

利用源强密度声辐射模态重建声场*

聂永发† 朱海潮

(海军工程大学振动与噪声研究所, 船舶振动噪声重点实验室, 武汉 430033)

(2013年12月18日收到; 2014年1月15日收到修改稿)

为了利用声场中少量测点声压数据精确重建复杂结构的辐射声场, 提出了源强密度声辐射模态分析理论和声场重建公式. 在结构表面定义的空间上, 利用以源强密度分布函数为参量的结构辐射声功率泛函表达式定义了一个线性自伴正辐射算子, 该算子的特征函数为结构的源强密度声辐射模态. 然后通过对矩形平板和带有半球帽的圆柱体的源强密度声辐射模态的分析, 证明了源强密度声辐射模态具有空间滤波特性, 并利用该性质建立了声场重建公式. 球体仿真和平板实验验证了所提出的声场重建方法的可行性和稳健性. 基于源强密度声辐射模态的声场重建方法简单, 利用较少测点数据就可以获得较高的声场重建精度, 特别适合于复杂结构的低频声场重建.

关键词: 源强密度, 声辐射模态, 声场分布模态, 声场重建

PACS: 43.40.Rj, 43.20.Rz, 43.50.Cb

DOI: 10.7498/aps.63.104303

1 引言

近年来, 基于阵列测量的声场重建技术获得了很大发展, 这些技术主要包括声强分布法、近场声全息方法、波束形成方法和逆频率响应函数法等. 声强分布法^[1]具有较好的精度, 但由于其使用一个或几个声强探头逐点测量, 只能对稳态声源和非移动声源进行分析. 利用基于快速傅里叶变换的近场声全息方法^[2]重建声场具有很高的精度, 可获得不受波长限制的高分辨率, 而且计算速度快, 但该方法要求阵列必须是规则网格阵列且阵列面积要远大于被测源面. 基于波叠加法^[3](等效源)的近场声全息可以获得较高的精度, 但需要处理虚拟面与源面的位置关系, 且要求测量点数必须大于等于虚拟源数目; 虽然基于 Helmholtz 方程最小二乘 (HELMS) 方法^[4,5]的近场声全息法可以利用少量的测点重建声场, 但该方法对长扁结构的辐射声场重建收敛性差. 波束形成方法^[6,7]可用于实际工程中远距离和中高频信号的测量处理, 适用于稳态声源、瞬态声源和运动声源, 但其分辨精度受波长限

制, 尤其是低频信号的分辨率更低. 逆频率响应函数法^[8]是通过建立噪声源与声场测点之间的频响函数关系模型进行噪声源识别, 其最大缺点是需要分析对象的先验信息, 同时要求测量点数大于源的离散单元数目. 结构声辐射模态方法^[9-14]可以实现结构声辐射功率解耦, 是一种解决结构声辐射问题的有效方法.

根据表达辐射声功率的参量不同, 声辐射模态可分为振速声辐射模态^[9]、声压声辐射模态^[10]和力辐射模态^[11]等, 不管哪一种参数的声辐射模态, 能够实现结构声辐射功率解耦是其本质特征, 也是其解决结构声辐射问题的最大优势所在. 目前, 声辐射模态分析方法主要应用在主动控制^[11]、源重建^[12]、声学设计优化^[13]等方面. 对于复杂结构而言, 传统声辐射模态分析方法^[9-11]重建声场不是很方便, 且复杂结构的声辐射模态求解也非常困难. 文献^[15]提出了一种基于泛函算子谱理论的声辐射模态分析理论, 但得到的振速声辐射模态不能使结构辐射声功率解耦, 因此该文献提出的理论与传统的声辐射模态理论有本质区别.

为了克服传统的声辐射模态理论重建复杂结

* 国家自然科学基金(批准号: 51305452)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: yongfnie@163.com

构辐射声场的困难, 本文以结构表面源强密度函数为参数, 构造了结构辐射声功率的表达式, 并利用特征值分解方法获得一种可方便应用到复杂结构声辐射分析的源强密度声辐射模态分析方法. 与传统的声辐射模态相比, 复杂结构的源强密度声辐射模态计算更为方便. 基于源强密度声辐射模态的声场重建方法结合了波叠加法和 HELS 方法的优点, 利用较少的测点可以重建任意形状结构的辐射声场, 而且该方法对测量阵列要求不高, 可以实现近场和远场声场重建, 测量过程简单经济.

文章第一部分回顾了基于阵列测量的声场重建方法, 对各种方法的优缺点进行了分析; 第二部分对源强密度声辐射模态理论进行了详细的推导; 第三部分通过对平板和带有半球帽的圆柱体的分析, 证明了源强密度声辐射模态具有空间滤波特性; 第四部分利用声辐射模态的滤波特性建立了基于源强密度声辐射模态的声场重建公式; 第五部分利用球体仿真实验和平板实验验证所提出的声场重建方法的可行性和稳健性; 第六部分给出本文的结论.

2 源强密度声辐射模态理论

图 1 显示了一个以角频率 ω 振动的复杂结构, 其表面 S_0 将空间分为结构内部体积空间 V_i 和外部无界空间 V_o . 结构置于密度为 ρ_0 的均质流体中, 流体中声速为 c_0 , n 为表面 S_0 的外法线方向, 结构外部任意封闭曲面 S 将结构完全包围且与结构表面没有交点, $p(\mathbf{r}')$ 为曲面 S 上的声压. 结构内部 V_i 中无其他声源, 结构表面振动产生的是时谐声场, 为了表示方便, 省略时谐项 $e^{-j\omega t}$. 结构产生的声场声压在空间 V_o 满足 Helmholtz 方程, 在边界表面 S_0 上满足 Neumann 边界条件, 在无穷远处满足 Sommerfeld 辐射条件.

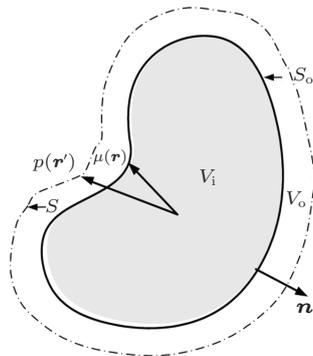


图 1 复杂结构示意图

由内、外 Helmholtz 积分方程可推导出声场声压的简单源公式^[16]:

$$p(\mathbf{r}') = -j\rho_0 c_0 k \iint_{S_0} \mu(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') dS_0, \quad (1)$$

其中, k 为波数, $k = \omega/c_0$; $j = \sqrt{-1}$; \mathbf{r}' 为声场中任意点的位置向量; \mathbf{r} 为结构表面 S_0 上点的位置向量; $\mu(\mathbf{r})$ 为结构表面源强密度函数; $G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')$ 为自由空间格林函数,

$$G(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \frac{e^{jk|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}}{4\pi|\mathbf{r}'-\mathbf{r}|}. \quad (2)$$

由欧拉公式可得到声场中质点法向振速为

$$v_n(\mathbf{r}') = - \iint_{S_0} \mu(\mathbf{r}) \frac{\partial G(\mathbf{r}|\mathbf{r}')}{\partial n(\mathbf{r}')} dS_0 \quad (\mathbf{r}' \in V_o, \mathbf{r}' \notin S_0). \quad (3)$$

包围结构的任意封闭曲面 S 上的时间平均法向声强的有功分量为

$$I_n(\mathbf{r}') = \frac{1}{4} [p(\mathbf{r}') v_n^*(\mathbf{r}') + p^*(\mathbf{r}') v_n(\mathbf{r}')], \quad (4)$$

