

时滞位置反馈对一类非线性相对转动系统混沌运动和安全盆侵蚀的控制*

尚慧琳[†] 韩元波 李伟阳

(上海应用技术学院, 机械工程学院, 上海 200235)

(2014年1月1日收到; 2014年1月22日收到修改稿)

本文以一类典型的相对转动振动系统为研究对象, 研究激励引起的系统混沌运动和安全域侵蚀, 并对系统施加时滞位置反馈来抑制这两类复杂动力学行为. 首先, 利用 Melnikov 函数法获得相对转动系统的混沌运动及安全盆侵蚀的激励振幅阈值; 其次, 通过讨论时滞反馈系统的 Hopf 分岔条件获得适用于 Melnikov 函数法的控制参数取值范围, 进而利用 Melnikov 函数法获得时滞受控系统的全局分岔必要条件; 最后, 利用四阶 Rung-Kutta 法和点映射法数值模拟了时滞受控系统动力学行为随参数的演变, 从而验证解析结果的有效性. 研究发现: 在正的增益系数和较短的时滞量下, 时滞位置反馈能够有效抑制相对转动系统的混沌运动和安全盆侵蚀现象.

关键词: 相对转动, 时滞反馈, 安全盆, 混沌

PACS: 05.45.-a, 05.45.Df, 05.45.Gg, 02.30.Ks

DOI: 10.7498/aps.63.110502

1 引言

相对转动系统是工程实际中一种广泛存在的动力传输系统, 动力源通过该系统将转动传递到负载端, 实现运动和能量的传输. 相对转动系统中存在许多非线性因素, 如非线性刚度和非线性阻尼等, 往往引起系统的复杂动力学响应, 从而影响设备的平稳运行, 甚至导致系统构件破坏的严重后果, 因此对相对转动系统的振动问题的研究具有非常重要的现实意义. 目前, 对于相对转动系统的研究多集中于在模型、稳定性、周期解、分岔和混沌等方面^[1-8], 而对于复杂动力学行为的控制方法研究报道相对较少^[9,10]. 刘浩然等^[1]利用 Hopf 分岔原理讨论了一类谐波激励下具有时变刚度和非线性阻尼的时滞非线性相对转动系统的动态稳定性, 并给出了系统产生极限环的条件. 乔杰敏等^[2]建立了两类相对转动系统的统一力学模型, 并分析了该

模型可能产生的混沌运动. 时培明等^[3]研究了一类具有非线性刚度和阻尼的相对转动系统在周期激励和拟周期激励作用下的混沌运动. 李海滨等^[4]和孟宗等^[5]分别研究了组合谐波激励下具有不同形式阻尼和刚度的相对转动系统具有的分岔和混沌特性, 并数值模拟了外激励、阻尼、刚度分别对系统动力学行为的影响. Shi 等^[9]研究了参数激励下一类相对转动系统的混沌运动, 并提出施加外激励来控制混沌. 张文明等^[10]运用了时滞位置反馈和速度反馈联合作用来控制相对转动系统的混沌运动, 其中时滞反馈控制是由 Pyragas^[11]首先提出用以控制混沌, 并被学术界普遍推广的主动控制方法^[12-15]. 然而多时滞反馈的控制参数较多, 施加多种传感-作动装置耗能较多, 受外界因素干扰的概率也比较大, 实际用于控制不一定很理想. 为此, 提出更简易的单通道线性时滞位置反馈来抑制相对转动系统的混沌运动并研究控制的机理, 构成了本文的主要内容之一.

* 国家自然科学基金(批准号: 10902071)、上海市教委晨光计划(批准号: 11CG61)、上海应用技术学院技术发展基金(批准号: KJ2011-06)和上海应用技术学院重点学科建设项目(批准号: 1020Q121001)资助的课题.

