

功率谱反演大气湍流随机相位屏采样方法的研究*

蔡冬梅^{1)†} 王昆¹⁾ 贾鹏¹⁾ 王东¹⁾ 刘建霞²⁾

1)(太原理工大学物理与光电工程学院, 太原 030024)

2)(太原理工大学信息工程学院, 太原 030024)

(2013年12月30日收到; 2014年1月15日收到修改稿)

从产生大气湍流随机相位屏的功率谱反演法原理出发, 分析了均匀采样造成的随机相位屏大量低频信息泄漏的不足, 提出利用非均匀采样方法对功率谱进行滤波产生随机相位屏. 建立了非均匀采样模型, 并分析比较了两种采样方法覆盖的采样频率范围和单边采样频率区域的湍流功率, 理论证明了非均匀采样功率谱反演产生大气湍流随机相位屏的可行性和有效性. 针对大气湍流的Kolmogorov谱, 分别仿真计算了两种采样模型下功率谱反演生成的大气湍流随机相位屏. 仿真结果表明, 在不增加采样点和计算量条件下, 非均匀采样方法生成的大气湍流随机相位屏具有丰富的低频和低频信息, 有效改善了传统功率谱反演大气湍流随机相位屏时低频信息严重不足的缺陷.

关键词: 大气湍流, 随机相位屏, 功率谱反演, 采样

PACS: 42.68.Wt, 42.25.Hz, 42.30.-d

DOI: 10.7498/aps.63.104217

1 引言

光波在大气中传播时, 大气湍流造成的折射率起伏引起光波的振幅和相位随机变化, 进而导致光强闪烁、波面畸变、到达角起伏和光束漂移等现象^[1,2], 严重影响了地基望远镜对天体目标和空间目标的成像和观测^[3-5]. 自适应光学技术是解决这一问题的有效途径之一^[5-7]. 利用数值方法模拟大气湍流对光波传输的影响是设计和优化自适应光学系统的一个有效手段.

数值模拟方法研究大气湍流的核心问题之一是模拟大气湍流随机相位屏. 目前有多种模拟大气湍流随机相位屏的方法, 其中McGlamery^[8]提出的“功率谱反演法”得到了广泛的应用和发展. 谱反演法根据大气湍流功率谱密度函数得到大气湍流的相位分布, 它利用离散傅里叶变换, 具有计算速度快、适用于不同形式的湍流谱型的优点. 然而, 功率谱反演法产生的大气湍流随机相位屏的低频

信息严重不足, 而且由于傅里叶变换方法本身具有周期性, 产生的大气湍流随机场也具有空间周期性, 而实际的大气波前扰动是随机起伏且不具有空间周期性的.

从大气湍流Kolmogorov谱的功率谱密度函数随频率分布的特征出发, 本文讨论傅里叶变换采用的均匀采样对生成的湍流相位屏的影响. 提出非均匀采样方法, 即根据功率谱密度函数的特点, 采样间隔随频率的降低而减小, 并建立了非均匀采样模型. 对两种采样模型进行了理论分析和比较. 数值仿真了两种模型下的大气湍流随机相位屏, 计算了相位屏的相位结构函数, 并与理论值进行比较, 从而验证了非均匀采样功率谱反演生成大气湍流随机相位屏的可行性和有效性.

2 功率谱反演法的均匀采样

功率谱反演法产生大气湍流随机相位屏的基本思想如下: 首先生成一个频域内零均值、单位方

* 山西省自然科学基金(批准号: 2013011006-4)、中国科学院自适应光学重点实验室基金(批准号: LAOF201301)和微细加工光学技术国家重点实验室基金(批准号: KFS4)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: dm_cai@163.com

差的 Hermitian 复高斯随机数矩阵 $\mathbf{h}(f_x, f_y)$, 然后用符合大气湍流 Kolmogorov 谱的功率谱密度函数 $\Phi_\varphi(f_x, f_y)$ 对其进行滤波, 再进行逆傅里叶变换得到大气湍流随机相位屏 $\varphi(x, y)$, 即 [8,9]

$$\varphi(x, y) = \sum_{f_x} \sum_{f_y} \mathbf{h}(f_x, f_y) \sqrt{\Phi_\varphi(f_x, f_y)} \times \exp[j(f_x x + f_y y)] \Delta f_x \Delta f_y, \quad (1)$$

