L \mathbf{P}_l(\omega). \quad (9)$$

由 (4) 和 (8) 式可得

$$\mathbf{E}(\omega) = \xi_l(\omega) \mathbf{P}_l(\omega), \quad (10)$$

将 (5) 式代入 (10) 式并利用频域到时域转换关系 $j\omega \rightarrow \partial/\partial t$ 有

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(t) = M_l \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{P}_l(t) + C_l \frac{d}{dt} \mathbf{P}_l(t) \\ + K_l \mathbf{P}_l(t). \end{aligned} \quad (11)$$

(11) 式为二阶时域微分方程, 其中 $\mathbf{E}(t)$ 相当于激励源. (11) 式类似于 ADE 方法中的辅助方程, 极化矢量 \mathbf{P} 的时间一阶导数即为 ADE 方法中引入的极化电流 \mathbf{J}_p . 1959 年, 根据 Taylor 级数的时间导数差分近似公式, Newmark^[24] 给出了形如 (11) 式的时域微分方程数值积分的步进算法, 改善了计算精度和稳定性. 为了推导过程中符号简明, 将 (11) 式改写为如下微分方程形式:

$$M_l \ddot{x} + C_l \dot{x} + K_l x = f \quad (12)$$

或

$$M_l a + C_l v + K_l x = f. \quad (13)$$

当有限元应用于力学问题时, (13) 式中 x 为位移; v 和 a 分别为速度和加速度,

$$v = \dot{x} = \frac{dx}{dt}, \quad a = \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2};$$

f 为已知激励源.

下面按照 Zienkiewicz^[25] 提出的方法推导, 根据速度函数的 Taylor 公式

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \ddot{x}_n \Delta t + \frac{(\Delta t)^2}{2} \dddot{x}_n + \dots, \quad (14)$$

式中下标 n 和 $n+1$ 代表 Δt 离散后的时间步. 若函数 $x(t)$ 足够平滑, 根据中值定理有

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + \ddot{x}_G \Delta t, \quad (15)$$

式中 \ddot{x}_G 为在 $a_n = \ddot{x}_n$ 与 $a_{n+1} = \ddot{x}_{n+1}$ 之间, 某时刻的加速度值, 如图 1(a) 所示. (15) 式表示当将

Taylor 公式 (14) 截止到第二项时, 应当把 (14) 式右端第二项用 \ddot{x}_n 和 \ddot{x}_{n+1} 之间某点的值 \ddot{x}_G 代替. 设 \ddot{x}_G 距离 \ddot{x}_n 为 γ ($0 \leq \gamma \leq 1$), 距离 \ddot{x}_{n+1} 为 $1 - \gamma$ (图 1(a)), 则线性插值结果为

$$\ddot{x}_G = \ddot{x}_n(1 - \gamma) + \gamma \ddot{x}_{n+1}, \quad (16)$$

将 (16) 式代入 (15) 式得到

$$\dot{x}_{n+1} = \dot{x}_n + (1 - \gamma) \ddot{x}_n \Delta t + \gamma \ddot{x}_{n+1} \Delta t, \quad (17)$$

即

$$v_{n+1} = v_n + (1 - \gamma) a_n \Delta t + \gamma a_{n+1} \Delta t. \quad (18)$$

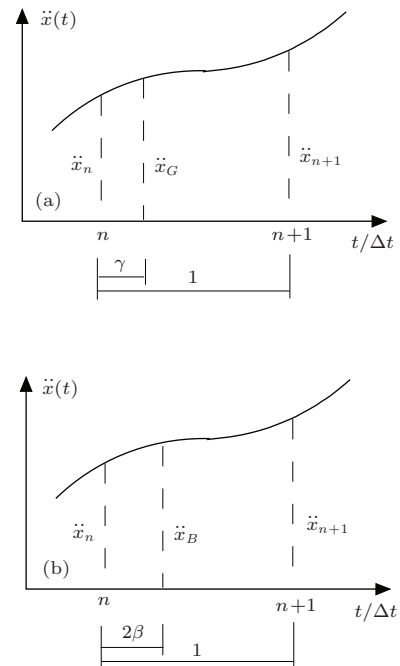


图 1 对于速度和位移的中值定理示意图 (a) 速度; (b) 位移

同样, 对于位移函数的 Taylor 公式为

$$\begin{aligned} x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t + \ddot{x}_n \frac{(\Delta t)^2}{2!} \\ + \ddot{x}_n \frac{(\Delta t)^3}{3!} + \dots, \end{aligned} \quad (19)$$