[†] 通讯作者. E-mail: suliner60@hotmail.com

相对转动系统的混沌运动容易导致不规则的输出响应, 往往加剧传动轴的疲劳失效, 从而引起系统结构的刚度问题. 然而系统的振动幅度过大却往往会直接引起系统结构的强度问题, 如导致传动轴的破坏. 为了提高相对转动系统的可靠性和结构的安全性, 非常有必要对相对转动系统的振动有界性这样的全局动力学问题展开研究. 振动有界性问题常常利用“安全盆”来描述, 它一般被定义为所有有界解吸引域的集合^[16-24]; 其中安全盆侵蚀即安全盆的边界分形, 通常被用来解释工程结构振动对初始条件的敏感性和动力系统的全局失稳行为: 初始条件稍有改变, 就有可能导致系统的过度振动从而使得系统崩溃; 这些概念最早由Thompson等^[16]在研究船舶的倾覆问题时提出, 并应用到不同的工程领域^[16-21]. 如Wei等^[17]考虑一类电力系统, 发现噪声激励的出现能够引起甚至加剧电力系统的安全盆侵蚀, 从而导致电压崩溃现象(voltage collapse). Li等^[18]基于安全盆思想来研究外部随机扰动对一类经济系统动力学行为的影响, 发现有界噪声的幅度过高会造成经济系统的全局失稳与紊乱. Alsaleem等^[19]通过实验与Monte-Carlo法研究了静电驱动微加速度计谐振系统的安全盆侵蚀现象, 从而解释交流电压的改变所引起的微结构的吸合(pull-in)现象, 并对抑制该现象提出了时滞位移反馈控制方法. 笔者^[22-24]曾对几类典型的非线性系统施加时滞反馈来抑制系统的安全盆侵蚀现象并研究了控制的机理, 发现时滞反馈能够有效地控制安全盆的侵蚀, 但目前关于相对转动系统的安全盆侵蚀问题的研究报道极少. 因此, 本文的另一个主要内容是研究系统参数引起相对转动系统的安全盆侵蚀的机理, 并利用时滞位置反馈控制系统的安全盆侵蚀现象.

2 模型及无扰动系统

本文以一类典型的相对转动系统-两质量相对转动系统^[10]为研究对象, 对系统引入时滞位置反馈控制, 该反馈控制系统简化模型如图1所示, 其中 J_1 和 J_2 分别表示两质量的转动惯量, θ_1 和 θ_2 分别为两质量的绝对转角, $p((\theta_1 - \theta_2)_\tau - (\theta_1 - \theta_2))$ 为时滞位置反馈项^[25], p 为增益系数, τ 为时滞量. 首先建立含耗散项的反馈系统的Lagrange方程

$$J_1\ddot{\theta}_1 + c_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + K_1(\theta_1 - \theta_2) + K_2(\theta_1 - \theta_2)^3 + f_{12} - p((\theta_1 - \theta_2)_\tau - (\theta_1 - \theta_2)) = T_1,$$

$$J_2\ddot{\theta}_2 - c_{12}(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - K_1(\theta_1 - \theta_2) - K_2(\theta_1 - \theta_2)^3 - f_{12} + p((\theta_1 - \theta_2)_\tau - (\theta_1 - \theta_2)) = T_2, \quad (1)$$

其中 K_1 为线性刚度, K_2 为非线性刚度, c_{12} 都为线性阻尼系数, f_{12} 是一类非线性黏滑摩擦力^[10,26], 表示为

$$f_{12} = c_0 + c_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + c_2(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^3. \quad (2)$$

其中 c_0, c_1 和 c_2 分别为静摩擦力常数、线性阻尼系数和三次非线性阻尼系数, T_1 和 T_2 为外部施加的扭矩, 通常为简谐激励形式, 因此可设

$$\frac{J_2T_1 - J_1T_2 + (J_1 + J_2)c_0}{J_1J_2} = f \cos(\omega t). \quad (3)$$

系统(1)不仅考虑了三次非线性扭转刚度, 还考虑了三次非线性阻尼, 这样的建模更能贴近工程实际. 令相对转角为 $\Phi = \theta_1 - \theta_2$, 对(1)式线性变换即可得到时滞位置反馈相对转动系统

$$\ddot{\Phi} + a\dot{\Phi} + b\Phi^3 + d\Phi + g\dot{\Phi}^3 = f \cos(\omega t) + \beta(\Phi_\tau - \Phi), \quad (4)$$

其中

$$\begin{aligned} a &= \frac{J_1 + J_2}{J_1J_2}(c_{12} + c_1), \\ b &= \frac{J_1 + J_2}{J_1J_2}K_2, \quad d = \frac{J_1 + J_2}{J_1J_2}K_1, \\ g &= \frac{J_1 + J_2}{J_1J_2}c_2, \quad \beta = \frac{J_1 + J_2}{J_1J_2}p, \end{aligned} \quad (5)$$

$\beta(\Phi_\tau - \Phi)$ 为单通道的线性时滞位置反馈, 有2个控制参数: β 和时滞量 τ , 根据 β 与(1)式中的反馈增益系数 p 的线性关系, 研究控制参数 β 对系统(4)的影响等同于考察增益系数 p 对相对转动系统的控制作用, 因此以下为了方便讨论, 将 β 称为反馈增益系数. 容易看出, 当 $\tau = 0$ 时, 系统(3)可以退化为无控制的相对转动系统^[10]

$$\ddot{\Phi} + a\dot{\Phi} + b\Phi^3 + d\Phi + g\dot{\Phi}^3 = f \cos(\omega t). \quad (6)$$