其中, f_x 和 f_y 分别为在 x 方向和 y 方向上的空间频率. 功率谱密度函数 $\Phi_\varphi(f_x, f_y)$ 为 [10]

$$\Phi_\varphi(f_x, f_y) = 0.023 r_0^{-5/3} f^{-11/3}, \quad (2)$$

其中, r_0 为大气相干长度, 它是反映大气湍流强度的重要参数; f 为空间频率. 图 1(a) 为 $r_0 = 0.1$ m 时, Kolmogorov 谱的功率谱密度, 图 1(b) 为相应的功率谱密度的截面曲线. 从图 1 可以看出, 湍流功率沿空间频率的分布是非线性的, 随着频率向中心(低频区域)移动, 谱功率急剧增高, 湍流能量主要集中在低频区域.

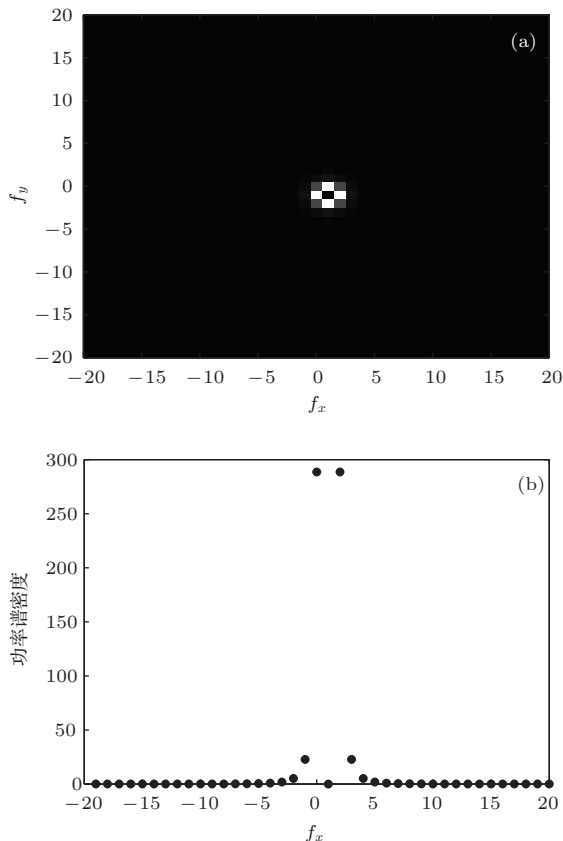


图1 $r_0 = 0.1$ m 时, Kolmogorov 谱的功率谱密度分布 (a) 二维分布; (b) 一维分布

对尺寸 L 确定的相位屏均匀采样, 采样点数为 N , 则相位屏的最小空间频率 f_{\min} 、最大空间频率

f_{\max} 分别为

$$f_{\min} = \Delta f = \frac{1}{L},$$

$$f_{\max} = \frac{N\Delta f}{2} = \frac{1}{2\Delta x}, \quad (3)$$

其中, Δf 为空间频率间隔, Δx 为坐标空间的取样间隔, $L = N\Delta x$. 对 (1) 式均匀采样, 得到相位随机过程的离散分布, 即

$$\varphi(m, n) = \sum_{n=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} \sum_{m=-\frac{N}{2}+1}^{\frac{N}{2}} c_{m,n} \exp[j2\pi L(mf_{x_m} + nf_{y_n})/N], \quad (4)$$

均匀采样频率序列为

$$f_n = n\Delta f$$

$$\left(n = -\frac{N}{2} + 1, -\frac{N}{2} + 2, \dots, \frac{N}{2} \right). \quad (5)$$