其中“*”表示共轭. 结构辐射的总时间平均辐射声功率为

$$W = \oint_S I_n(\mathbf{r}') dS(\mathbf{r}'). \quad (5)$$

联立 (1)–(5) 式并整理有

$$W = \frac{1}{4} j\rho_0 c_0 k \iint_{S_0} \iint_{S_0} \mu(\mathbf{r}_1) \mu^*(\mathbf{r}_2) E dS_0(\mathbf{r}_1) \times dS_0(\mathbf{r}_2), \quad (6)$$

其中,

$$E = \iint_S \left[G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}') \frac{\partial G^*(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}')}{\partial n} - G^*(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}') \frac{\partial G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}')}{\partial n} \right] dS(\mathbf{r}'). \quad (7)$$

这里 $G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}')$ 和 $G^*(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}')$ 具有有界并连续的一阶导数和二阶导数, 并分别满足非齐次的 Helmholtz 方程:

$$(\nabla^2 + k^2)G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_1), \quad (8)$$

$$(\nabla^2 + k^2)G^*(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}') = -\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_2), \quad (9)$$

其中, δ 为狄拉克 Delta 函数. 由格林第二等式, (7) 式可变换为

$$E = \iiint_{V_i} [G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}') \nabla^2 G^*(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}') - G^*(\mathbf{r}_2|\mathbf{r}') \nabla^2 G(\mathbf{r}_1|\mathbf{r}')] dV_i(\mathbf{r}'). \quad (10)$$

联立 (8)–(10) 式并利用 δ 函数的筛选性质有

$$E = (-j/(2\pi)) [\sin(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|], \quad (11)$$

将(11)式代入(6)式得到

$$W = \iint_{S_0} \iint_{S_0} \mu(\mathbf{r}_1) R(\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2) \mu^*(\mathbf{r}_2) dS_0(\mathbf{r}_1) \times dS_0(\mathbf{r}_2), \quad (12)$$

其中 R 为辐射阻,

$$R(\mathbf{r}_1/\mathbf{r}_2) = R_0 [\sin(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)/(k|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|)]. \quad (13)$$

这里常数 $R_0 = k^2 \rho_0 c_0 / (8\pi)$, R 是实对称的. 显然当 $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$ 时(13)式退化为 R_0 . Song 等^[17]利用结构内部的体积源强密度也获得了类似于(12)式的二重体积积分形式的声功率表达式.

在 S_0 上定义内积, 所有定义在结构表面 S_0 上的复连续有界函数构成 Hilbert 空间 H , 结构辐射声功率表达式(12)构成一个作用在空间 H 上的泛函. 在空间 H 上定义辐射算子 \mathbf{R}_w , 对任意复连续的有界表面源强密度分布,

$$\mathbf{R}_w \mu(\mathbf{r}) = \iint_{S_0} R(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \mu(\mathbf{s}) dS_0(\mathbf{s}), \quad (14)$$

因为空间 H 上的泛函(12)式表示的辐射声功率大于零, 可以证明辐射算子 \mathbf{R}_w 为线性自伴正算子, 根据泛函谱理论,

$$\mathbf{R}_w \phi_i(\mathbf{r}) = \lambda'_i \phi_i(\mathbf{r}) \quad (\mathbf{r} \in S_0), \quad (15)$$

其中, $\lambda'_i (i = 1, 2, \dots, \infty)$ 为算子的正实数特征值且以降序排列; $\phi_i(\mathbf{r}) (i = 1, 2, \dots, \infty)$ 为特征值对应的实特征函数, 特征函数以下列方式正交:

$$\frac{1}{S} \iint_{S_0} \phi_i(\mathbf{r}) \phi_j(\mathbf{r}) dS_0(\mathbf{r}) = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \quad (16)$$

所有的特征函数 $\phi_i(\mathbf{r})$ 构成了 Hilbert 空间的一组基函数, 该组基函数是由表征结构辐射性质的泛函(12)式导出, 所以将这组基函数称为结构的源强密度声辐射模态函数, 它表示结构表面源强密度的一种可能的分布形式. 结构表面任意边界条件下的源强密度分布都可以由结构的源强密度声辐射模态进行展开.

对(12)式进行离散, 这里离散单元的面积取为相等并用 s 表示, 离散后的声功率近似表达式为

$$\hat{W} = \boldsymbol{\mu}^H \mathbf{R} \boldsymbol{\mu}, \quad (17)$$

其中 \mathbf{R} 定义为辐射阻矩阵, 简称辐射矩阵, 其表达式为

$$\mathbf{R} = \frac{k^2 s^2 \rho_0 c_0}{8\pi} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\sin(kr_{12})}{kr_{12}} & \dots & \frac{\sin(kr_{1N})}{kr_{1N}} \\ \frac{\sin(kr_{21})}{kr_{21}} & 1 & \dots & \frac{\sin(kr_{2N})}{kr_{2N}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\sin(kr_{N1})}{kr_{N1}} & \frac{\sin(kr_{N2})}{kr_{N2}} & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

这里 r 为离散单元中心点之间的距离. \mathbf{R} 为实对称矩阵, 结构辐射声功率大于零, 因此矩阵 \mathbf{R} 必为正定矩阵. 对矩阵 \mathbf{R} 进行特征值分解,

$$\mathbf{R} = \boldsymbol{\Phi}^H \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\Phi}, \quad (19)$$

其中, $\boldsymbol{\Lambda}$ 为对角矩阵, 其对角线元素 $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为 \mathbf{R} 的特征值且以降序排列; $\boldsymbol{\Phi}$ 为 $N \times N$ 维矩阵, $\boldsymbol{\Phi}$ 的列向量 $\boldsymbol{\varphi}_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为 \mathbf{R} 的特征值对应的特征向量; \mathbf{R} 为正定实对称矩阵, 因此 λ_i 为正实数. $\boldsymbol{\Phi}$ 的列向量为以下列方式相互正交的单位实向量,

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T \boldsymbol{\varphi}_j = \begin{cases} 1 & (i = j), \\ 0 & (i \neq j). \end{cases} \quad (20)$$

它们构成了 N 维空间的一组正交基, 所以振动表面源强密度 $\boldsymbol{\mu}$ 可由这组正交基惟一表示,

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_{i=1}^N \beta_i \boldsymbol{\varphi}_i = \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\beta}, \quad (21)$$

(21) 式以一种类似于模态向量的形式表示结构振动表面源强密度 $\boldsymbol{\mu}$, $\boldsymbol{\varphi}_i$ 为结构振动表面源强密度 $\boldsymbol{\mu}$ 的一种可能分布形式, $\boldsymbol{\varphi}_i$ 就是结构的源强密度声辐射模态向量, β_i 为源强密度声辐射模态展开系数. 将(19)和(21)式代入(17)式, 解耦后的辐射声功率表达式为

$$\hat{W} = \sum_{i=1}^N \lambda_i |\beta_i|^2. \quad (22)$$

(22) 式表明各阶源强密度声辐射模态的辐射声功率是独立的.