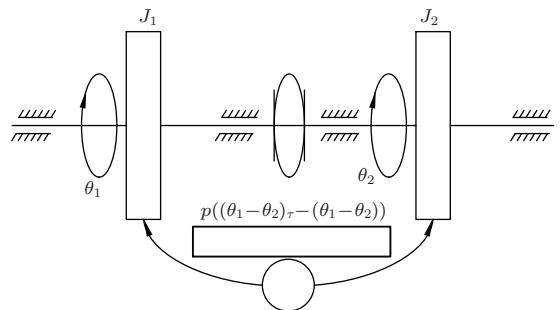


图1 时滞反馈控制两质量相对转动系统模型

在系统(6)中, 由于 a 是Coulomb干摩擦项的相关系数, 因此满足 $a > 0$; b 与软弹簧非线性刚度 K_2

成正比, 应取 $b < 0$; d 与线性刚度 K_1 成正比, 取 $d > 0$; 由于 g 为非线性黏滑摩擦力^[26] 相关系数, 通常取 $g > 0$. 确定方程参数取值范围后, 便真正获得了一类含有非线性刚度和非线性阻尼的相对转动系统动力学方程, 这是进一步研究该类系统的动力学行为的基础.

由于系统中阻尼作用是微弱的, 施加的外激励和反馈增益均为小量, 可引入小参数 $\varepsilon (0 < \varepsilon \ll 1)$, 对系统 (4) 的参数进行重新标度

$$a = \varepsilon \tilde{a}, \quad g = \varepsilon \tilde{g}, \quad f = \varepsilon \tilde{f}, \quad \beta = \varepsilon \tilde{\beta}, \quad (7)$$

其中 $\tilde{a} = O(1)$, $\tilde{g} = O(1)$, $\tilde{f} = O(1)$ 和 $\tilde{\beta} = O(1)$, 则系统 (4) 可表示为

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} &= \psi, \\ \dot{\psi} &= -d\Phi - b\Phi^3 + \varepsilon(-\tilde{a}\psi - \tilde{g}\psi^3 \\ &\quad + \tilde{f}(\cos \omega t) + \tilde{\beta}(\Phi_\tau - \Phi)). \end{aligned} \quad (8)$$

显然, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统 (8) 退化为无扰动系统

$$\dot{\Phi} = \psi, \quad \dot{\psi} = -d\Phi - b\Phi^3, \quad (9)$$

其 Hamilton 函数为

$$H(\Phi, \psi) = \frac{1}{2}\psi^2 + \frac{1}{2}d\Phi^2 + \frac{1}{4}b\Phi^4. \quad (10)$$

由 $b < 0$, $d > 0$ 知, 此时系统有三个平衡点: 点 $C(0, 0)$ 为中心, 点 $S_1(-\sqrt{-d/b}, 0)$ 和 $S_2(\sqrt{-d/b}, 0)$ 均为鞍点, 且无扰动系统的同宿轨道参数方程为

$$\begin{aligned} \Phi^\pm(t) &= \pm \sqrt{\frac{-d}{b}} \tanh \frac{\sqrt{2d}}{2} t, \\ \psi^\pm(t) &= \pm \frac{d}{\sqrt{-2b}} \operatorname{sech}^2 \frac{\sqrt{2d}}{2} t. \end{aligned} \quad (11)$$

给定 $b = -1$ 和 $d = 1$, 无扰动系统 (9) 的同宿轨道如图 2 中粗黑曲线所示.

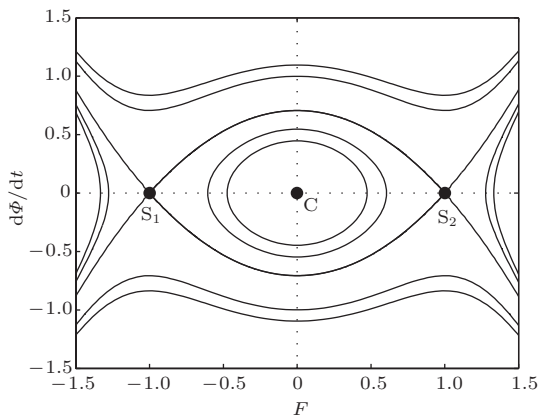


图2 当 $b = -1$ 和 $d = 1$ 时无扰动系统 (9) 的相图

3 全局分岔条件

本节首先将 Melnikov 函数法应用到无控制的相对转动系统 (6), 讨论系统发生全局分岔的必要条件. 将阻尼项和激励项看作扰动项, 根据留数定理^[27], 由重新标度过的系统 (8) 和其同宿轨道 (11) 式, 可获得系统 (6) 的 Melnikov 函数

$$\begin{aligned} M_\pm(t_0) &= \varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} (-\tilde{a}\psi - \tilde{g}\psi^3 \\ &\quad + \tilde{f} \cos(\omega(t + t_0))) \psi^\pm(t) dt \\ &= -al_1 - gl_2 + fl_3 \cos \omega t_0, \end{aligned} \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{2d\sqrt{2d}}{3b}, \\ l_2 &= \frac{8\sqrt{2}d^{7/2}}{35b^2}, \\ l_3 &= \sqrt{\frac{2}{-b}} \pi \omega \operatorname{csch} \frac{\omega\pi}{\sqrt{2d}}. \end{aligned} \quad (13)$$