此时, 复振幅 $c_{m,n}$ 的相关函数为

$$E[|c_{m,n}|^2] = \Phi_\varphi(f_{x_m}, f_{y_n}) \Delta f_{x_m} \Delta f_{y_n}$$

$$= \Phi_\varphi(f_{x_m}, f_{y_n}) / L^2, \quad (6)$$

其中 Δf_{x_m} 和 Δf_{y_n} 分别为 x 方向和 y 方向上的空间频率间隔. $\varphi(m, n)$ 是一个实随机过程, 因此复振幅 $c_{m,n}$ 还需满足

$$c_{m,n} = c_{-m,-n}^*. \quad (7)$$

均匀采样模型的谱反演方法可以利用快速傅里叶变换算法, 不仅计算速度快, 还适合对随机相位屏尺寸接近或超过湍流外尺度时的情况进行仿真计算. 当相位屏尺寸相对于湍流外尺度非常小时, 均匀采样模型下功率谱反演得到的相位屏不包含 $(-\Delta f_x/2, \Delta f_x/2)$ 和 $(-\Delta f_y/2, \Delta f_y/2)$ 这部分低频率分量对应的功率谱, 从而导致相位的大尺度起伏模拟结果存在误差.

功率谱反演法要精确模拟符合大气湍流统计特征的随机相位屏, 需要对相位屏进行低频补偿 [10]. 一种方法是产生一个大相位屏, 抽取中心的一小部分, 这一小部分包含了低频成分特征. 另外一种 Lane 等 [6] 提出的次谐波补偿方法. 在傅里叶低频次谐波重采样基础上, 对功率谱反演得到的大气湍流随机相位屏插值拟合, 以补偿相位屏的低频统计特性. 利用次谐波补偿方法使产生的大气湍流随机相位屏低频分量的损失得到了明显改善. 随着次谐波阶数的增加, 低频信息不足改善的程度也随之提高, 但这种改善的程度是有限的. 与此同时,

随着叠加谐波级次的增加, 采样点急剧增大, 从而导致计算量非常庞大^[11].

因此, 在不增加采样点, 计算量不变的条件下, 通过功率谱反演法精确模拟符合大气湍流统计特征的随机相位屏具有重要意义.

3 功率谱反演法的非均匀采样

从图 1(b) 中可以看出, 随着频率向零频率靠近, Kolmogorov 谱的功率谱密度曲线斜率变化非常快. 根据功率谱密度变化的快慢, 可有选择地提高或降低某些频段采样点的间隔, 而不需要增加采样点数. 在功率谱密度变化快的低频区, 减小采样点间隔, 对于功率谱密度变化慢的其他频率区域, 随着功率谱密度变化的减慢, 逐渐增大采样点间距, 从而实现整个频率范围内的非均匀采样.

定义非均匀采样的频率区间为 $(-f_{\max}, f_{\max})$,

$$f_{\max} = f \frac{N}{2} = \frac{N}{2L}, \quad (8)$$

其中, f_{\max} 为采样的最大空间频率, 对应的角频率区间为 $(-\pi, \pi)$. 如果 $f_{\max} > \frac{N}{2L}$, 角频率宽度将大于 2π , 从而导致频域上的重复采样. 最大空间频率 f_{\max} 的确定避免了频域上的重复采样.

Kolmogorov 谱的功率谱密度在零频率处趋于无穷大, 功率谱密度变化非常快, 需要减小采样基频, 但同时不希望引入过多的直流成分. 通过仿真实验确定 Kolmogorov 谱的非均匀采样基频为均匀采样最小空间频率的 10^{-3} , 即

$$f_{\min} = \frac{1}{L} \times 10^{-3}, \quad (9)$$

非均匀离散采样频率序列为

$$f_n = a f_{n-1} \quad (n > 1),$$

$$a = \left(\frac{f_{\max}}{f_{\min}} \right)^{\frac{N}{2}-1}. \quad (10)$$

采样频率间隔 Δf_n 随空间频率变化,

$$\Delta f_0 = f_1,$$

$$\Delta f_1 = \frac{f_2}{2},$$

$$\Delta f_{\frac{N}{2}} = f_{\frac{N}{2}} - f_{\frac{N}{2}-1},$$

$$\Delta f_n = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) f_n, \quad (11)$$