将源强密度声辐射模态 φ_i 在声场中 M 个点处产生的声压定义为声场分布模态,

$$\psi_i = Q\varphi_i. \quad (23)$$

这里 ψ_i 为第 i 阶声场分布模态, ψ_i 是 M 维列向量, N 阶声场分布模态列向量组成了 M 个点声场分布模态矩阵 Ψ ; Q 为声场中 M 个点与声源表面上 N 个点之间的传递矩阵, 其矩阵元素为 $q_{ij} = -j\rho_0 c_0 k s G(\mathbf{r}_i | \mathbf{r}'_j)$.

假设已知声场 M 个点处的声压为 $P(\mathbf{r}')$, $\Psi(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ 为声场中 M 个点的声场分布模态矩阵, \mathbf{r}' 为声场中已知声压点处的位置坐标, \mathbf{r} 为结构表面离散单元中心的位置坐标. 对 (1) 式进行离散并联立 (24) 式, 声场中声压可以用声场分布模态表示为

$$P(\mathbf{r}') = \Psi(\mathbf{r}', \mathbf{r})\beta, \quad (24)$$

利用欧拉公式, 声场中质点振速 $U_n(\mathbf{r}')$ 可由源强密度声辐射模态表示为

$$U_n(\mathbf{r}') = D(\mathbf{r}', \mathbf{r})\beta \quad (\mathbf{r}' \in V_o, \mathbf{r}' \notin S_o), \quad (25)$$

其中, 矩阵 $D = Q'\Phi$, 矩阵 Q' 中的元素 $q'_{ij} = \frac{\partial G(\mathbf{r}_i | \mathbf{r}'_j)}{\partial n(\mathbf{r}'_j)}$. 由 (24) 和 (25) 式可知, 只要获得了声辐射模态展开系数 β 就可以重建声场中任意点的声压和质点振速.

3 矩形平板和复杂结构的源强密度声辐射模态及滤波特性

3.1 矩形平板的源强密度声辐射模态及滤波特性

假设带有无限障板的矩形平板边长为 0.5 m, 受到频率为 380 Hz 的力激励, 此时平板以 (1, 2) 阶模态振动. 带有无限障板的矩形平板的源强密度为速度分布的 2 倍, 因此源强密度声辐射模态与振速声辐射模态具有相同的模态振型, 平板的速度分布声辐射模态振型参见文献 [9].

为了考察平板的源强密度声辐射模态的空间滤波特性, 需要将各阶模态转换到波数域空间. 图 2 显示了在频率为 380 Hz 的力激励下平板前十阶模态的波数域分布. 由图 2 可知, 平板辐射声波的传播波成分主要集中在前六阶声辐射模态, 即只有前六阶的声辐射模态对远场声场有贡献; 从第

七阶开始, 各阶声辐射模态包含的主要是倏逝波成分, 这些模态主要对近场的声场有作用. 因此在低频时平板声辐射模态显示出明显的空间滤波特性. 声辐射模态可以分为传播波模态和倏逝波模态, 传播波模态中包含有倏逝波的成分, 但倏逝波模态基本不包含有传播波成分. 在利用声辐射模态重建声场时, 如果测量数据为远场声压, 只需计算含有传播波成分的前几阶声辐射模态的展开系数即可; 如果测量数据为近场声压, 还需计算只含有倏逝波成分的声辐射模态的展开系数. 随着模态阶数的升高, 传播波成分能量占比迅速减少, 即模态阶数越高辐射效率越低. 总体而言, 低频时各阶模态中传播波成分能量占比相对而言都是比较低的, 这也解释了低频时平板辐射效率低的原因.

3.2 复杂封闭结构的源强密度声辐射模态及滤波特性

计算无量纲频率 $ka = 0.5$ 时带有半球帽的圆柱体的前九阶源强密度声辐射模态, 结果如图 3 所示. 第一阶模态的源强密度为均匀分布, 第二至第四阶模态的源强密度分布类似于球体结构表面速度的一阶球谐分布. 第五到第九阶模态的源强密度分布类似于球体结构表面速度的二阶球谐分布.

图 4 显示了带有半球帽的圆柱体前九阶源强密度声辐射模态对应的归一化远场声场分布模态. 从图 4 可以清楚地看出: 第一阶源强密度声辐射模态的辐射声场类似于单极子的辐射声场; 第二到第四阶源强密度声辐射模态的辐射声场类似于偶极子的辐射声场; 第五到第九阶源强密度声辐射模态的辐射声场类似于四极子的辐射声场; 依此类推, 高阶源强密度声辐射模态的辐射声场都与多极子辐射声场相类似. 由此说明源强密度声辐射模态具有空间滤波效应, 低阶模态主要包含了低波数的传播波成分, 而高阶模态更多的包含了高波数的倏逝波成分. 这为远场声场重建时的模态截断提供了理论依据.

图 5 显示了带半球帽的圆柱体前九阶源强密度声辐射模态对应的归一化特征值. 由前面的讨论可知辐射阻矩阵的特征值与结构声辐射模态的辐射效率成正比. 因此从图 5 可以看出, 低频时, 低阶源强声辐射模态的辐射效率高. 图 5 也表明源强密度声辐射模态具有“群组效应”, 即第一阶模态为一组; 第二到第四阶模态为一组; 第五到第九阶为一组, 高阶模态依次类推. 从图 5 还可以看出, 每组中

