物理学报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 11 (2014) 110202

完整力学系统的广义梯度表示*

葛伟宽[1)†] 薛纭[2)] 楼智美[3)]

1) (湖州师范学院物理系, 湖州 313000)

2) (上海应用技术学院机械与自动化工程学院, 上海 200235)

3) (绍兴文理学院物理系, 绍兴 312000)

(2013 年 10 月 22 日收到; 2014 年 3 月 4 日收到修改稿)

将梯度系统推广到包含时间的情形, 称之为广义梯度系统. 给出完整力学成为梯度系统的条件. 如果广义梯度系统的势函数可以成为Lyapunov 函数, 那么可用Lyapunov 定理来研究系统的稳定性.

关键词: 广义梯度系统, 完整系统, 势函数, 稳定性

PACS: 02.30.Hq, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.63.110202

1 引 言

文献[1]第9章第3节研究了梯度系统和Hamilton系统这两类重要的动力系统. 如果一个力学系统能够成为梯度系统, 那么就可利用梯度系统的特性来研究力学系统的性质, 特别是运动稳定性质. 从而开辟出一条研究稳定性问题的新途经. 如文献[2—7]. 然而, 梯度系统是不包含时间的定常系统, 这样就很难应用于非定常力学系统. 为此, 本工作将梯度系统的势函数推广到显含时间的情形, 并称之为广义梯度系统. 将一般完整力学系统在一定条件下表示为广义梯度系统. 这类系统的势函数在一定条件下可以成为Lyapunov 函数. 这样, 就有可能利用Lyapunov 定理来研究系统的稳定性.

2 广义梯度系统

梯度系统的微分方程有形式

$$\dot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i},\ (i = 1, 2, \cdots, m)\,, \tag{1}$$

其中$V = V(\boldsymbol{x})$称为势函数, 但并不是力学中的势能. 如果势函数V包含时间t, 则有

$$\begin{aligned}&\dot{x}_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i},\ (i = 1, 2, \cdots, m)\,,\\&V = V(t, \boldsymbol{x})\,.\end{aligned} \tag{2}$$

称(2)式为广义梯度系统. 按方程(2)求V对t的导数, 得到

$$\dot{V} = \frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}, \tag{3}$$

这儿以及以后, 相同指标表示求和.

对梯度系统(1), 则有

$$\dot{V} = -\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{\partial V}{\partial x_i}. \tag{4}$$

因此, 如果V是方程(1)的Lyapunov 函数, 则$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$是一个平衡点.

对广义梯度系统(2), 一般没有上述性质. 但是, 如果势函数$V = V(t, \boldsymbol{x})$可以成为Lyapunov 函数, 然后由(3)式考察$\dot{V}$的符号, 那么就有可能按Lyapunov 定理来研究系统的稳定性.

3 运动微分方程

完整力学系统的运动微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} - \frac{\partial L}{\partial q_s} = Q_s,\ (s = 1, 2, \cdots, n)\,, \tag{5}$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 11272050, 11372195) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: gwk@hutc.zj.cn

其中 $L=L(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为系统的Lagrange函数, $Q_s=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}})$ 为非势广义力. 设系统非奇异, 即设

$$\det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\dot{q}_s\dot{q}_k}\right)\neq 0, \tag{6}$$

则由方程(5)可解出所有广义加速度, 简单记作

$$\ddot{q}_s=f_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}),\ (s=1,2,\cdots,n). \tag{7}$$

4 方程的一阶形式

为研究方程(5)是否可表示为广义梯度系统, 需将其化为一阶方程. 方程(5)的一阶形式可有多种选择. 常用的方法是引进广义动量 p_s 和Hamilton函数 H, 有

$$p_s=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}_s},\quad H=p_s\dot{q}_s-L, \tag{8}$$

则方程(5)有如下一阶形式:

$$\dot{q}_s=\frac{\partial H}{\partial p_s},\quad \dot{p}_s=-\frac{\partial H}{\partial q_s}+\tilde{Q}_s, \tag{9}$$

其中

$$\tilde{Q}_s(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=Q_s(t,\boldsymbol{q},\dot{\boldsymbol{q}}(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})). \tag{10}$$

进而可表示为[2,3]

$$\dot{a}^{\mu}=\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}+\Lambda_{\mu},\ (\mu,\nu=1,2,\cdots,2n,) \tag{11}$$

其中

$$(\omega^{\mu\nu})=\begin{pmatrix}0_{n\times n} & 1_{n\times n}\\ -1_{n\times n} & 0_{n\times n}\end{pmatrix},$$

$$a^s=q_s, a^{n+s}=p_s, \Lambda_s=0, \Lambda_{n+s}=\tilde{Q}_s,$$
$$(s=1,2,\cdots,n).$$

5 化成广义梯度系统

对方程(11), 如果有如下条件:

$$\frac{\partial}{\partial a^{\rho}}\left(\omega^{\mu\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}+\Lambda_{\mu}\right)-\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\left(\omega^{\rho\nu}\frac{\partial H}{\partial a^{\nu}}+\Lambda_{\rho}\right)=0,$$
$$(\mu,\nu,\rho=1,2,\cdots,2n), \tag{12}$$

则方程(11)可成为一个广义梯度系统. 对定常系统, (12)式已由文献[2, 3]给出.

对于一个确定的力学系统, 如果条件(12)不满足, 还不能断定它不是一个广义梯度系统. 因为, 这与方程的一阶表示有关.

6 算 例

例1 单自由度完整力学系统为

$$L=\frac{1}{2}\dot{q}^2, Q=-q\exp t-\dot{q}(2+\exp t). \tag{13}$$

试将其化成广义梯度系统, 并研究零解的稳定性.