其中 $\frac{N}{2} > n > 2$. 此时, (6) 式改写为

$$E[|c_{m,n}|^2] = \Phi_{\varphi}(f_{x_m}, f_{y_n}) \Delta f_{x_m} \Delta f_{y_n}. \quad (12)$$

4 算法讨论及仿真验证

两种采样方法的采样总数 N 相同, 比较两种方法的采样点序列与角频率之间的分布关系, 结果如图 2 所示, 其中, 采样点总数 $N = 64$, 对应的角频率区间为 $(-\pi, \pi]$. 均匀采样模式下, 横坐标采样点序列与纵坐标角频率之间满足线性变化, 64 个采样点均匀分布在整個角频率区间, 采样间隔保持不变. 非均匀采样模式下, 采样点序列与角频率之间是一个非线性变化关系, 随着角频率从 $-\pi(\pi)$ 向 0 rad 方向移动, 采样间隔从高频区的 0.89 rad 减小为低频区的 $3.9 \times 10^{-5} \text{ rad}$ (图 3), 在靠近零频的低频区采样点密集. 图 4 比较了两种采样模式对应的频率区间, 采样点总数 $N = 128$, $r_0 = 0.1 \text{ m}$. 从图 4 可以看出, 非均匀采样的频率范围包含整个大三角区域对应的频率范围, 大致覆盖了低频 10^{-3} Hz 到高频 10^2 Hz 区间; 而均匀采样的频率区间仅为图中阴影区域对应的 $10^0 - 10^2 \text{ Hz}$ 的频率范围, 低频区域采样严重不足, 这是均匀采样功率谱反演生成的相位屏大量低频信息泄漏的主要原因.

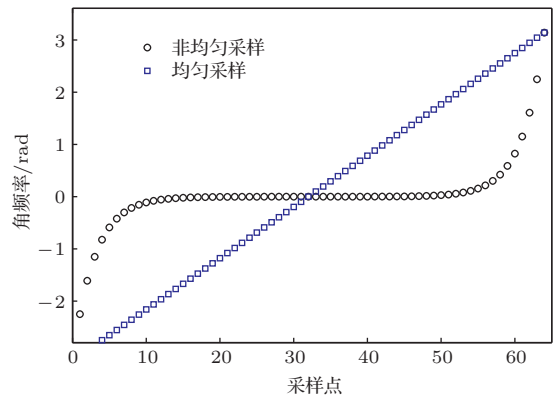


图 2 采样点序列与角频率的关系

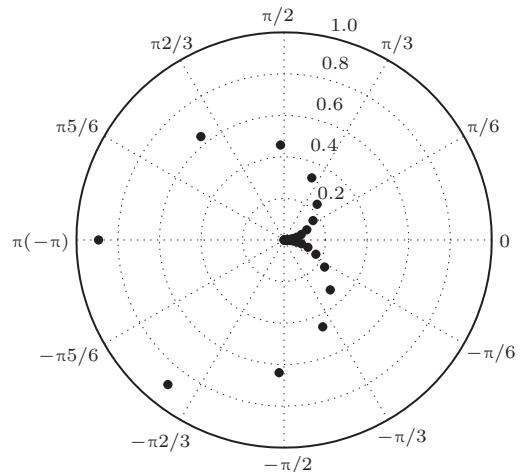


图 3 非均匀采样模型下, 采样间隔与角频率的关系

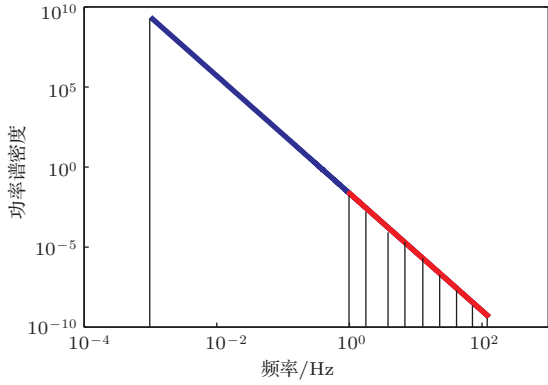


图4 两种采样模式对应的采样频率区间

分别计算了两种采样模式下单边采样区域的湍流功率. 均匀采样模式下,

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{uniform}}^2 &= 0.023r_0^{-5/3} \int_{1/L}^{N/2L} f^{-11/3} df \\ &= 0.023r_0^{-5/3}, \end{aligned}$$