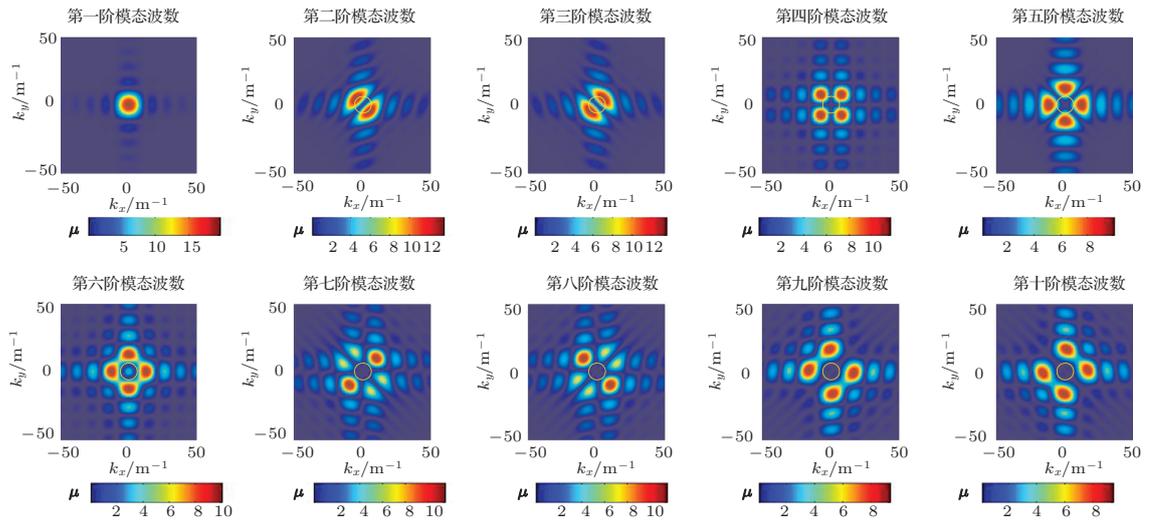


图2 (网刊彩色) 平板源强密度声辐射模态对应的波数分布

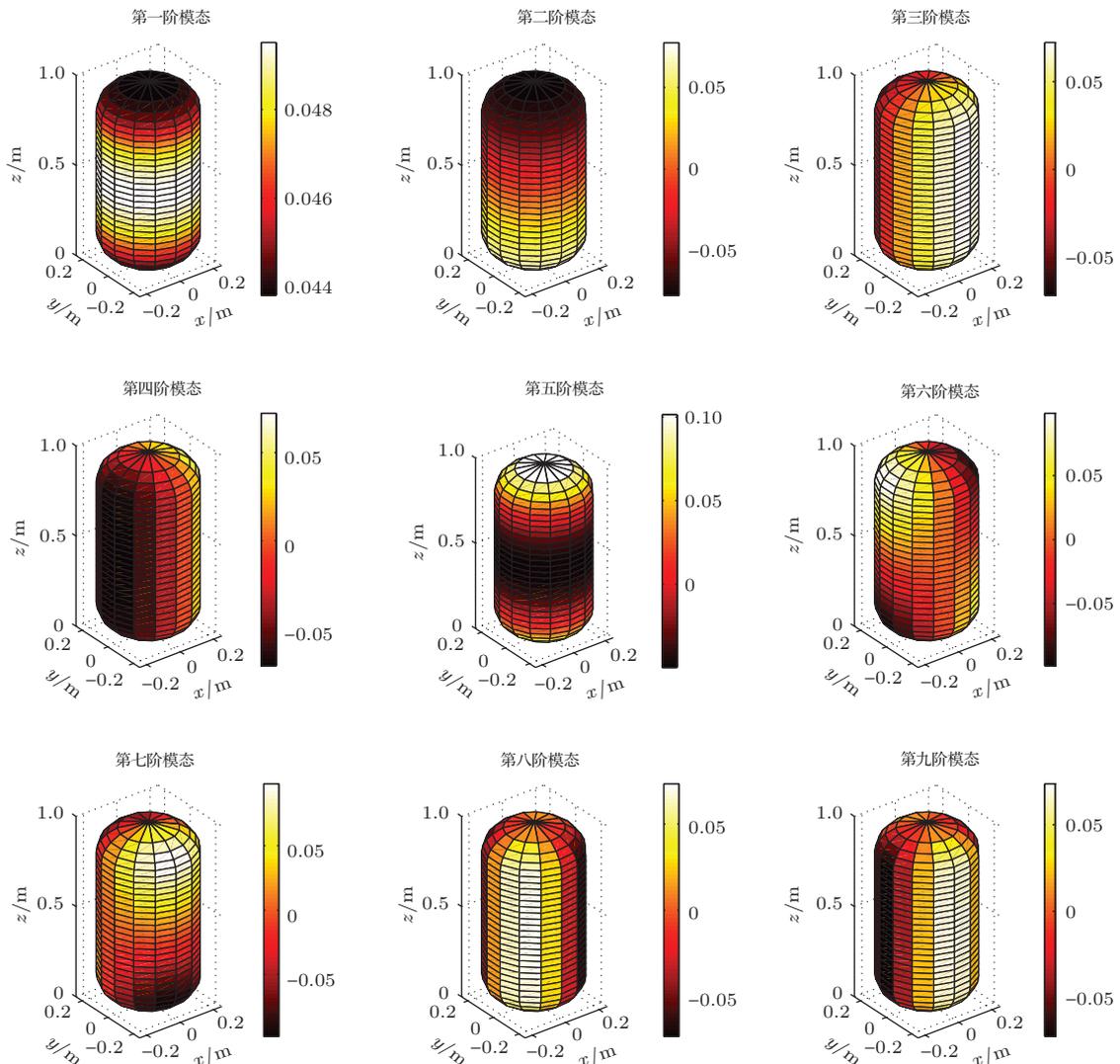


图3 (网刊彩色) 带半球帽的圆柱体的前九阶源强密度声辐射模态

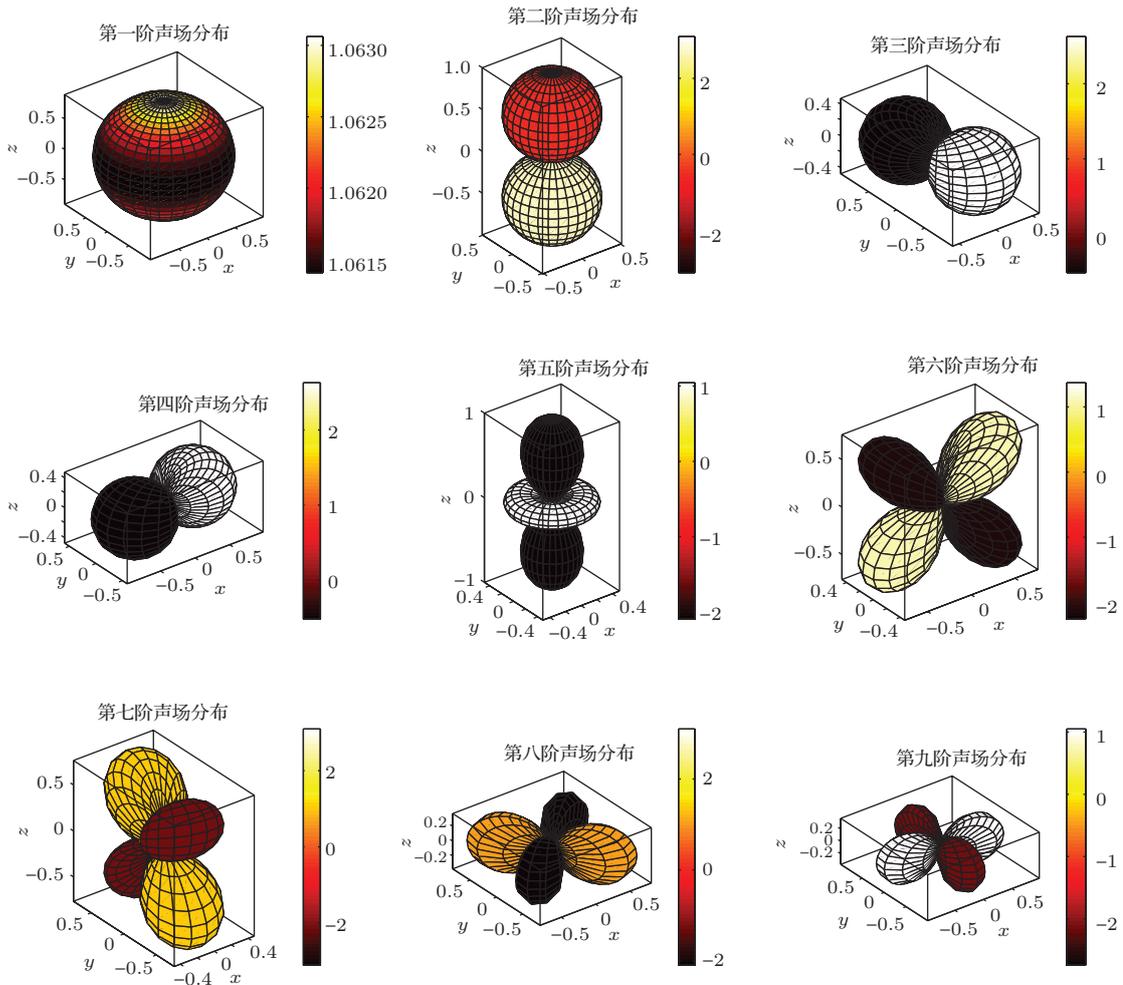


图4 (网刊彩色) 带半球帽的圆柱体的前九阶归一化声场分布模态

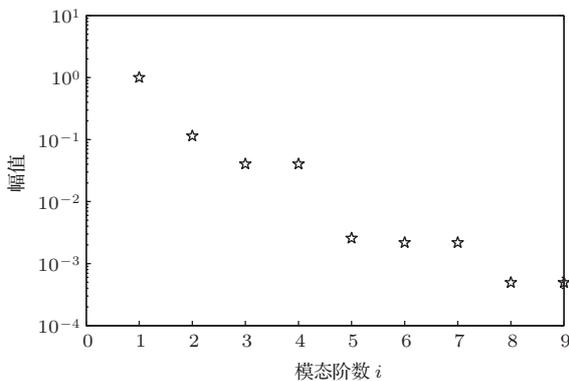


图5 带半球帽的圆柱体的前九阶模态对应的归一化特征值

的组成模态对应的特征值并不相等, 这是由于结构形状尺寸造成的, 如第二阶模态的特征值要比第三、第四阶模态的特征值大, 是因为圆柱体的轴向尺寸要比径向尺寸大, 沿轴向分布的第二阶模态所等效的偶极子间距要大于沿径向分布的第三、第四阶模态所等效的偶极子间距, 因此第二阶模态辐射效率更高, 这与声辐射理论也是一致的。

4 声场重建

4.1 声场重建公式

假设已知声场的声压, 振动结构表面离散单元个数为 N , 由上面讨论可知, 源强密度声辐射模态具有空间滤波特性, 因此声场中 n 个点声压可由前若干阶模态叠加表示,

$$\mathbf{P}_{(n \times 1)}(\mathbf{r}_H) \approx \mathbf{\Psi}_{(n \times m)}(\mathbf{r}_H, \mathbf{r}) \boldsymbol{\beta}_{(m \times 1)}, \quad (26)$$

其中, m 为截断的声场分布模态的阶数, $m < N$; \mathbf{r}_H 为已知声压点的位置矢量; $\mathbf{\Psi}_{(n \times m)}$ 为前 m 阶声场分布模态列向量组成的矩阵. 为了使 (26) 式有解, 要求 $n \geq m$, 即要求已知测量点数大于模态截断数. 对 (26) 式两端乘以 $\mathbf{\Psi}_{(n \times m)}$ 的伪逆 $\mathbf{\Psi}_{(m \times n)}^+$ 有

$$\boldsymbol{\beta}_{(m \times 1)} = \mathbf{\Psi}_{(m \times n)}^+(\mathbf{r}_H, \mathbf{r}) \mathbf{P}_{(n \times 1)}(\mathbf{r}_H). \quad (27)$$

由 (27) 式可知, 获得了模态展开系数就可以重建声场的声压和质点法向振速等声学量. 假设 $\mathbf{P}_M(\mathbf{r}_S)$ 为声场中 M 个点处的待重建声压, \mathbf{r}_S 为待重建声

声点的位置矢量, $\Psi_{(M \times m)}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r})$ 为 M 个重建点的前 m 阶声场分布模态矩阵, 则待重建点处的声压为

$$\begin{aligned} & P_{(M \times 1)}(\mathbf{r}_S) \\ &= \Psi_{(M \times m)}(\mathbf{r}_S, \mathbf{r}) \Psi_{(m \times n)}^+(\mathbf{r}_H, \mathbf{r}) P_{(n \times 1)}(\mathbf{r}_H). \end{aligned} \quad (28)$$