解 方程为

$$\ddot{q}=-q\exp t-\dot{q}(2+\exp t). \tag{14}$$

令

$$a^1=q, a^2=\dot{q},$$

则有

$$\dot{a}^1=a^2, \dot{a}^2=-a^1\exp t-a^2(2+\exp t).$$

这样, 它还不是一个广义梯度系统. 现取

$$a^1=q, a^2=q(1+\exp t)+\dot{q},$$

则方程(14)成为

$$\dot{a}^1=a^2-a^1(1+\exp t), \dot{a}^2=a^1-a^2. \tag{15}$$

它是一个广义梯度系统, 其势函数为

$$V=\frac{1}{2}(a^1)^2(1+\exp t)+\frac{1}{2}(a^2)^2-a^1a^2.$$

它在 $a^1=a^2=0$ 邻域内是正定的. 取其为Lyapunov函数, 按方程(15)求 $\dot{V}$, 得

$$\dot{V}=-(a^1)^2\left\{1+\frac{1}{2}\exp t+(1+\exp t)^2\right\}$$
$$-2(a^2)^2+2a^1a^2(2+\exp t).$$

在 $t\geqslant 0, a^1=a^2=0$ 邻域内, 它是常负的. 由Lyapunov定理可知, 零解 $a^1=a^2=0$ 是稳定的.

例2 完整系统为

$$L=\frac{1}{2}(\dot{q}^2+q^2),$$
$$Q=-6\dot{q}-4q(1+\sin^2 t)(1+\cos^2 t)$$
$$-4q\sin t\cos t. \tag{16}$$

试研究零解的稳定性.

解 若令 $a^1=q, a^2=\dot{q}$, 则不能成为广义梯度系统. 再令

$$a^1=q, a^2=\dot{q}+2q(1+\sin^2 t),$$

则有

$$\dot{a}^1=a^2-2a^1(1+\sin^2 t),$$
$$\dot{a}^2=a^1-2a^2(1+\cos^2 t). \tag{17}$$

它是一个广义梯度系统, 其势函数为

$$V=-a^1a^2+(a^1)^2(1+\sin^2 t)$$
$$+(a^2)^2(1+\cos^2 t).$$

它在 $a^1=a^2=0$ 邻域内是正定的, 按方程 (17) 求 $\dot{V}$, 得

$$\begin{aligned}\dot{V} = {} & \left(a^1\right)^2\left\{-1-4\left(1+\sin^2 t\right)^2+\sin 2t\right\} \\ & +\left(a^2\right)^2\left\{-1-4\left(1+\cos^2 t\right)^2-\sin 2t\right\} \\ & +12a^1a^2.\end{aligned}$$

它在 $a^1=a^2=0$ 邻域内是常负的. 因此, 由 Lyapunov 定理可知, 零解是稳定的.

7 结　论

完整力学系统的微分方程在一定条件下可以成为广义梯度系统的方程, 广义梯度系统的势函数在一定条件下可以成为Lyapunov 函数. 于是, 完整力学系统的稳定性问题在一定条件下可以通过广义梯度系统来研究. 值得注意的是, 将方程化成一阶形式, 不一定按 (11) 式实施. 非定常系统的稳定性是一个难题, 本工作提供的方法有可能研究某些非定常完整系统的稳定性.

参考文献

[1] Hirsch M W, Smale S, Devaney R L 2008 *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos* (Singapore: Elsevier) p165

[2] Lou ZM, Mei F X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 024502 (in Chinese) [楼智美, 梅凤翔 2012 物理学报 **61** 024502]

[3] Mei F X 2012 *Mechanics in Engineering* **34** 89 (in Chinese) [梅凤翔 2012 力学与实践 **34** 89]

[4] Mei F X, Wu H B 2012 *J. Dynamics and Control* **10** 289 (in Chinese) [梅凤翔, 吴惠彬 2012 动力学与控制学报 **10** 289]

[5] Mei F X, Cui J C, Wu H B 2012 *J. of Beijing Institute of Technology* **32** 1288 (in Chinese) [梅凤翔, 崔金超, 吴惠彬 2012 北京理工大学学报 **32** 1288]

[6] Mei F X, Wu H B 2013 *Science in China Phys. Mech. Aatro.* **43** 538 (in Chinese) [梅凤翔, 吴惠彬 2013 中国科学物理力学天文学 **43** 538]

[7] Mei F X, Wu H B 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 214501 (in Chinese) [梅凤翔, 吴惠彬 2013 物理学报 **62** 214501]

Generalized gradient representation of holonomic mechanical systems*

Ge Wei-Kuan[1)†] Xue Yun[2)] Lou Zhi-Mei[3)]

1) (*Department of Physics, Huzhou Teachers College, Huzhou 313000, China*)

2) (*School of Mechanical and Automation Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China*)

3) (*Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing 312000, China*)

(Received 22 October 2013; revised manuscript received 4 March 2014)

Abstract

A gradient system is generalized to a system in which the time appears in the potential function, and the system is called generalized gradient system. The condition under which a holonomic mechanical system can be considered as a generalized gradient system is given. If the potential function of the system can be considered as a Lyapunov function, then the Lyapunov theorems can be used to study the stability of the system.

Keywords: generalized gradient system, holonomic system, potential function, stability

PACS: 02.30.Hq, 45.20.Jj **DOI:** 10.7498/aps.63.110202

∗ Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 10272050, 11372195).

† Corresponding author. E-mail: gwk@hutc.zj.cn