非线性扰动时滞长波系统孤波近似解*

汪维刚[1)†] 林万涛[2)] 石兰芳[3)] 莫嘉琪[4)‡]

1) (安庆师范学院桐城教学部, 桐城 231402)

2) (中国科学院大气物理研究所, 大气科学和地球流体力学数值模拟国家重点实验室, 北京 100029)

3) (南京信息工程大学数学与统计学院, 南京 210044)

4) (安徽师范大学数学系, 芜湖 241003)

(2013 年 12 月 10 日收到; 2014 年 1 月 26 日收到修改稿)

本文是讨论一类时滞非线性扰动长波系统的孤波解. 首先, 引入非扰动的典型长波方程的精确解. 然后, 用同伦映射和改进的技巧构造了非线性扰动时滞长波系统孤波行波解的近似展开式.

关键词: 近似解, 孤波, 时滞

PACS: 02.30.Sa **DOI:** 10.7498/aps.63.110204

1 引 言

孤波在非线性发展方程中占有重要的地位. 研究非线性发展方程不断地被发展, 如 (G'/G) 展开法双曲函数展开法, 齐次平衡法, Jacobi 椭圆函数展开法和辅助方程法等等[1−3]. 很多学者已经在孤波理论方面做了许多的工作[4−7]. 孤波的非线性理论的渐近方法是一个新的研究方法. 它主要的实质是用渐近展开式将非线性问题用线性问题来处理. 在过去的近几年内, 很多渐近近似方法在研究并改进中, 包括平均法, 边界层法, 多重尺度法等. 一些作者, 如 Ni 和 Wei[8], Bartier[9], Llibre Silva 和 Teixeira[10], Kellogg 和 Kopteva[11] 以及 Faye, Frenod 和 Seck[12] 已经做了很多的工作. 利用微分不等式和其他方法, 作者等也研究了一类反应扩散问题[13], 激波[14], 生态环境[15], 孤波[16−18], 激光增益[19], 海洋和大气物理[20−24] 等问题. 本文是研究一类非线性扰动时滞长波系统. 并得到了它的孤波的近似解.

2 时滞扰动长波模型

考虑如下非线性扰动时滞长波系统:

$$u_t + v_x + \frac{1}{2}(u^2)_x = f(u(t-\tau)), \tag{1}$$

$$\begin{aligned} &v_t + (u + u_{xx})_x + (uv)_x \\ &= g(u(t-\tau), v(t-\tau))), \end{aligned} \tag{2}$$

其中 $\tau > 0$ 是小时滞数. f, g 为扰动项, 它们在相应的变量区域内为解析函数. 上述是在许多物理现象中出现的非线性时滞问题.

首先将 $u(t-\tau, x)$ 和 $v(t-\tau, x)$ 按时滞数 τ 展开

$$\begin{aligned} &u(t-\tau, x) \\ &= u(t,x) - \tau\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} \\ &\quad - \frac{\tau^3}{3!}\frac{\partial^3 u(t,x)}{\partial t^3} + \cdots, \end{aligned}$$

$$v(t-\tau, x)$$

* 国家自然科学基金 (批准号: 41275062, 11202106)、江苏省高校自然科学研究项目 (批准号: 13KJB170016)、南京信息工程大学预研基金 (批准号: 20110385) 和安徽高校省级自然科学研究项目 (批准号: KJ2013A133) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wwg12345@126.com

‡ 通讯作者. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn

$$
\begin{aligned}
&= v(t,x) - \tau\frac{\partial v(t,x)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2!}\frac{\partial^2 v(t,x)}{\partial t^2} \\
&\quad - \frac{\tau^3}{3!}\frac{\partial^3 v(t,x)}{\partial t^3} + \cdots,
\end{aligned}
$$