声场重建属于声学逆问题, 重建的精度不仅取决于测量数据的精度, 还取决于矩阵 $\Psi_{n \times m}(\mathbf{r}_H, \mathbf{r})$ 的条件数, 当矩阵条件数很大时需要采用正则化处理.

当声场中未知点位置在结构表面时, (23) 式的矩阵 \mathbf{Q} 中对角线元素会出现奇异, 因此无法获得结构表面的声场分布模态. 虽然可以获得在结构表面附近点的声场分布模态, 但由于矩阵 \mathbf{Q} 对角线元素几乎奇异, 所获得的声场分布模态会有很大误差. 根据波叠加的思想, 任意结构表面振动的声辐射都可以由其内部的一个封闭曲面振动的声辐射等效, 二者具有等效的辐射声场和辐射性质. 由此克服了利用 (23) 式求解结构表面声场分布模态时矩阵 \mathbf{Q} 中对角线元素奇异问题. 首先求解结构内部的封闭曲面的声辐射模态及其声场分布模态, 再利用 (28) 式求解结构表面及声场中任意点处的声场. 当然这种处理方式引入了波叠加法所固有的一些问题, 如结构内部封闭曲面形状、位置的选取等问题, 这里不做详细讨论, 可参见波叠加法的相关文献 [3].

4.2 重建算法的收敛性

下面以矩形平板声源为例, 讨论利用源强声辐射模态理论重建声场算法收敛性. 假设平板受到的力的激励频率分别为 130, 290, 520 和 1170 Hz, 平板划分为 20×20 个面积相等的矩形小单元, 取模态截断数目等于测量点数目, 测量面距离源面 0.1 m, 重建面距离测量面 0.2 m, 测量点数从 1 取到 400 (模态最大阶数), 利用 (28) 式计算重建面声压, 并与重建面上的理论值进行比较, 计算其误差. 定义声压重建误差 η 为

$$\eta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N |p_{ci} - p_{ti}|^2}{\sum_{i=1}^N |p_{ti}|^2}} \times 100\%, \quad (29)$$

其中, p_{ci} 为重建面上 i 点的重建声压值, p_{ti} 为重建面上 i 点的理论声压值. 图 6 为四种频率下, 不同截断阶数 (测量点数目) 对应的重建误差, 图中只给出了前 100 阶模态截断的误差.

从图 6 可以看出, 随着频率的升高, 算法的收敛性变差, 频率越低算法收敛性越好. 在 1000 Hz 以下, 利用前 50 阶模态就可以对声场进行精确重

建且重建误差差别不大. 在对其他结构进行声场重建时, 该算法也具有类似的收敛性, 这里不再赘述.

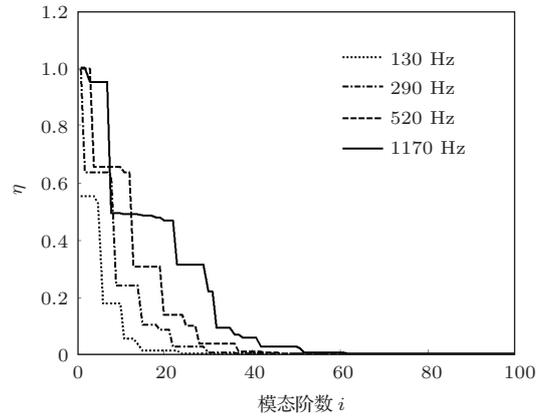


图 6 重建误差 η 与模态截断阶数 i 的关系

5 声场重建仿真及实验研究

5.1 球形声源的声场重建仿真

对于球形声源的声场重建, 这里主要考虑三种球体表面振速分布情况, 球体声源为脉动声源、摆动球声源和嵌有振动活塞的球体. 三种振动方式的理论声压值由文献 [4] 中的公式计算得到. 取球体的半径 $a = 0.5$ m, 球体表面被划分为 21×21 个面积相等的单元, 7×7 个传声器按图 7 形式布置在距球心 $1.2a$ 的同心球面上, 球体的振动频率取为 $ka = 0.5$, 重建面是与球体同心的半径为 $1.5a$ 的球面. 为了验证所提出方法的稳健性, 在理论测量声压中加入了均值为 0, 方差为 σ^2 的白噪声, 用于模拟实际测量阵列系统中存在的各种噪声和误差.