非均匀采样模式下,

$$\Phi_{\text{non-uniform}}^2 = 0.023r_0^{-5/3} \int_{1/1000L}^{N/2L} f^{-11/3} df$$

$$= 0.023r_0^{-5/3} \times 10^8.$$

非均匀采样模式下覆盖的湍流功率是均匀采样模式下覆盖的湍流功率的 10^8 倍, 这极大地弥补了由于均匀采样引起的低频泄漏丢失的功率. 因此, 非均匀采样功率谱反演生成的随机相位屏能充分反映大气湍流 Kolmogorov 谱的功率谱的频率分布特征, 尤其是分布在低频区域的大部分湍流功率.

利用均匀采样和非均匀采样方法, 从大气湍流 Kolmogorov 谱的功率谱密度函数出发, 生成大气湍流随机相位屏, 结果如图5所示, 仿真条件为 $L = 1 \text{ m}$, $r_0 = 0.1 \text{ m}$, $N = 128 \times 128$. 图5(a)和(b)分别为均匀采样功率谱反演生成的大气湍流随机相位屏的二维和三维分布, 图中相位屏的细节成分丰富, 但低频(主要是倾斜)成分极不明显, 这正是功率谱反演法采用均匀采样时固有的局限性, 造成低频信息大量丢失. 图5(c)和(d)为非均匀采样功率谱反演生成的随机相位屏的二维和三维分布, 相位屏除了有丰富的相位起伏(高频成分)外, 相位屏还有明显的倾斜, 低频成分非常突出.