于是由 (1) 和 (2) 式, 有

$$
\begin{aligned}
&u_t+v_x+\frac{1}{2}(u^2)_x \\
&= f\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\tau)^k}{k!}\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k}\right), \qquad (3)\\
&v_t + (u+u_{xx})_x + (uv)_x \\
&=g\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\tau)^k}{k!}\frac{\partial^k u(t,x)}{\partial t^k},\right. \\
&\quad\left.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\tau)^k}{k!}\frac{\partial^k v(t,x)}{\partial t^k}\right). \qquad (4)
\end{aligned}
$$

引入行波变换 $z = x + \omega t$, 这里 ω 为波速, 并对变量 z 积分, 且不妨设积分常数为零. 这时系统 (3), (4) 为

$$
\begin{aligned}
&\omega u(z) + v(z) + \frac{1}{2}u^2(z) \\
&= \int_0^z f\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega\tau)^k}{k!}\frac{\partial^k u(\eta)}{\partial \eta^k}\right)\mathrm{d}\eta, \qquad (5)\\
&\omega v(z) + (1+v(z))u(z) + \frac{\mathrm{d}^2 u(z)}{\mathrm{d}z^2} \\
&= \int_0^z g\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega\tau)^k}{k!}\frac{\mathrm{d}^k u(\eta)}{\mathrm{d}\eta^k},\right. \\
&\quad\left.\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega\tau)^k}{k!}\frac{\mathrm{d}^k v(\eta)}{\mathrm{d}\eta^k}\right)\mathrm{d}\eta. \qquad (6)
\end{aligned}
$$

由 (5) 和 (6) 式, 可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}^2 u(z)}{\mathrm{d}z^2} - (\omega^2-1)u(z) - \frac{3}{2}\omega u^2(z) - \frac{1}{2}u^3(z) \\
&=h(z), \qquad (7)
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
h(z) =&(\omega - u(z))\int_0^z f\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega\tau)^k}{k!}\frac{\mathrm{d}^k u(\eta)}{\mathrm{d}\eta^k}\right)\mathrm{d}\eta \\
&+ \int_0^z g\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega\tau)^k}{k!}\frac{\partial^k u(\eta)}{\partial\eta^k},\right. \\
&- \omega\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega\tau)^k}{k!}\frac{\partial^k u(\eta)}{\partial\eta^k} \\
&- \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega\tau)^k}{k!}\frac{\partial^k u(\eta)}{\partial\eta^k}\right)^2 \\
&\left.+ \int_0^\eta f\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-\omega\tau)^k}{k!}\frac{\mathrm{d}^k u(\eta_1)}{\mathrm{d}\eta_1^k}\right)\mathrm{d}\eta_1\right)\mathrm{d}\eta.
\end{aligned}
$$

3 孤波解

设

$$
u = u_0(z) + \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0,\ i+j\neq 0}^{\infty} u_{i,j}(z)p^i\tau^j. \qquad (8)
$$

并引入一个同伦映射[25,26]: $H(u,p,\tau)(R\times I\times[0,\tau_0]\to R)$:

$$
\begin{aligned}
&H(u,p,\tau) \\
&=L(u) - L(W) + p\,[L(w) + N(u) - h(u)], \qquad (9)
\end{aligned}
$$

其中 $I = [0,1]$, p 为人工参数, τ_0 为适当小的常数, W 是初始近似函数, 线性算子 L 和非线性算子 N 为

$$
\begin{aligned}
L(u) &= \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\xi^2} - (\omega^2-1)u, \\
N(u) &= -\frac{3}{2}\omega u^2 - \frac{1}{2}u^3.
\end{aligned}
$$