当

$$|al_1 + gl_2| < fl_3, \quad (14)$$

存在某正数 t_0 使得 $M_\pm(t_0) = 0$ 且 $M_\pm(t_0)' \neq 0$, 即 (12) 式存在简单零点. 这就意味着当外激励振幅 f 满足

$$f > f_0 = \frac{|al_1 + gl_2|}{l_3}, \quad (15)$$

稳定流形和不稳定流形在 Poincaré 截面上横截相交, 无控制的相对转动系统 (6) 的同宿轨线破裂^[28], 这是导致 Smale 马蹄意义下的混沌运动和安全盆边界分形侵蚀的必要条件, f_0 即为系统 (6) 发生同宿分岔的激励振幅阈值. 由此可见, 激励振幅的增大将可能引起无控制的相对转动系统 (6) 的混沌运动和安全盆侵蚀等复杂动力学行为.

对于时滞位置反馈相对转动系统 (4), 仍可以将 Melnikov 函数法推广到时滞系统从而获得控制系统的全局分岔必要条件, 其前提条件是保证时滞位置反馈的出现不会使得原线性系统的平衡点稳定性发生定性改变, 即平衡点不会随控制参数的变化发生稳定性切换. 对于系统 (4) 的线性化系统, 当 $a > 0$ 时平衡点 $(0, 0)$ 是稳定的焦点, 不会发生稳定性切换; 当 $\tau = 0$ 时另外两个平衡点 $(\pm\sqrt{-d/b}, 0)$ 均不稳定, 其发生 Hopf 分岔的必要条件为

$$\begin{aligned} -\Omega^2 + d &= \beta \cos \Omega\tau - \beta, \\ -a\omega &= \beta \sin \Omega\tau, \end{aligned} \quad (16)$$

Ω 有实根. 设 I 集合为

$$I = \{(a, \beta) | 2d + 2\beta - a^2 > 0, (a^2 - 2\beta - 2a) \times (a^2 - 2\beta - 2a) > 0\}, \quad (17)$$

则当 $(a, \beta) \in I$ 时, (16) 式有两个不相等的正根 $\Omega_1 > \Omega_2 > 0$. 此时系统 (4) 最早发生 Hopf 分岔的时滞临界值为

$$\tau_+(0) = \frac{1}{\Omega_1} \left(2\pi - \arccos \left(1 + \frac{d - \Omega_1^2}{\beta} \right) \right). \quad (18)$$

当 $0 \leq \tau < \tau_+(0)$ 时, 系统 (4) 的线性化系统的平衡点稳定性不会随控制参数发生改变. 因此, 可将阻尼项、外激励项以及时滞位移反馈项均当成扰动项, 根据系统 (4) 的无扰动系统 (9) 和同宿轨道 (11), 得到系统 (4) 的 Melnikov 函数

$$M_{\pm}(t_0) = -al_1 - gl_2 + fl_3 \cos \omega t_0 - \beta l_4(\tau), \quad (19)$$

其中

$$l_4(\tau) = \frac{d}{b} \operatorname{csch}^2 \left(\sqrt{\frac{d}{2}} \tau \right) \times (\sqrt{2d}\tau - \sinh(\sqrt{2d}\tau)). \quad (20)$$

设

$$T(\tau) = |al_1 + gl_2 + \beta l_4(\tau)| - fl_3, \quad (21)$$

则当 $T(\tau) < 0$ 时, (19) 式会存在简单零点, 系统 (4) 则会因同宿分岔而导致混沌运动和安全盆边界分形; 相反地, 当 $T(\tau) > 0$ 时, 即

$$|al_1 + gl_2 + \beta l_4(\tau)| > fl_3, \quad (22)$$

系统 (4) 则不会出现同宿分岔, 也因此混沌振动和安全盆侵蚀均能够得到抑制. 取 $T(\tau) = 0$ 即可得到时滞系统 (4) 同宿分岔的临界条件

$$f_{\tau}^{\text{cri}} = \frac{|al_1 + gl_2 + \beta l_4(\tau)|}{l_3}. \quad (23)$$

显然 $\tau = 0$ 时, $f_{\tau}^{\text{cri}} = f_0$. 由于 $\tau > 0$ 时 $l_4(\tau)$ 始终大于 0, 因此当反馈增益系数 $\beta > 0$ 时, 易知 $f_{\tau}^{\text{cri}} > f_0$, 这说明在正的增益系数下, 时滞位移反馈能够提高系统 (4) 的同宿分岔的激励振幅阈值.