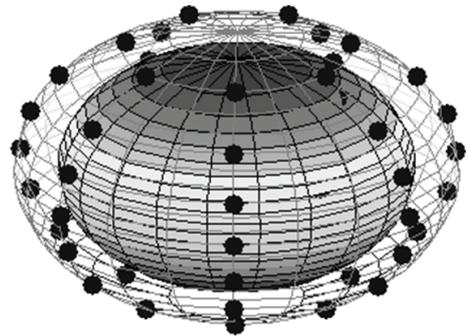


图 7 球体表面划分单元和传感器位置

5.1.1 脉动球声源的声场重建

假设已测得球体外部与球体同心的半径为 r 球面上部分点的声压值, 利用 (28) 式可以求解声场中任意点处的声压值. 信噪比为 50 dB 时, (26) 式满

足离散Picard条件,因此不需要进行正则化处理.实际上对于球体的三种振动分布而言,即使信噪比降为10 dB,也都基本满足离散Picard条件.在利用(28)式重建声压时,只取前十阶声场分布模态与前十阶模态展开系数的乘积.图8显示了信噪比为50 dB时,重建面上重建声压的幅值和相位及重建面上的理论声压幅值和相位(由于声场的对称性,图中只显示了在重建面的一条经线上的理论声压值和重建声压值),不管是重建的声压幅值还是声压相位都与理论值基本一致.

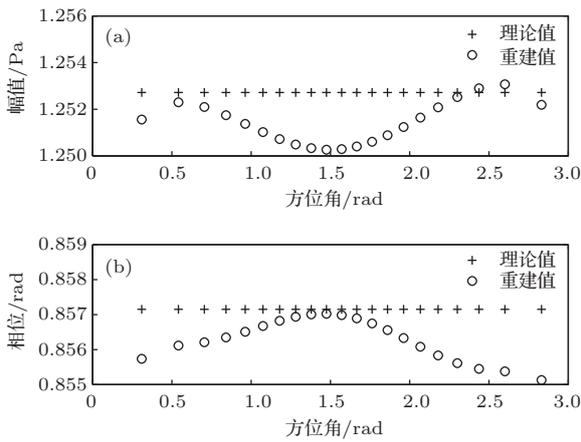


图8 脉动球重建面上的重建声压值和理论声压值 (a) 声压幅值; (b) 声压相位

表1列出了利用(29)式计算得到的不同信噪比和频率下的声压重建误差.由表1可知:当测量面离球体表面较近时,声场重建误差很小,解的稳定性也很好,重建误差随着信噪比的降低而增大;低频时,不同频率下的声压重建误差相差不大.

表1 脉动球声压重建误差

| | 信噪比/dB | | |
|------------|--------|-------|--------|
| | 50 | 30 | 10 |
| $ka = 0.1$ | 0.17% | 0.66% | 11.89% |
| $ka = 1.0$ | 0.17% | 1.54% | 11.38% |
| $ka = 2.0$ | 0.32% | 1.49% | 11.60% |

当全息面距离球心较远(如距离球心有两倍的球体半径)时,重建面不变,取频率 $ka = 0.5$,信噪比为10 dB,(26)式方程不满足离散Picard条件,因此需要进行正则化处理.利用L-曲线法选择正则化参数,正则化参数取1010.55,此时重建面上声压重建误差为4.57%,而未经正则化处理时声压重建误差为29.38%.造成直接重建误差大的原因是当全息面距离球心较远时,求解模态展开系数的方

程系数矩阵(声场分布模态矩阵)的条件数急剧增大,因此在求逆时导致方程的不适定,方程的这种不适定性会放大噪声中的高波数成分,从而使得重建结果很差,甚至无效.图9显示了频率 $ka = 0.5$,信噪比为10 dB时,在正则化和非正则化条件下脉动球声压重建误差与全息面位置的关系.从图9可以看出:在一定信噪比条件下,当脉动球全息面距离球心超过一定距离后,非正则化重建结果变差,而正则化重建结果很好;而当全息面距离球面很近时,正则化后的重建结果比非正则化的重建结果要差,因此当方程满足离散Picard条件时,尽量避免使用正则化方法.

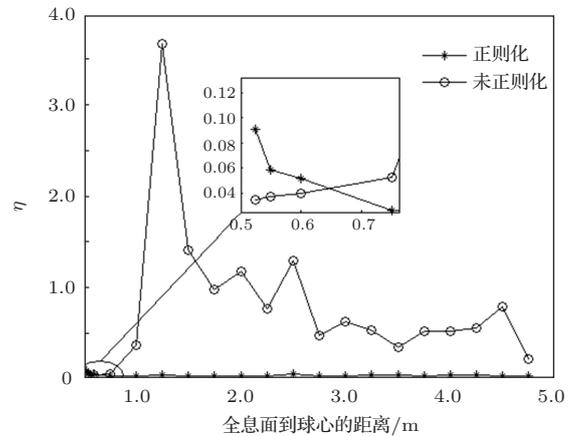


图9 脉动球声压重建误差与全息面位置的关系

5.1.2 摆动球声源的声场重建

图10所示为在摆动球重建面的一条经线上,重建声压的幅值和相位及其理论声压幅值和相位,重建的声压幅值和相位都与理论值符合得很好.表2列出了在不同频率和信噪比条件下摆动球声压直接重建的误差.表2所列数据表明:在全息面距离球体表面较近时,利用(28)式重建声压的稳定性很好,重建误差随着测量信号信噪比的降低而增大;低频时,不同频率对重建误差的影响不大.

与脉动球一样,在一定信噪比条件下,当摆动球全息面距离球心超过一定距离后,非正则化重建结果变差,而正则化重建结果很好;当全息面距离球面很近时,正则化后的重建结果比非正则化的重建结果要差.

5.1.3 嵌有振动活塞的球形声源的声场重建

图11为在重建面的一条经线上,嵌有振动活塞的球形声源辐射声压的理论值与重建值的对比,可知重建值和理论计算值基本一致.表3列出了未经正则化处理时,在不同频率和信噪比条件下嵌有

振动活塞的球体声源辐射声压的重建误差. 表3所列的重建误差数据表明: 低频条件下, 利用(28)式重建声压效果很好, 稳定性也比较高; 在一定信噪比条件下, 随着无量纲频率的升高, 重建误差有微小升高; 在一定的无量纲频率下, 重建误差随信噪比的降低而升高.