将 (8) 式代入 (9) 式, 按 p, τ 展开非线性项, 合并 $H(u,p,\tau) = 0$ 关于 p, τ 同次幂的系数并令其为零, 我们能依次得到 $u_{00}(z)$ 和 $u_{ij}(z)(i = 1,2,\cdots,j = 0,1,\cdots)$. 适当地决定初始近似 $u_{00}(z)$, 将 $u_{00}(z)$ 和 $u_{ij}(z)$ 代入 (8) 式, 我们就得到了关系式 $H(u,p,\tau) = 0$ 的一个级数解. 由于非线性扰动时滞长波系统 (1), (2) 中的扰动项 f, g 为解析函数, 于是由方程 (7) 中的 h 也是解析函数, 再由于 $u_0(z)$ 为非线性方程

$$
L(u) + N(u) = 0 \qquad (10)
$$

的一个孤波解, 因此由泛函映射关系式 (9) 决定的方程 $H(u,p,\tau) = 0$ 的级数解 (8) 在 $p\in[0,1]$, $\tau\in[0,\tau_0]$ (其中 τ_0 为一个小的正数) 上是一致收敛的. 关于级数收敛性的详细数学论述, 可参见文献 [25, 27]. 因此我们也得到了方程 $H(u,p,\tau) = 0$ 的一个 mn 次近似解

$$
u_{mnapp} = u_0(z) + \sum_{i=0}^{m}\sum_{\substack{j=0\\ i+j\neq 0}}^{n} u_{i,j}(z)p^i\tau^j.
$$

显然, 由 (8) 式, 方程 $H(u,1,\tau) = 0$ 和方程 (7) 是相同的. 故方程 (7) 的解 u 就是方程 $H(u,p,\tau) = 0$ 当 $p\to 1$ 时的解.

众所周知, 方程 (10) 当 $\omega = \sqrt{1+a}$ 时具有孤波解

$$
W_1(z) = \frac{-2a}{\cosh(\sqrt{a}z) + \sqrt{1+a}}.
$$

另外, 引入辅助方程[28]

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)^2 - ay^2 - by - c = 0, \tag{11}$$

并选取方程(10)具有如下形式的待定解[28]:

$$\begin{aligned} u(z) = & f_0(z) + \frac{f_1(z)}{y(z)(c + a\tanh(z))} \\ & + \frac{f_2(z)y(z)}{c + a\tanh(z)}, \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $f_i(z)(i = 0,1,2)$ 为待定函数, $y(z)$ 为方程(11)的孤波解. 将(11), (12)代入方程(10), 经过计算, 决定出函数 $f_i(z)(i = 0,1,2)$. 进而, 当 $z = x + \sqrt{1+at}$ 时. 可得到方程(10)的另外的如下两个孤波解:

$$W_2(z) = \frac{a\,\mathrm{csch}\,\dfrac{\sqrt{a}}{2}z}{\sqrt{a}\cosh\dfrac{\sqrt{a}}{2}z + (1+\sqrt{a})\sinh\dfrac{\sqrt{a}}{2}z}, \quad a > 0,$$

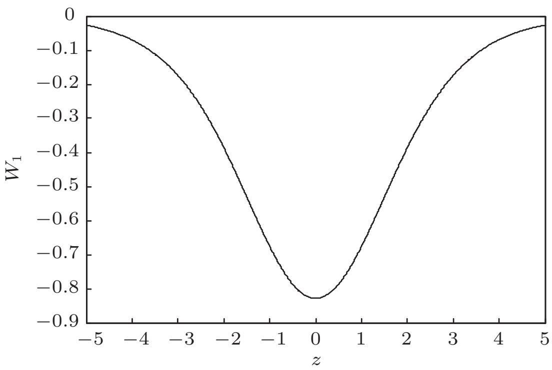

图1 $W_1(z)$ 的孤波曲线图形 $(a = 1)$

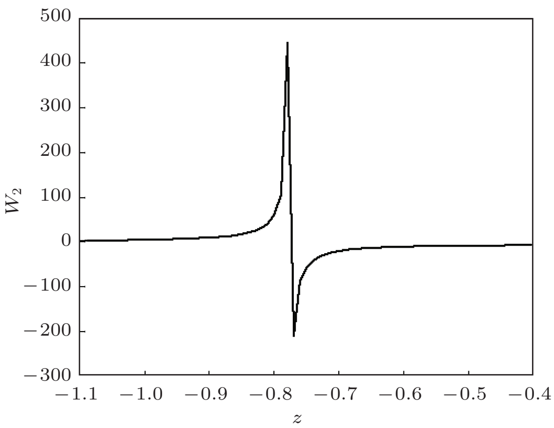

图2 $W_2(z)$ 的孤波曲线图形 $(a = 1)$

$$W_3(z) = -\frac{a\,\mathrm{csch}\,\dfrac{\sqrt{a}}{2}z}{\sqrt{a}\cosh\dfrac{\sqrt{a}}{2}z - (1+\sqrt{a})\sinh\dfrac{\sqrt{a}}{2}z}, \quad a > 0.$$