这里取系统 (4) 的参数

$$a = 0.3, b = -1, d = 1, g = 0.4, \omega = 0.73. \quad (24)$$

当 $\beta = 0.353$ 时, 根据 (16) 式, 得到 $\tau_+(0) = 3.42234$, 因此可以取时滞量变化范围为 $[0, 1] \subset [0, \tau_+(0)]$. 由 (21) 式, 不同激励振幅下函数 $T(\tau)$ 随控制参数的变化如图 3 所示. 在图 3(a) 中, $f = 0.28$ 所在曲线始终位于 $T = 0$ 轴的上方, 这说明在正的增益系数下, 无论时滞量如何变动, 系统 (4) 始终不发生同宿分岔, 因此安全盆不被侵蚀.

而 $f = 0.353$ 曲线最初在 $\tau = 0$ 时为负值, 随着时滞量逐渐增大, $T(\tau)$ 由负值变为正值, 这说明一开始系统 (4) 的同宿轨线破裂, 随着时滞量增大, 特别是当 $\tau > \tau_1 = 0.176529$ 时, $T(\tau) > 0$, 同宿分岔得以控制, 时滞量 τ_1 即为 $f = 0.353$ 时的系统 (4) 的同宿分岔点. 根据图 3(b), 取定时滞量, 在正增益系数下, $f = 0.28$ 所在曲线始终位于 $T(\tau) = 0$ 轴的上方, 这说明随着反馈增益系数在正数范围内变化系统原本不分形的安全盆始终不会分形; 同时 $f = 0.353$ 曲线会随反馈增益增大而逐渐变为正值, 说明随着反馈增益系数的增大, 安全盆侵蚀能够得到控制. 相反地, 负的反馈增益系数则会引起同宿轨线破裂 (见图 3(b) 中曲线的虚线部分). 由此可见, 在正的反馈增益系数和较小的时滞量下, 时滞位置反馈能够抑制系统的同宿分岔, 从而为控制系统的混沌运动和安全盆侵蚀提供可能.

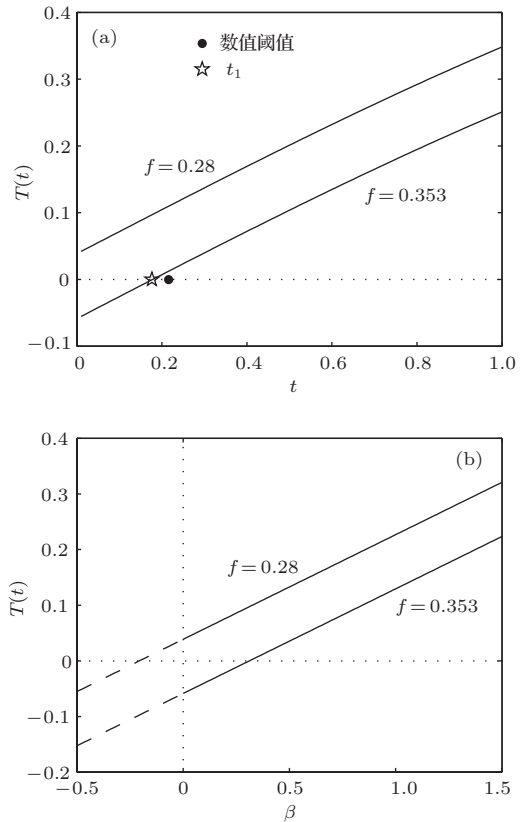


图 3 不同激励振幅取值下函数 $T(\tau)$ 随控制参数的变化 (a) $\beta = 0.353$; (b) $\tau = 0.2$

4 数值算例

针对上一节讨论得到的理论预测, 本节将通过数值算例来进行验证. 对时滞位移反馈系统 (4) 和无控系统 (6) 的参数取值见 (24) 式.

4.1 混沌运动及控制

本节以 $2\pi/\omega$ 频率截取 Poincaré 截面, 获得相应参数下系统变化的数值仿真分岔图, 从而考察系统动力学行为随参数的演变规律. 无控制的相对转动系统 (6) 随外激励幅值 f 变化的分岔情况如图 4 所示, 其中, 当激励振幅值从 0.34 增大到 0.353 的过程中, 系统的动力学行为从简单周期运动经历倍周期分岔最终走向混沌运动. 这与上一节预测的系统动力学行为会随激励振幅增大而转变为混沌运动相符合.