若函数 $x(t)$ 足够平滑, 根据中值定理有

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t + \ddot{x}_B \frac{(\Delta t)^2}{2!}, \quad (20)$$

式中 \ddot{x}_B 为加速度 \ddot{x}_n 与 \ddot{x}_{n+1} 之间某点的值, 如图 1(b) 所示. 由线性插值公式可得

$$\ddot{x}_B = \ddot{x}_n(1 - 2\beta) + 2\beta \ddot{x}_{n+1}, \quad (21)$$

式中 β 为常数, $0 \leq 2\beta \leq 1$. 将 (21) 式代入 (20) 式得到

$$x_{n+1} = x_n + \dot{x}_n \Delta t + \ddot{x}_n(1 - 2\beta) \frac{(\Delta t)^2}{2}$$

$$+ 2\beta\ddot{x}_{n+1}\frac{(\Delta t)^2}{2}, \quad (22)$$

即

$$x_{n+1} = x_n + v_n\Delta t + a_n(1-2\beta)\frac{(\Delta t)^2}{2} + 2\beta a_{n+1}\frac{(\Delta t)^2}{2}. \quad (23)$$

将方程 (13) 分别用于 $n+1$, n 和 $n-1$ 时间步可得

$$M_l a_{n+1} + C_l v_{n+1} + K_l x_{n+1} = f_{n+1}, \quad (24)$$

$$M_l a_n + C_l v_n + K_l x_n = f_n, \quad (25)$$

$$M_l a_{n-1} + C_l v_{n-1} + K_l x_{n-1} = f_{n-1}, \quad (26)$$

再将 (18), (23) 式中 $n+1$ 改为 n 得到

$$v_n = v_{n-1} + (1-\gamma)a_{n-1}\Delta t + \gamma a_n\Delta t, \quad (27)$$

$$x_n = x_{n-1} + v_{n-1}\Delta t + a_{n-1}(1-2\beta)\frac{(\Delta t)^2}{2} + 2\beta a_n\frac{(\Delta t)^2}{2}. \quad (28)$$

利用 (18), (23)–(28) 式 7 个方程消去 6 个变量 a_{n+1} , a_n , a_{n-1} , v_{n+1} , v_n , v_{n-1} 可得

$$\begin{aligned} & [M_l + \gamma\Delta t C_l + \beta(\Delta t)^2 K_l] x_{n+1} \\ & = - \left[-2M_l + (1-2\gamma)\Delta t C_l \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) (\Delta t)^2 K_l \Big] x_n \\ & - \left[M_l + (\gamma - 1)\Delta t C_l \right. \\ & + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) (\Delta t)^2 K_l \Big] x_{n-1} \\ & + (\Delta t)^2 \left[\beta f_{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) f_n \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) f_{n-1} \right]. \quad (29) \end{aligned}$$

(29) 式称为 Newmark 方法的两步算法或 Newmark- β - γ 方法, 即步进计算 x_{n+1} 需要用到前两个时间步的值 x_n , x_{n-1} . (12) 式系数中包含两个参变量 β 和 γ , 为了保证计算精度和稳定性需要适当选择 γ 以及 $\beta \geq 0.25(0.5 + \gamma)^2$, 通常取 $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.5$ 可以保证无条件收敛 [25].

对 (11) 式中 \mathbf{E} , \mathbf{P}_l 的各个分量在时域离散, 则按照上述推导可得到在离散时域内由 \mathbf{E} 计算 \mathbf{P}_l 的 Newmark 步进计算式,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_l^{n+1} &= w_{1,l} \mathbf{P}_l^n + w_{2,l} \mathbf{P}_l^{n-1} + u_{0,l} \mathbf{E}^{n+1} \\ &+ u_{1,l} \mathbf{E}^n + u_{2,l} \mathbf{E}^{n-1}, \quad (30) \end{aligned}$$

式中,

$$\begin{aligned} w_{1,l} &= \frac{2M_l - (1-2\gamma)\Delta t C_l - \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right) (\Delta t)^2 K_l}{S_l}, \\ w_{2,l} &= \frac{-M_l - (\gamma-1)\Delta t C_l - \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right) (\Delta t)^2 K_l}{S_l}, \\ u_{0,l} &= \frac{(\Delta t)^2 \beta}{S_l}, \\ u_{1,l} &= \frac{(\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} + \gamma - 2\beta \right)}{S_l}, \\ u_{2,l} &= \frac{(\Delta t)^2 \left(\frac{1}{2} - \gamma + \beta \right)}{S_l}, \\ S_l &= M_l + \gamma\Delta t C_l + \beta(\Delta t)^2 K_l. \quad (31) \end{aligned}$$