我们能作出孤波 $W_i(z)(i = 1,2,3)$ 的曲线图形(参见图1至图3).

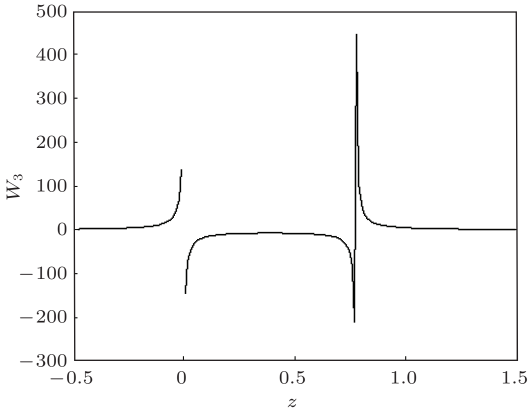

图3 $W_3(z)$ 的孤波曲线图形 $(a = 1)$

4 扰动时滞方程的孤波渐近解

考虑到映射(9), 比较 $H(u,p,\tau) = 0$ 关于 p, τ 的同次幂的系数. 关于 $p^0\tau^0$ 的系数, 得

$$L(u_{00}) = L(W).$$

选择 $u_0(z)$ 为方程(10)的一个初始近似孤波解, 例如取为 $W_2(z)$. 此时便有

$$u_0(z) = \frac{a\,\mathrm{csch}\,\dfrac{\sqrt{a}}{2}z}{\sqrt{a}\cosh\dfrac{\sqrt{a}}{2}\xi + (1+\sqrt{a})\sinh\dfrac{\sqrt{a}}{2}\xi}, \quad a > 0. \tag{13}$$

再对 $H(u,p,\tau) = 0$ 关于 $p^i\tau^j$ 的系数为零, 我们有

$$L(u_{ij}) = F_{ij}(z), \quad i = 1,2,\cdots,m,\ j = 0,1,\cdots,n, \tag{14}$$

其中

$$\begin{aligned} & F_{i(-1)j}(z) \\ = & \frac{1}{(i-1)!j!}\Bigg[\frac{\partial^{i+j-1}}{\partial p^{i-1}\partial\tau^j}\Bigg(-N \\ & \times\Bigg(\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}u_{ij}(z)p^i\tau^j\Bigg) + h(z)\Bigg)\Bigg]_{p=0,\ \tau=0,} \end{aligned}$$

$i=1,2,\cdots,m,\quad j=0,1,\cdots,n.$

不难看出, 方程 (14) 的解 $u_{ij}(z)$ 为

$$u_{ij}=\frac{\tau^j}{2\sqrt{a}}\int_0^z F_{ij}(\eta)[\exp(\sqrt{a}(z-\eta))+\exp(-\sqrt{a}(z-\eta))]\mathrm{d}\eta. \tag{15}$$

由 (8), (13) 和 (15) 式, 我们得到关于方程 (5) 的第 mn 次孤波渐近解 $U_{mn\mathrm{app}}(z)$ 如下:

$$\begin{aligned}U_{mn\mathrm{app}}(z)=&\frac{a\operatorname{csch}\frac{\sqrt{a}}{2}z}{\sqrt{a}\cosh\frac{\sqrt{a}}{2}z+(1+\sqrt{a})\sinh\frac{\sqrt{a}}{2}z}\\&+\sum_{i=1,j=0}^{m}\left[\frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^z F_{ij}(\eta)[\exp(\sqrt{a}(z-\eta))+\exp(-\sqrt{a}(z-\eta))]\mathrm{d}\eta\right]\tau^j+O(\tau^{n+1}),\\&0<\tau\ll1.\end{aligned} \tag{16}$$