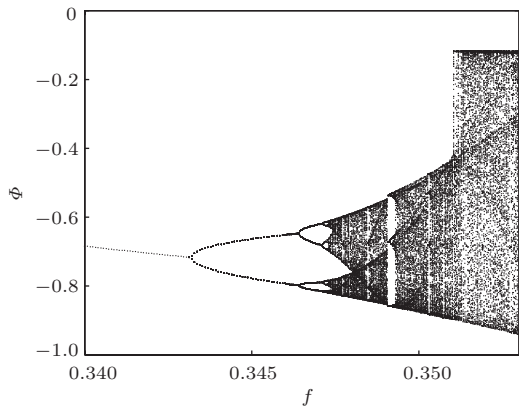


图 4 无控制系统 (6) 的外激励振幅分岔图

当激励振幅 $f = 0.353$ 时, 无控制相对转动系统 (6) 会发生混沌现象 (见图 4), 此时施加线性时滞位置反馈, 控制参数对受控系统的混沌运动的控制效果如图 5 所示. 由图 5 (a), 固定时滞量 $\tau = 0.2$, 随着反馈增益系数的增大, 系统动力学行为由混沌运动转变为简单周期运动; 而取定反馈增益系数 $\beta = 0.05$ 时, 由图 5 (b) 知增大时滞量也能够达到控制混沌的效果. 这充分说明正反馈增益系数和较小时滞量下通过增大控制参数可以使混沌运动最终转变为稳定周期运动. 系统动力学响应对控制参数较敏感: 在比较小的参数取值时就能抑制系统的复杂运动, 这也反映出时滞位置反馈控制快速灵敏的特点. 然而在负的反馈增益系数下, 根据上节的预测, 时滞位置反馈不仅不能抑制混沌运动, 反而可能破坏系统原有的简单运动状态, 使系统产生复杂运动. 如图 6 所示, 无时滞控制系统的运动是简单周期运动, 给定负的增益系数, 则随着时滞量不断增大, 系统发生倍周期分岔并最终走向混沌. 因此, 在正的反馈增益系数条件下, 利用时滞位置反馈控制才能够有效地控制系统的混沌运动.

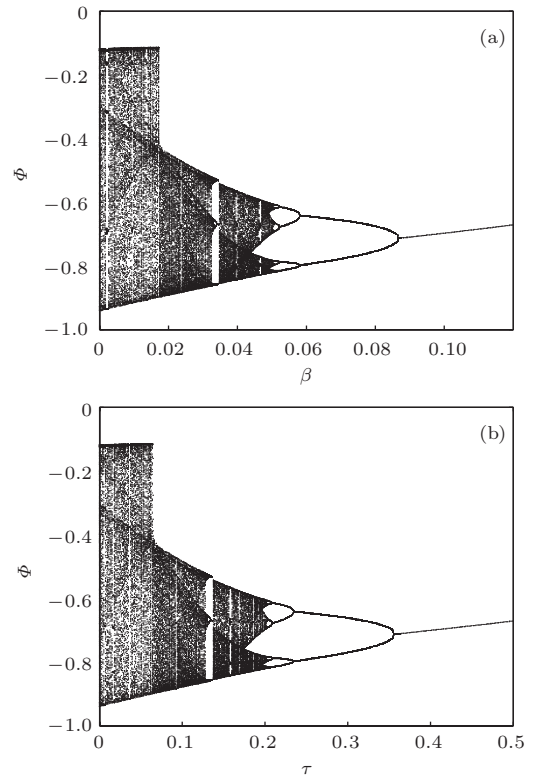


图 5 $f = 0.353$ 时受控系统 (4) 随控制控制参数的分岔图 (a) $\tau = 0.2$; (b) $\beta = 0.05$

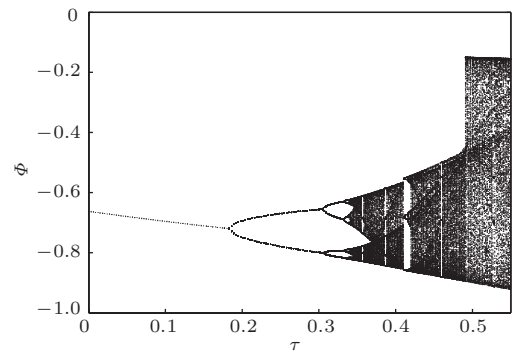


图 6 $f = 0.338$ 和 $\beta = -0.05$ 时受控系统 (4) 随时滞量的分岔图

4.2 安全盆的拓扑形态变化

由于时滞位置反馈控制系统 (4) 在零时刻以前并无返回信号 [21-23], 因此可以给定初始条件 $\Phi(t) = \Phi_0, \psi(t) = \psi_0(t = 0)$ 和 $\Phi(t) = \psi(t) = 0(-\tau \leq t < 0)$, 并定义时滞反馈控制系统 (4) 的安全盆为零时刻状态平面 $\Phi(0) - \psi(0)$ 上所有有界解初始条件的集合, 则可在二维的零时刻状态平面 $\Phi(0) - \psi(0)$ 刻划时滞反馈系统的安全盆. 为了便于对比数值结果, 本节根据相对转动角度的工程意义, 以及系统 (4) 的无扰动相平面图, 选取一个足够