将频域本构关系 (7) 式转换到离散时域得到

$$\begin{aligned} & \mathbf{D}^{n+1}(t) \\ & = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_\infty \mathbf{E}^{n+1}(t) + \sum_{l=1}^L \mathbf{P}_l^{n+1}(t) \right). \quad (32) \end{aligned}$$

将 (30) 式代入 (32) 式并整理可得

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon_\infty + \sum_{l=1}^L u_{0,l} \right) \mathbf{E}^{n+1} \\ & = \frac{\mathbf{D}^{n+1}}{\varepsilon_0} - \sum_{l=1}^L (w_{1,l} \mathbf{P}_l^n) - \sum_{l=1}^L (w_{2,l} \mathbf{P}_l^{n-1}) \end{aligned}$$

$$-\sum_{l=1}^L u_{1,l} \mathbf{E}^n - \sum_{l=1}^L u_{2,l} \mathbf{E}^{n-1}. \quad (33)$$

由(33)式就可实现 \mathbf{D}^{n+1} , $\mathbf{P}_l^n \rightarrow \mathbf{E}^{n+1}$ 的时域步进计算.

综上所述, 各向同性色散介质通用 Newmark-FDTD 计算步骤可归纳为

步骤 1 由 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{D}$, 用旋度方程(1)式的差分离散式计算;

步骤 2 由 $\mathbf{D}, \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{E}$, 用(33)式计算;

步骤 3 由 $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{P}$, 用(30)式计算;

步骤 4 回到步骤 1.

3 算例验证及数值结果

以下算例分别为 3 种色散介质模型球体的后向散射, 计算时取 $\beta = 0.25$, $\gamma = 0.5$, FDTD 计算时间步长 $\Delta t = \delta/2c$, δ 为 Yee 元胞边长. 入射波为平面高斯脉冲,

$$E_i(t) = \exp\left[-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right], \quad (34)$$

式中 $\tau = 60\Delta t$.

例 1 Debye 介质球的后向散射

设球半径为 0.25 m, 介质为单极点 Debye 模型, 复数相对介电系数 $\epsilon_r(\omega)$ 为

$$\begin{aligned} \epsilon_r(\omega) &= \epsilon_\infty + \chi(\omega) \\ &= \epsilon_\infty + \frac{\epsilon_{s,1} - \epsilon_\infty}{1 + j\omega\tau_{0,1}}, \end{aligned} \quad (35)$$

式中, $\epsilon_{s,1} = 1.16$, $\epsilon_\infty = 1.01$, $\tau_{0,1} = 6.497 \times 10^{-10}$ s. 图 2 给出了该球的后向雷达横截面(RCS). 这里实线、圆圈和虚线分别为本文方法、Mie 级数解和 SO-FDTD 算法的计算结果. 由图 2 可知, 本文方法的计算结果优于 SO-FDTD 算法的计算结果. FDTD 计算中 $\delta = 3.3 \times 10^{-3}$ m.

例 2 等离子体球的后向散射

设等离子体球半径为 3.75 mm, 等离子体的散射特性可用单极点 Drude 模型描述, 其复数相对介电系数为

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_\infty + \chi(\omega) = 1 + \frac{-\omega_1^2}{\omega^2 - j\omega\nu_{c,1}}, \quad (36)$$

式中, $\omega_1 = 1.8 \times 10^{11}$ rad/s, $\nu_{c,1} = 2.0 \times 10^{10}$ Hz. 图 3 给出了该等离子体球的后向 RCS. 这里实线、圆圈和虚线分别为本文方法、Mie 级数解和 SO-FDTD 算法的计算结果. 由图 3 可知, 本文结果与

Mie 级数解符合得更好, 尤其是在低频段, 计算精度优于 SO-FDTD 方法的计算精度. FDTD 计算中 $\delta = 5.0 \times 10^{-2}$ mm.