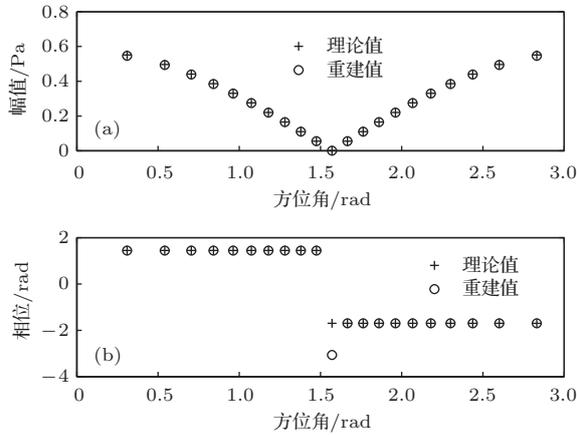


图10 摆动球的重建声压值和理论声压值 (a) 声压幅值; (b) 声压相位

表2 摆动球声压重建误差

| | 信噪比/dB | | |
|------------|--------|-------|--------|
| | 50 | 30 | 10 |
| $ka = 0.1$ | 0.8% | 2.38% | 10.10% |
| $ka = 1.0$ | 0.51% | 1.26% | 12.29% |
| $ka = 2.0$ | 0.44% | 1.62% | 14.45% |

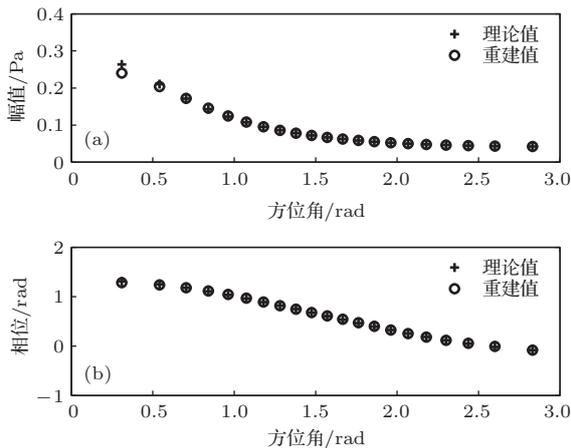


图11 嵌有振动活塞的球体的重建声压值和理论声压值 (a) 声压幅值; (b) 声压相位

利用(28)式对脉动球、摆动球和嵌有振动活塞的球体声源的声场重建表明: 重建公式是有效的, 算法是稳定的; 当声场分布模态矩阵条件数不是很

大, 干扰噪声信噪比不是很低时, 可以直接利用公式进行重建, 重建精度很高, 此时如果应用正则化方法求解反而会增大误差; 当声场分布模态矩阵条件数很高, 且测量声压中含有噪声时, 直接利用公式重建误差会很高, 重建结果甚至会无效, 经过正则化处理后, 重建精度很高, 但当声场分布模态矩阵条件数进一步增大或干扰噪声信噪比过低时, 即使使用正则化方法也无法得到较好的重建结果.

表3 嵌有振动活塞的球体声压的重建误差

| | 信噪比/dB | | |
|------------|--------|-------|-------|
| | 50 | 30 | 10 |
| $ka = 0.1$ | 4.91% | 5.03% | 9.08% |
| $ka = 1.0$ | 5.41% | 5.75% | 12.7% |
| $ka = 2.0$ | 6.98% | 7.18% | 13.6% |

5.2 平板声场重建实验研究

为了验证基于源强密度声辐射模态重建声场的有效性, 进行了单点激励固支矩形平板声辐射实验. 该实验是在空间很大的空旷厂房中完成, 为了减小噪声的影响, 实验选在夜间进行, 在地板及测量设备上铺设了吸声材料, 并只测量近场数据以减小反射声的影响. 实验装置由三部分组成: 固支平板 (长为0.5 m, 宽为0.5 m, 厚度为0.001 m) 及支架、激励源 (无锡裕天科技有限公司生产的JZK-2型激励器) 和信号采集装置 (由1个北京声望声电技术有限公司生产的MPA416型参考传声器、1个B&K公司生产的45138-001型参考加速度传感器、扫描传声器阵列和NI公司生产的PXI-4498型信号采集器及平面声学扫描装置组成), 如图12所示.

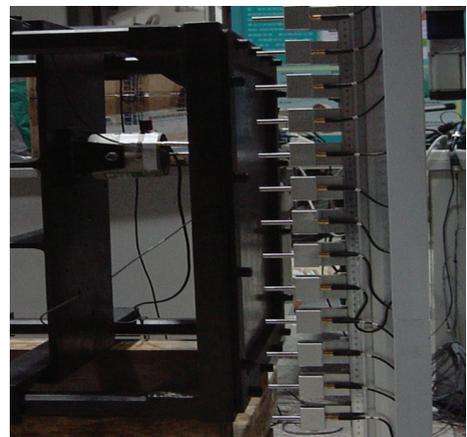


图12 实验装置图

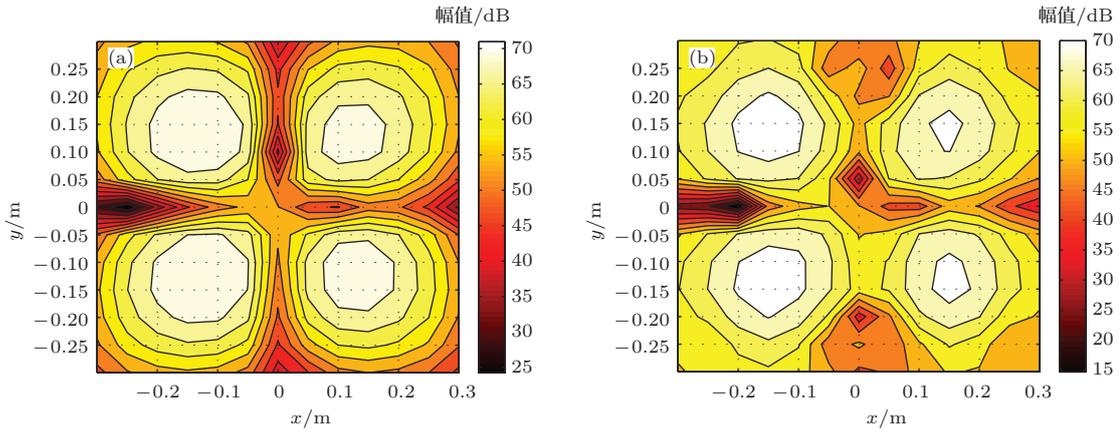


图 13 (网刊彩色) 频率为 137 Hz 时, 重建面上声压幅值的测量值与重建值的比较 (a) 测量值; (b) 重建值

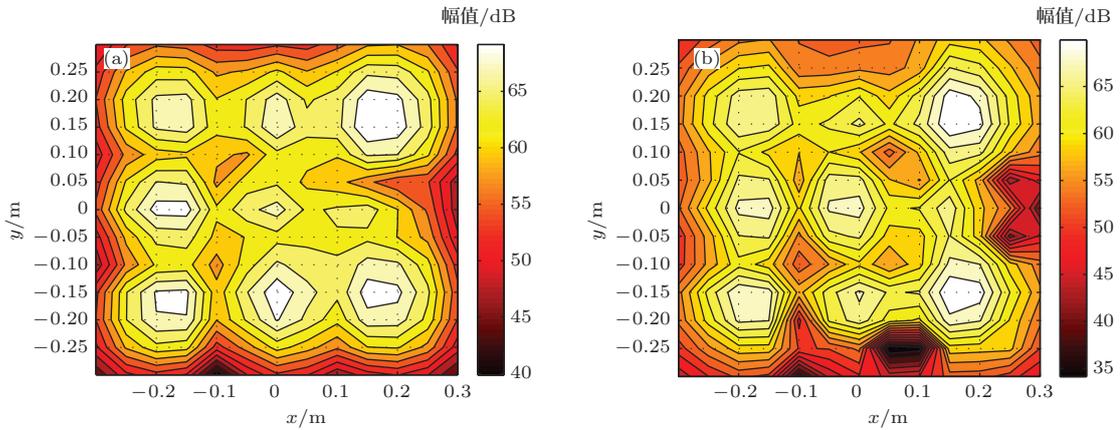


图 14 (网刊彩色) 频率为 292 Hz 时, 重建面上声压幅值的测量值与重建值的比较 (a) 测量值; (b) 重建值

以平板中心为原点建立直角坐标系. 根据激励频率适当调整激振器和参考加速度计的位置. 在距离平板 0.04 和 0.08 m 处进行两次测量, 分别作为重建面理论值和全息面测量值. 测量过程中保持测量面中心与平板中心位于同一条垂直线上, 测量孔径为 $0.6 \text{ m} \times 0.6 \text{ m}$, 空间采样间隔为 0.05 m, 采样频率为 2048 Hz.