由方程 (6), 我们能得到第 mn 次孤波渐近解 $V_{mn\mathrm{app}}(z)$ 为

$$V_{mn\mathrm{app}}(z)=\frac{1}{U_{mn\mathrm{app}}-\sqrt{1+a}}\left(\frac{\mathrm{d}^2U_{mn\mathrm{app}}}{\mathrm{d}z^2}-U_{mn\mathrm{app}}\right)+O(\tau^{n+1}),\quad 0<\tau\ll1, \tag{17}$$

其中 $U_{mn\mathrm{app}}(z)$ 由 (16) 式表示.

将行波变换 $z=x+\sqrt{1+a}\,t$ 代入 (16) 和 (17) 式, 我们能够得到非线性时滞扰动长波系统 (1), (2) 行波解 $(u,\ v)$ 的第 mn 次孤波渐近解 $U_{mn\mathrm{app}}(z)$.

同样, 在 (13) 式中, 取方程 (10) 的孤波解分别选取 $W_1(z)$ 和 $W_3(z)$ 非线性方程 (7) 对应的同伦映射的初始近似函数. 则我们还可以分别得到相应的非线性时滞扰动长波系统 (1), (2) 行波解 $(u,\ v)$ 的第 mn 次孤波渐近解. 在此不再表述.

5 举 例

考虑一个特殊的时滞扰动长波系统, 它的扰动项为 $f(u)=u,\ g(u,v)=0$. 这时系统 (1), (2) 为

$$u_t+v_x+\frac{1}{2}(u^2)_x=u(t-\tau,x), \tag{18}$$

$$v_t+(u+u_{xx})_x+(uv)_x=0. \tag{19}$$

引入行波变换 $z=x+\omega t$, 由 (7) 式, 有

$$\frac{\mathrm{d}^2u(z)}{\mathrm{d}z^2}-au(z)=\frac{3}{2}\omega u^2(z)+\frac{1}{2}u^3(z)+(\sqrt{1+a}+u(z))u(t-\tau). \tag{20}$$

设

$$u=u_0(z)+(u_{10}(z)+u_{11}(z))\tau+O(\tau^2),\quad 0<\tau\ll1. \tag{21}$$

对于时滞扰动长波系统 (18), (19), 选择 $u_0(z)$ 为方程 (10) 的一个孤波解 $W_2(z)$. 此时便可得到初始近似孤波解 $u_0(z)$ 为

$$u_0(z)\equiv U_{00\mathrm{app}}(z)=\frac{a\operatorname{csch}\frac{\sqrt{a}}{2}z}{\sqrt{a}\cosh\frac{\sqrt{a}}{2}z+(1+\sqrt{a})\sinh\frac{\sqrt{a}}{2}z}. \tag{22}$$

由 (15) 式, 可得

$$\begin{aligned}u_{10}=&\frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^z\left[-\frac{3}{2}\sqrt{1+a}u_0^2-\frac{1}{2}u_0^3+u_0\right]\\&\times[\exp(\sqrt{a}(z-\eta))+\exp(-\sqrt{a}(z-\eta))]\mathrm{d}\eta,\end{aligned} \tag{23}$$

$$\begin{aligned}u_{11}=&\frac{1}{2\sqrt{a}}\int_0^z\left[-\frac{3(1+a)^{3/2}}{2}\times\left[3\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}z}\right)^2+\left(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}z}\right)^3\right]+\sqrt{1+a}\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}z}\right]\exp[\sqrt{a}(z-\eta)\\&+\exp(-\sqrt{a}(z-\eta))]\mathrm{d}\eta.\end{aligned} \tag{24}$$