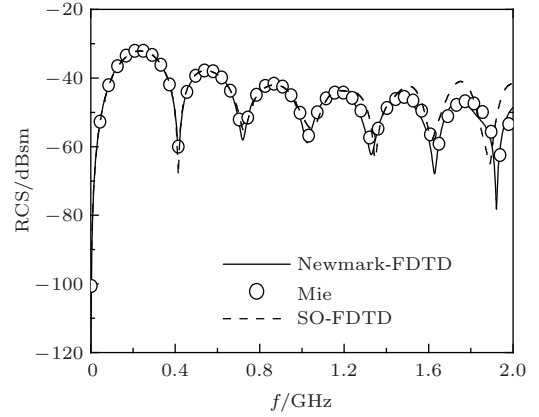


图 2 Debye 介质球的后向 RCS

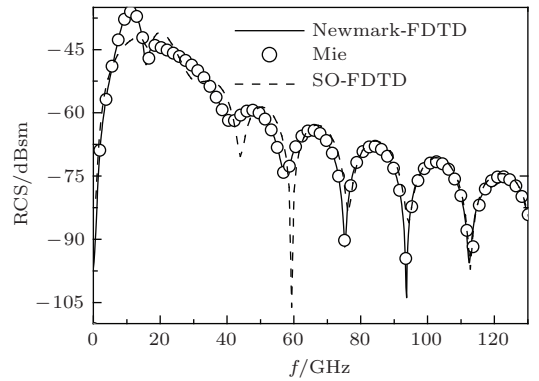


图 3 等离子体球的后向 RCS

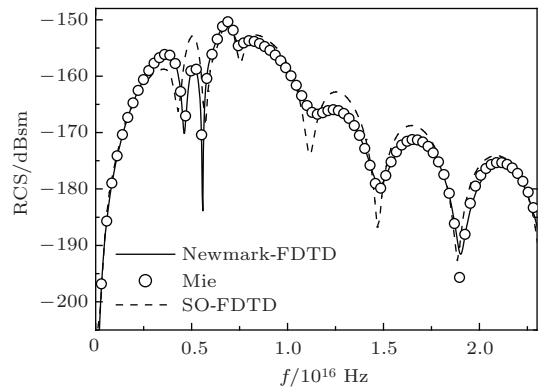


图 4 Lorentz 球的后向 RCS

例 3 Lorentz 球的后向散射

设 Lorentz 球半径为 15.0×10^{-9} m, 介质为单极点 Lorentz 模型, 其复数相对介电系数为

$$\begin{aligned} \epsilon_r(\omega) &= \epsilon_\infty + \chi(\omega) \\ &= \epsilon_\infty + \frac{(\epsilon_{s,1} - \epsilon_\infty)\omega_{0,1}^2}{\omega_{0,1}^2 + 2j\omega\nu_{c,1} - \omega^2}, \end{aligned} \quad (37)$$

式中, $\varepsilon_{s,1} = 2.25$, $\varepsilon_{\infty} = 1.0$, $\nu_{c,1} = 0.28 \times 10^{16}$ Hz, $\omega_{0,1} = 4.0 \times 10^{16}$ Hz. 图 4 给出了该 Lorentz 球的后向 RCS. 这里实线、圆圈和虚线分别为本文方法、Mie 级数解和 SO-FDTD 算法的计算结果. 由图 4 可知, 本文结果与 Mie 级数解符合得更好, 计算精度优于 SO-FDTD 方法的计算精度. FDTD 计算中 $\delta = 3.0 \times 10^{-10}$ m.

表 1 列出了分别采用 Newmark 和 SO 方法计

算上述 3 个算例时的内存消耗和中央处理器 (CPU) 时间. 计算时 3 个算例程序运行均为 6000 个时间步, 计算机 CPU 主频为 2.8 GHz, 算例 1 和算例 2 的计算域为 $180 \times 180 \times 180$ 个元胞, 算例 3 的计算域为 $130 \times 130 \times 130$ 个元胞. 从表 1 可以看出, SO 方法计算效率略高于 Newmark 方法计算效率, 但从以上算例的计算结果可知 Newmark 方法具有更高的计算精度.

表 1 采用 Newmark 和 SO 方法模拟 3 种模型色散介质球散射的内存消耗和 CPU 计算时间

| 色散介质模型 | 内存消耗/M | | CPU 时间/s | |
|------------|------------|-------|------------|-------|
| | Newmark 方法 | SO 方法 | Newmark 方法 | SO 方法 |
| Debye 模型 | 716 | 583 | 41715 | 36220 |
| Drude 模型 | 709 | 650 | 39899 | 36103 |
| Lorentz 模型 | 265 | 252 | 16558 | 14887 |

4 结 论

本文给出了一种处理不同模型色散介质电磁问题的通用 Newmark-FDTD 方法. 而且这一方法对 3 种常见模型色散介质具有通用性. 数值结果表明本文方法相比于 SO-FDTD 算法具有更高的计算精度.