反映系统响应状态的有界区域 D 为

$$D = \{ \Phi(t), \psi(t) \mid -3.0 \leq \Phi(t) \leq 3.0, -3.0 \leq \psi(t) \leq 3.0 \}, \quad (25)$$

该区域包含系统 (4) 和 (6) 的所有平衡点和同宿轨线. 在零时刻的初始平面 $-3.0 \leq \Phi(0) \leq 3.0, -3.0 \leq \psi(0) \leq 3.0$ 内运用四阶 Runge-Kutta 法和点映射方法 [16-19, 22-24] 来刻画安全盆. 具体地说, 就是在初始轴 $\Phi(0)$ 方向将 $[-3, 3]$ 划分 599 等分, 在初始轴 $\psi(0)$ 方向将 $[-3, 3]$ 划分 599 等分, 这样就产生 600×600 个网格交点, 将这些交点坐标作为系统初值来研究长期动力学行为. 当系统响应在 10000 个周期内仍未逃逸出有界区域 D , 可认为此解有界, 否则认为此解使系统产生过度振动, 系统不安全. 给定反馈增益系数 $\beta = 0.35$, 系统 (4) 的安全盆随时滞量的演变如图 7 所示, 其中黑色区域对应安全盆, 白色区域对应过度振动解的集合.

当激励振幅 $f = 0.353$ 时, 由于图 3(a) 中理论预测和数值模拟得到的激励振幅阈值均小于 f , 因此无控制系统 (6) 的安全盆会受到侵蚀, 这与图 7(a) 中安全盆的边界分形相一致. 对比图 7(a), (b) 和 (c) 发现, 随着时滞量的增大, 系统的安全盆边界分形程度明显减弱. 虽然 $\tau = 0.15$ 时安全盆边界仍有分形, 但安全盆面积相对 $\tau = 0$ 时明显增大; 而当 $\tau = 0.3$ 时, 安全盆边界分形消失, 安全盆侵蚀得到完全抑制. 数值仿真得到的时滞临界值与利用时滞系统的 Melnikov 函数法获得的临界值 τ_1 基本符合 (见图 3(a)). 对比系统 (4) 中时滞位置反馈对于混沌运动的控制 (如图 5(b)), 不难发现, 相对转动振动系统的混沌运动和安全盆侵蚀会伴随出现, 对系统施加时滞位置反馈控制后, 这两类现象均能得到有效抑制. 同时, 由上节的预测可知, 激励振幅 $f = 0.28 < f_0$, 无论时滞怎样变化系统 (4) 的安全盆应始终不被侵蚀. 因此为进一步观察时滞量对系统安全盆的影响规律, 将系统 (4) 在 $f = 0.28$ 和 $\tau = 0$ 时的无控制系统的安全盆面积定义为 100% (见图 8), 并将 $\beta = 0.35$ 时不同时滞量取值下的安全盆尺寸 (即安全盆包含的初值点数量) 与之相比, 得到相应的安全盆面积百分比. 系统 (4) 在区间 D 内的面积变化如图 9 所示. 根据图 9, 随着时滞量增大, 原有的安全盆侵蚀最终会被完全抑制 (图 9 中水平虚线以上部分). 由此可知, 反馈增益为正时, 随着时滞量的增大, 安全盆的侵蚀能够得到有效抑制. 此外, 由图 9 中随时滞增大而逐渐接近的曲线可知, 在正反馈增益系数时, 增大时滞

量还可以使得外激励对安全盆的影响减小.