于是由 (16), (21)—(24) 式, 我们可得系统 (18), (19) 孤波的第 11 次近似解 U_{11app} 为

$$\begin{aligned}U_{11\mathrm{app}}(z)=&\frac{a\operatorname{csch}\frac{\sqrt{a}}{2}z}{\sqrt{a}\cosh\frac{\sqrt{a}}{2}z-(1+\sqrt{a})\sinh\frac{\sqrt{a}}{2}z}\\&+\frac{\tau}{2\sqrt{a}}\int_0^z\left[-\frac{3}{2}\sqrt{1+a}u_0^2-\frac{1}{2}u_0^3+u_0-\frac{3(1+a)^{3/2}}{2}\left[3(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}z})^2+(\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}z})^3\right]+\sqrt{1+a}\frac{\mathrm{d}u_0}{\mathrm{d}z}\right]\left[\exp[\sqrt{a}(z-\eta)\right.\\&\left.+\exp(-\sqrt{a}(z-\eta))\right]\mathrm{d}\eta+O(\tau^2),\\&0<\tau\ll1,\end{aligned} \tag{25}$$

其中 u_{00} 由 (22) 式表示.

同样, 由 (17) 式, 我们也能得到系统 (18), (19) 孤波的第 11 次近似解 $V_{11\text{app}}(z)$ 为

$$V_{11\text{app}}(z) = \frac{1}{U_{11\text{per}} - \sqrt{1+a}}\left(\frac{\mathrm{d}^2 U_{11\text{app}}}{\mathrm{d}z^2} - U_{11\text{app}}\right) + O(\tau^{n+1}), \quad 0 < \tau \ll 1,$$

其中 $U_{11\text{app}}(z)$ 由 (16) 式表示

将行波变换 $z = x + \sqrt{1+a}\,t$ 代入 $U_{11\text{app}}(z)V_{11\text{app}}(z)$, 我们能得到非线性时滞长波系统 (18), (19) 的第 11 次行波近似解.

继续地, 用同样的方法, 我们能得到非线性时滞长波系统 (18), (19) 的更高次行波近似解 (u, v)

同样, 在 (22) 式中, 取方程 (10) 的孤波解分别选取 $W_1(z)$ 和 $W_3(z)$ 非线性方程 (7) 对应的同伦映射的初始近似函数. 则我们还可以分别得到相应的非线性时滞扰动长波系统 (1), (2) 行波解 (u, v) 的第 mn 次孤波渐近解

6 结 论

时滞方程的孤波是一个复杂的自然现象的反映. 因此我们需要把它归化为基本模型, 并利用近似方法去求解它, 同伦映射方法就是一个简单而有效的解法.

同伦映射方法是一个近似解析方法, 它不同于一般的数值方法. 用同伦映射方法得到的表示式还能继续进行微分、积分等解析运算. 因此由 (16),(17) 式, 我们还能进一步对时滞方程孤波的定性、定量等方面的研究

参考文献

[1] Parkes E J 2008 *Chaos Solitons Fractals* **154**

[2] Wang M L 1995 *Phys. Lett. A* **199** 169

[3] Sirendaoreji J S 2003 *Phys. Lett. A* **309** 387

[4] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. Lett.* **25** 1527

[5] Yang X D, Ruan H Y, Luo S Y 2007 *Commum. Theor. Phys.* **48** 961

[6] Yang J R, Mao J J 2008 *Chin. Phys. B* **17** 4337

[7] Tapgetusang, Sirendaoerji 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2121 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2009 物理学报 **58** 2121]

[8] Ni W M, Wei J C 2006 *J. Differ. Equations* **221** 158

[9] Bartier J P 2006 Asymptotic Anal. **46** 325

[10] Libre J, da Silva P R 2007 *J. Dyn. Differ. Equations* **19** 309

[11] Faye L, Frenod, E, Seck D 2011 *Discrete Contin. Dyn. Syst.* **29** 1001

[12] Tian C R, Zhu P 2011 *Acta Appl. Math.* **121** 157

[13] Mo J Q 1989 *Science in China Ser A* **32** 1306

[14] Han X L, Zhao Z J, Cheng R J, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110203 (in Chinese) [韩祥临, 赵振江, 程荣军, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 110203]