参考文献

[1] Yee K S 1966 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **AP-14** 302
 [2] Li J, Guo L X, Zeng H, Han X B 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2757
 [3] Li X F, Pan S, Guo Y N, Wang Q 2011 *Chin. Phys. B* **20** 015204
 [4] Bavi M A, Sun X D 2013 *Chin. Phys. B* **22** 047808
 [5] Lu W F, Li C, Huang S H, Lin G Y, Wang C, Yan G M, Huang W, Lai H K, Chen S Y 2013 *Chin. Phys. B* **22** 107703
 [6] Li Q B, Wu R X, Yang Y, Sun H L 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 074208
 [7] Taflov A, Hagness S C 2005 *Computational Electrodynamics the Finite-Difference Time-Domain Method* (3rd Ed.) (Boston London: Artech House) p374
 [8] Luebbers R J, Hunsberger F, Kunz K S 1990 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **32** 222
 [9] Luebbers R J, Hunsberger F, Kunz K S 1991 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **39** 29
 [10] Luebbers R J, Hunsberger F 1992 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **40** 1297
 [11] Pontalti R, Cristoforetti L, Antolini R, Cescatti L 1996 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **42** 526

[12] Kelley D F, Luebbers R J 1996 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **44** 792
 [13] Chen Q, Katsurai M, Aoyagi P H 1998 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **46** 1739
 [14] Liu S B, Mo J J, Yuan N C 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 778 (in Chinese) [刘少斌, 莫锦军, 袁乃昌 2004 物理学报 **53** 778]
 [15] Xu L J, Yuan N C 2005 *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.* **15** 277
 [16] Nickisch L J, Franke P M 1992 *IEEE Antennas Propag. Mag.* **34** 33
 [17] Takayama Y, Klaus W 2002 *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.* **12** 102
 [18] Sullivan D M 1992 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **40** 1223
 [19] Sullivan D M 1995 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **43** 676
 [20] Sullivan D M 1996 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **44** 28
 [21] Ge D B, Wu Y L, Zhu X Q 2003 *Chin. J. Radio Sci.* **18** 359 (in Chinese) [葛德彪, 吴跃丽, 朱湘琴 2003 电波科学学报 **18** 359]
 [22] Wei B, Ge D B, Wang F 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 6290 (in Chinese) [魏兵, 葛德彪, 王飞 2008 物理学报 **57** 6290]
 [23] Zhang Y Q, Ge D B 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4573 (in Chinese) [张玉强, 葛德彪 2009 物理学报 **58** 4573]
 [24] NewMark N M 1959 *J. Eng. Mech. Div.* **85** 67
 [25] Zienkiewich O C 1977 *Earthquake Eng. Struct. Dyn.* **5** 413
 [26] Wood W L 1984 *Int. J. Numer. Meth. Eng.* **20** 1009
 [27] Ge D B, Yan Y B 2011 *Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves* (3rd Ed.) (Xi'an : Xidian University Press) p262 (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2011 电磁波时域有限差分法 (第三版) (西安: 西安电子科技大学出版社) 第 262 页]

Newmark method for finite-difference time-domain modeling of wave propagation in frequency-dispersive medium*

Wang Fei[†] Wei Bing Li Lin-Qian

(School of Physics and Optoelectronic Engineering, Xidian University, Xi'an 710071, China)

(Received 17 December 2013; revised manuscript received 13 January 2014)

Abstract

The complex polarizations of three kinds of general dispersive medium models, i.e. Debye model, Lorentz model, Drude model, are described by rational polynomial fraction in $j\omega$. The relationship between the polarization vector \mathbf{P} and the intensity of electric field \mathbf{E} in time domain is obtained by utilizing the transformation relationship from frequency domain to time domain $j\omega \rightarrow \partial/\partial t$. Then, the time domain second order equation is solved by using the Newmark β and γ method, which has higher accuracy than the traditional center difference method. Once the recursive formulations for \mathbf{E} and \mathbf{P} are obtained, the recursive formulations for \mathbf{D} and \mathbf{E} in time domain can be also obtained based on the constitutive relation. Therefore for a dispersive medium the iterative electromagnetic field calculation is conducted by finite-difference time-domain (FDTD) method. The present numerical results demonstrate that the proposed method is a general algorithm for three kinds of general dispersive medium models, and has higher accuracy than the shift operator-FDTD, which is based on the central difference discrete scheme.

Keywords: Newmark method, dispersive media, electromagnetic scattering, finite-difference time-domain method

PACS: 41.20.Jb

DOI: [10.7498/aps.63.104101](https://doi.org/10.7498/aps.63.104101)

* Project supported by the National High Technology Research and Development Program of China (Grant No. 2012AA01A308), the Key Program of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61231003), and the Fundamental Scientific Research Foundation for the Central Universities of China.

[†] Corresponding author. E-mail: wfei79@163.com