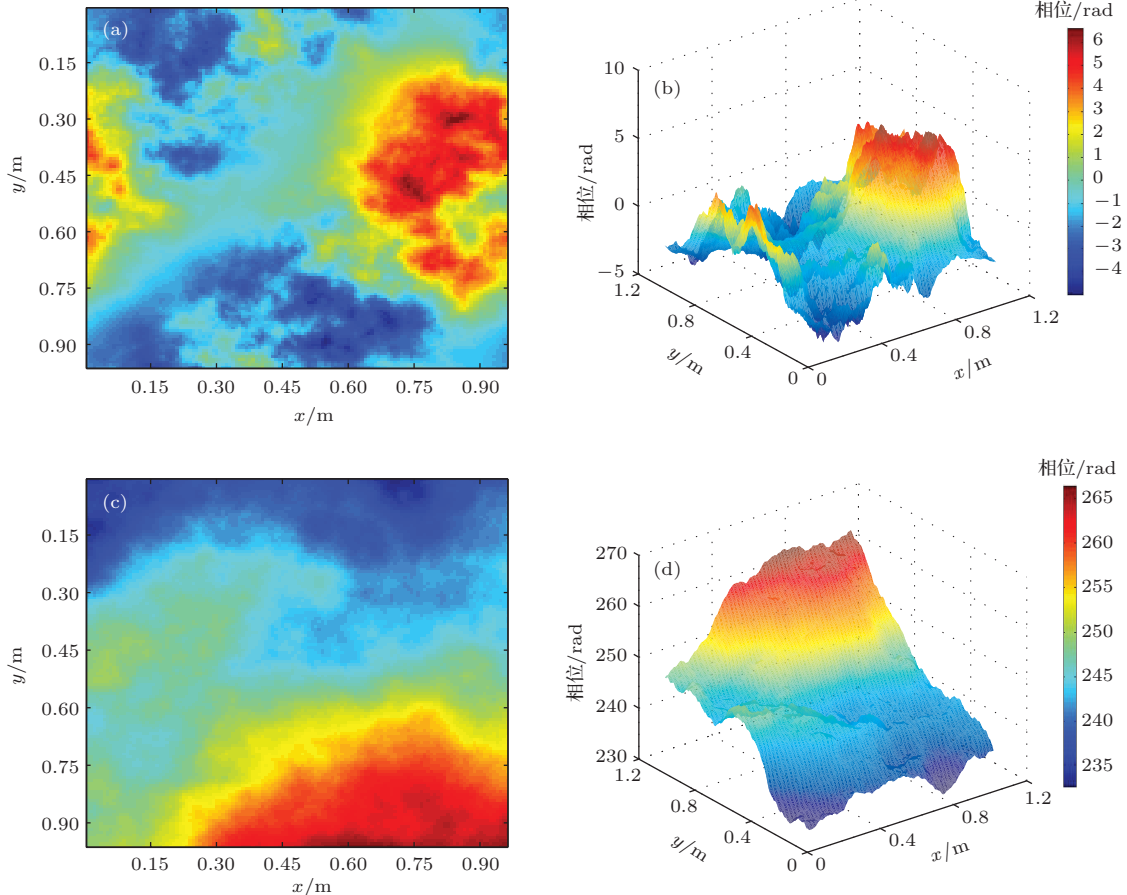


图5 (网刊彩色) 不同采样模式下, 功率谱反演生成的大气湍流随机相位屏的二维和三维分布 (a) 均匀采样, 二维分布; (b) 均匀采样, 三维分布; (c) 非均匀采样, 二维分布; (d) 非均匀采样, 三维分布

下面定量分析两种采样模式下功率谱反演生成的相位屏的性能. 分别对两种方法生成的相位屏的相位结构函数做大样本统计分析, 得到1000幅大气湍流随机相位屏的相位结构函数的统计平均值, 并与大气湍流相位结构函数的理论值进行对比, 结果如图6所示. 大气湍流Kolmogorov谱的相位结构函数 $D_\varphi(r)$ 的表达式如下:

$$D_\varphi(r) = 6.88 \left(\frac{r}{r_0} \right)^{5/3}, \quad (13)$$

其中 r 为相位屏任意两点间距离. 从图6可以看出: 相对于相位结构函数的理论曲线, 均匀采样功率谱反演得到的大气湍流随机相位屏的相位结构函数统计曲线的高空间频率部分与理论值符合得很好, 而其低空间频率部分明显小于理论值; 非均匀采样功率谱反演生成的大气湍流随机相位屏的相位结构函数统计曲线的高频部分和低频部分与理论值都符合得很好, 且在低频区和高频区都优于均匀采样, 这说明低频量和高频量都是充足的.

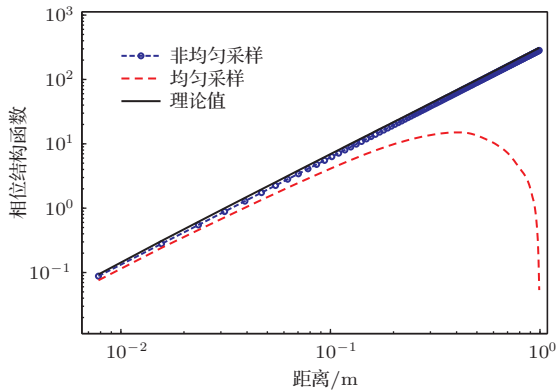


图6 大气湍流随机相位屏结构函数曲线

非均匀采样方法根据功率谱密度随频率变化的特征调整采样间隔, 实现了对整个功率谱密度函数的充分采样, 使得频谱泄漏尽可能降低, 生成的大气湍流随机相位屏在低频区和高频区都有较高的拟合精度.