[15] Mo J Q, Wang H 2007 *Acta Ecologica Sinica* **27** 4366

[16] Mo J Q, Zhang W J, He M 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 1843 (in Chinese) [莫嘉琪, 张伟江, 何铭 2007 物理学报 **56** 1843]

[17] Mo J Q, Zhang W J, Chen X F 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 6169 (in Chinese) [莫嘉琪, 张伟江, 陈贤峰 2007 物理学报 **56** 6169]

[18] Shi L F, Lin W T, Lin Y H, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 010203 (in Chinese) [石兰芳, 林万涛, 林一骅, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 010203]

[19] Mo J Q, Zhang W J, He M 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3233 (in Chinese) [莫嘉琪, 张伟江, 何铭 2006 物理学报 **55** 3233]

[20] Shi L F, Ouyang C, Mo J Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 120201 (in Chinese) [石兰芳, 欧阳成, 莫嘉琪 2012 物理学报 **61** 120201]

[21] Shi L F, Zhou X C, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 230202

[22] Lin W T, Chen L H, Ouyang C, Mo J Q 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 080204 (in Chinese) [林万涛, 陈丽华, 欧阳成, 莫嘉琪 2012 物理学报 **61** 080204]

[23] Lin W T, Lin Y H, Shi L F, Mo J Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 140202 (in Chinese) [林万涛, 林一骅, 石兰芳, 莫嘉琪 2013 物理学报 **62** 140202]

[24] Lin W T, Zhang Y, Mo J Q 2013 *Chin. Phys. B* **22** 030205

[25] Liao S J 2004 *Beyond Perturbation: Introduction to the Homotopy Analysis Method*, New York, CRC Press Co

[26] He J H 2002 *Approximate Nonlinear Analytical Methods in Engineering and Sciences* (Zhengzhou: Henan Science and Technology Press) (in Chinese)

[27] Barbu L, Morosanu G 2007 *Singularly Perturbed Boundary-Value Problems*, Basel, Birkhauserm Verlag AG

[28] Taogetusang, Sirendaoerji 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3246 (in Chinese) [套格图桑, 斯仁道尔吉 2006 物理学报 **55** 3246]

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 11 (2014) 110204

Approximate solution of solitary wave for nonlinear-disturbed time delay long-wave system*

Wang Wei-Gang[1)†] Lin Wan-Tao[2)] Shi Lan-Fang[3)] Mo Jia-Qi[4)‡]

1) (*Tongcheng Teaching Department, Anqing Teacher's College, Tongcheng 231402, China*)

2) (*State Key Laboratory of Numerical Modeling for Atmospheric Sciences and Geophysical Fluid Dynamic, Institute of Atmospheric Physics, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100029, China*)

3) (*College of Mathematics and Statistics, Nanjing University of information Science and Technology, Nanjing 210044, China*)

4) (*Department of Mathematics, Anhuii Normal University, Wuhu 241003, China*)

(Received 10 December 2013; revised manuscript received 26 January 2014)

Abstract

The solitary wave approximate solutions for a class of nonlinear-disturbed time delay long-wave system are considered. First, we introduce into exact solution of a non-disturbed typical long-wave system. Then, by using the homotopic mapping and an improved technique, the approximate expansions of the traveling wave solutions for the nonlinear-disturbed time delay long-wave systems are constructed.

Keywords: approximate solution, solitary wave, time delay

PACS: 02.30.Sa **DOI:** 10.7498/aps.63.110204

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 41275062, 11202106), the Natural Sciences Foundation from the Universities of Jiangsu Province, China (Grant No. 13KJB170016), the Advance Research Foundation in NUIST of China (Grant No. 20110385), and the Natural Science Foundation from the Education Bureau of Anhui Province, China (Grant No. KJ2013A133).

† Corresponding author. E-mail: wwg12345@126.com

‡ Corresponding author. E-mail: mojiaqi@mail.ahnu.edu.cn