选取分析频率为 137 和 292 Hz, 以距离平板 0.08 m 的测量面作为全息面, 距离平板 0.04 m 的测量面作为重建面. 扫描网格为 13×13 , 平板划分为 10×10 个单元, 重建时选用测量面上均匀分布的 7×7 个扫描数据, 显然测量数据的个数远远小于平板离散单元数目, 用常规的重建方法重建时, 获得的线性方程组是欠定的, 只能得到解空间, 不能获得惟一解. 基于源强密度声辐射模式的滤波特性, 本文利用较少的测量数据通过 (27) 式获得了平板振动的前 49 阶声辐射模式展开系数, 然后利用 (28) 式重建了距离平板 0.04 m 处的声压分布, 并与测量值进行了对比. 图 13(a) 给出了频率为 137 Hz 时, 距离平板 0.04 m 处声压幅值分布

的测量值, 图 13(b) 为该处的重建值. 图 14(a) 给出了频率为 292 Hz 时, 距离平板 0.04 m 处声压幅值分布的测量值, 图 14(b) 为该处的重建值. 利用误差 (29) 式计算重建值与测量值间的幅值误差. 图 13 所示的重建值和测量值之间的幅值误差为 28.5%, 图 14 所示的重建值和测量值之间的幅值误差为 29.90%, 从而证明了本文方法的有效性. 该实验是在厂房中完成的, 不可避免地受到各种噪声的干扰, 可以预见如果是在消声室条件下, 重建的结果会更好.

6 结 论

以结构表面源强密度为参量, 本文利用与 Helmholtz 积分方程等效的简单源公式构造了泛函形式的声辐射功率表达式, 并由该泛函定义的辐射算子获得了结构的源强密度声辐射模式和声场分布模式, 实现结构声功率的解耦. 相比于传统声辐射模式而言, 复杂结构的源强密度声辐射模式计算更为简单, 极大地方便了结构声辐射问题的分

析. 对平板和带半球帽的圆柱体的分析表明结构源强声辐射模态具有空间滤波特性, 平板结构的传播波成分主要包含在低阶模态中, 而封闭结构的远场归一化声场分布模态类似于多极子的辐射声场, 这明确了源强声辐射模态的物理意义. 利用源强声辐射模态空间滤波特性建立了结构辐射声场重建公式, 球体仿真实验和固支平板实验验证了基于源强声辐射模态的声场重建方法的可行性和稳健性. 所提出的重建方法与传统重建方法相比, 可以利用较少的声场测量数据获得较高精度的声场重建结果, 而且对测量面的要求不高, 降低了测量的难度和成本, 特别适合复杂结构低频声场重建. 所提出的源强声辐射模态完善了声辐射模态理论, 拓展了声辐射模态理论的应用范围.

参考文献

- [1] He Z Y, He Y A, Shang D J 2000 *Chin. J. Acoust.* **19** 193
- [2] Bi C X, Zhang Y B, Xu L, Chen X Z 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 1108 (in Chinese) [毕传兴, 张永斌, 徐亮, 陈心昭 2010 物理学报 **59** 1108]
- [3] Xu L, Bi C X, Chen J, Chen X Z 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 2776 (in Chinese) [徐亮, 毕传兴, 陈剑, 陈心昭 2007 物理学报 **56** 2776]
- [4] Wang Z X, Wu S F 1997 *J. Acoust. Soc. Am.* **102** 2020
- [5] Zhang H B, Wan Q, Jiang W K 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 333 (in Chinese) [张海滨, 万泉, 蒋伟康 2009 物理学报 **58** 333]
- [6] Bai M R, Lee J 1998 *J. Vib. Acoust.* **120** 426
- [7] Tang Y Z, Wu Z J, Tang L G 2010 *Chin. Phys. B* **19** 054303
- [8] Dumbacher S, Blough J, Hallman D, Wang P 1995 *Proceedings of the SAE Noise and Vibration Conference* Traverse City, USA, May 15–18, 1995 p1023
- [9] Elliott S J, Johnson M E 1993 *J. Acoust. Soc. Am.* **94** 2194
- [10] Berkhoff A P 2000 *J. Acoust. Soc. Am.* **108** 1037
- [11] Yamaguchi Z, Bolton J S, Sakagami K 2011 *Appl. Acoust.* **72** 420
- [12] Chanpheng T, Yamada H, Miyata T, Katsuchi H 2004 *Appl. Acoust.* **65** 109
- [13] Sarkissian A 1992 *J. Acoust. Soc. Am.* **92** 825
- [14] Naghshineh K, Koopmann G H, Belegundu A D 1992 *J. Acoust. Soc. Am.* **92** 841
- [15] Jiang Z 2004 *Acta Acust.* **29** 373 (in Chinese) [姜哲 2004 声学学报 **29** 373]
- [16] Williams E G 2001 *Sound Radiation and Nearfield Acoustical Holograph* (London: Academic Press) p267
- [17] Song L M, Koopmann G H, Fahnlne J B 1991 *J. Acoust. Soc. Am.* **89** 2786

Acoustic field reconstruction using source strength density acoustic radiation modes*

Nie Yong-Fa[†] Zhu Hai-Chao

(National Key Laboratory on Ship Vibration and Noise, Institute of Noise and Vibration, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China)

(Received 18 December 2013; revised manuscript received 15 January 2014)

Abstract

To use a small number of acoustic pressure measurement data to reconstruct the radiated acoustic field of the complicated structure, a theory of source strength density acoustic radiation modes is proposed and a formula of acoustic field reconstruction is developed. In the space defined on the surface of the structure, functional form of the acoustic radiation power expression in which parameter is source strength density is constructed. In terms of the functional a linear self-adjoint and positive radiation operator is defined whose eigenfunctions are source strength density acoustic radiation modes. And then it is proved that source strength density acoustic radiation modes possess space filter characteristic through analyzing the source strength density radiation modes of rectangular plate and cylinder with hemisphere ends. The formula of acoustic field reconstruction with the space filter nature is obtained. The sphere simulations and plate experiment validate the feasibility and robustness of the proposed acoustic field reconstruction method. The acoustic field reconstruction method based on the proposed radiation modes is simple, has high accuracy that can be obtained by using only a few measurement data, so this method is especially applicable for low frequency acoustic field reconstruction of the complicated structure.

Keywords: source strength density, acoustic radiation modes, acoustic field distribution modes, acoustic field reconstruction

PACS: 43.40.Rj, 43.20.Rz, 43.50.Cb

DOI: [10.7498/aps.63.104303](https://doi.org/10.7498/aps.63.104303)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51305452).

[†] Corresponding author. E-mail: yongfnie@163.com