5 结 论

从功率谱反演大气湍流随机相位屏原理出发, 本文讨论了传统的均匀采样方式生成的大气湍流随机相位屏低频信息大量泄漏的缺陷. 在此基础

上, 提出一种新的采样方法——非均匀采样. 根据大气湍流功率谱密度的分布特征, 随着频率向低频区移动, 非均匀采样间隔减小, 在低频区密采, 高频区疏采. 建立了非均匀采样模型, 比较了两种采样方法对应的频率区域和单边采样区域的湍流功率, 理论上证明了非均匀采样方法的有效性, 非均匀采样方法能够对功率谱对应的大频域范围有效采样. 利用两种采样方法, 通过功率谱反演生成大气湍流随机相位屏并进行对比, 非均匀采样功率谱反演生成的相位屏除了有丰富的高频信息, 同时还有充足的低频量(倾斜), 在高空间频率区、低空间频率区与理论曲线都符合得很好, 极大地改善了传统均匀采样方法造成的低频分量不足. 在不增加计算量的条件下, 非均匀采样功率谱反演法解决了均匀采样功率谱反演法大量低频信息泄漏的缺陷. 当然, 采用非均匀间隔对功率谱函数进行滤波不能直接使用快速傅里叶变换, 计算速度较慢, 但可以利用非均匀快速傅里叶变换加快运算速度^[12], 下一步还需要对本文算法做进一步的完善.

感谢中国科学院光电技术研究所的姜文汉院士、李新阳研究员对本文的指导和帮助.

参考文献

- [1] Zhang E T, J L, Lü B D 2009 *Chin. Phys. B* **18** 571
- [2] Jin X L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 692 (in Chinese) [季小玲 2010 物理学报 **59** 692]
- [3] Liu Y Y, Lü Q B, Zhang W X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 124201 (in Chinese) [刘杨阳, 吕群波, 张文喜 2012 物理学报 **61** 124201]
- [4] Zhao P T, Zhang Y C, Wang L, Zhao Y F, Su J, Fang X, Cao K F, Du X Y 2007 *Chin. Phys.* **16** 2486
- [5] Du J, Ren D M, Zhao W J, Qu Y C, Chen Z L, Geng L J 2013 *Chin. Phys. B* **22** 024211
- [6] Lane R G, Glindemann A, Dainty J C 1992 *Waves in Random Media* **2** 209
- [7] Wang J X, Bai F Z, Ning Y, Huang L H, Jiang W H 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 029501 (in Chinese) [王建新, 白福忠, 宁禹, 黄林海, 姜文汉 2011 物理学报 **60** 029501]
- [8] McGlamery B L 1996 *J. Opt. Soc. Am. A* **57** 293
- [9] He W U, Wu J 2008 *Proc. SPIE* **6832** 68321
- [10] Roddier N 1990 *Opt. Eng.* **29** 1174
- [11] Zhang H M, Li X Y 2006 *Opto-Electron. Eng.* **33** 14 (in Chinese) [张慧敏, 李新阳 2006 光电工程 **33** 14]
- [12] Bagchi S 1996 *Trans. Circuits Syst.* **43** 434

Sampling methods of power spectral density method simulating atmospheric turbulence phase screen*

Cai Dong-Mei^{1)†} Wang Kun¹⁾ Jia Peng¹⁾ Wang Dong¹⁾ Liu Jian-Xia²⁾

1) (*Institute of Physics and Optoelectronics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China*)

2) (*Institute of Information Engineering, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China*)

(Received 30 December 2013; revised manuscript received 15 January 2014)

Abstract

Based on power spectral density method, the uniform sampling leading to the leakage of low frequency in atmosphere phase screens is analyzed. A new method – non-uniform sampling is proposed. The non-uniform sampling is modeled. The covered sampling frequency regions and the powers of single sampling region by the two sampling methods are discussed and compared. The new method proves to be effective and feasible. For the Kolmogorov spectrum of atmospheric turbulence, the numerical simulation phase screens are generated by the two sampling methods. The simulation results show that the random phase screens generated by the non-uniform sampling method under the condition of increasing neither sampling number nor computation burden, possesses rich high and low frequency information.

Keywords: atmospheric turbulence, random phase screen, power spectrum inversion, sampling

PACS: 42.68.Wt, 42.25.Hz, 42.30.-d

DOI: [10.7498/aps.63.104217](https://doi.org/10.7498/aps.63.104217)

* Project supported by the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 2013011006-4), the Foundation of Key Laboratory of Adaptive Optics, Chinese Academy of Sciences, China (Grant No. LAOF201301), and the Foundation of State Key Laboratory of Optical Technologies for Micro-fabrication, China (Grant No. KFS4).

† Corresponding author. E-mail: dm_cai@163.com