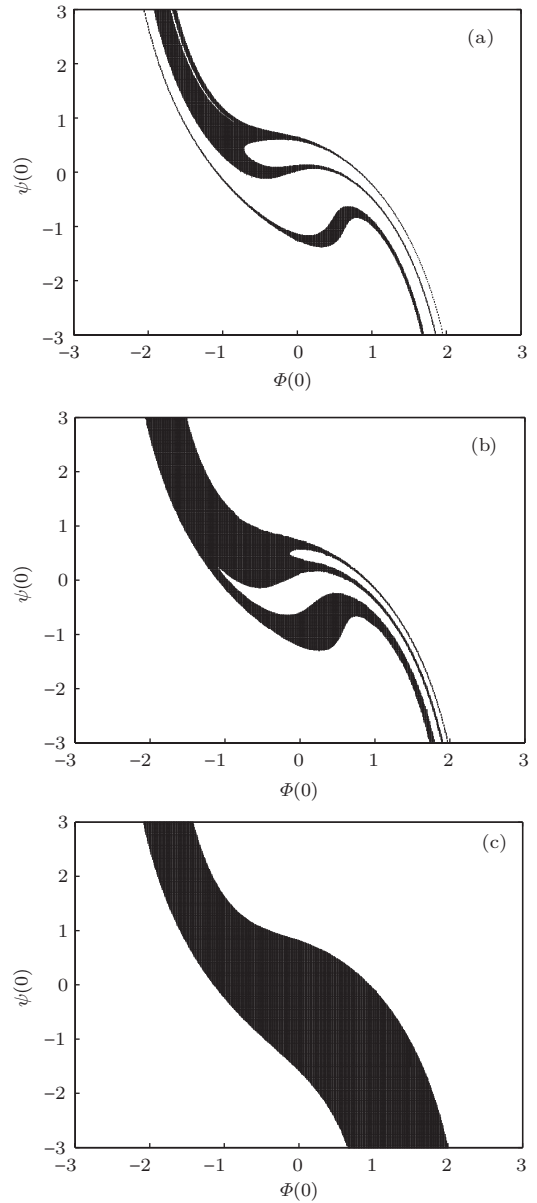


图 7 $\beta = 0.35$ 和 $f = 0.353$ 时系统 (4) 的安全盆随时滞量的演变 (a) $\tau = 0$; (b) $\tau = 0.15$; (c) $\tau = 0.3$

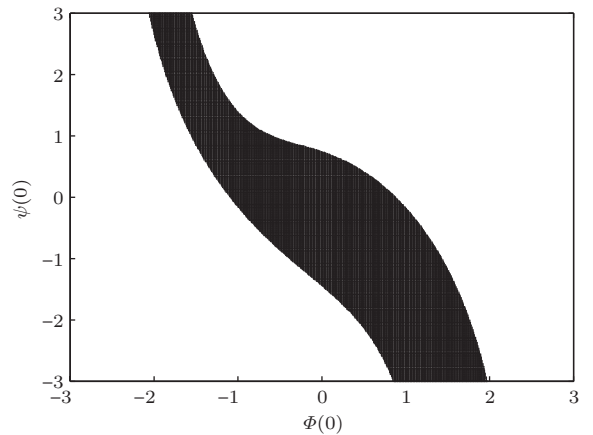


图 8 $f = 0.28$ 时无控制系统 (6) 的安全盆

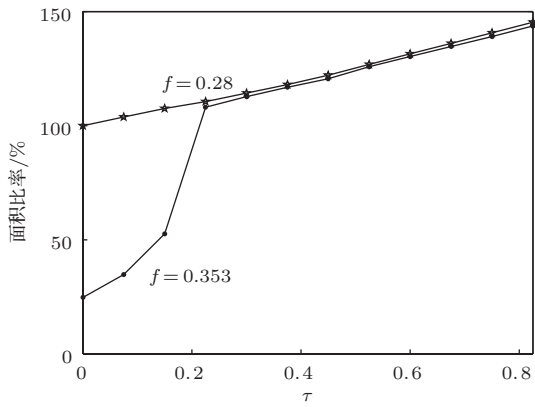


图9 不同激励幅下安全盆面积随时滞量的变化

5 结 论

本文以一类典型的相对转动系统为研究对象,对系统施加时滞位置反馈来抑制混沌运动和安全盆侵蚀现象,并研究控制的机理.研究发现,激励幅度的增大会引起系统的混沌运动和安全盆侵蚀;在正反馈增益系数和较短的时滞量下(不超过时滞反馈系统平衡点稳定切换临界值),时滞位置反馈不仅能够将系统的混沌运动抑制为简单运动,而且能够有效抑制安全盆侵蚀现象,扩大系统的安全盆.因此,时滞位置反馈是抑制系统的混沌运动和安全盆侵蚀的良好控制策略.

本文研究为揭示非线性动力系统中混沌运动和安全盆侵蚀这两类与初值敏感性相关的复杂动力学行为之间的关联提供了一定的理论依据;在抑制工程中的混沌响应和传动轴扭转疲劳失效方面有着重要的理论意义,为进一步研究结构更复杂的大型旋转机械的振动奠定了基础;同时在保障机械振动系统的动完整性(dynamical integrity)和系统结构安全性等方面存在着潜在的应用价值.然而,仍有问题需要进一步探索,如单通道的时滞位置反馈控制能够在较小的控制参数下有效抑制系统同宿分岔,那么其他的主动控制手段(例如,同为单通道控制的时滞速度反馈)是否具有更好的控制效果和稳定性?又如,相对转动系统受到外部随机因素干扰时,时滞位置反馈和时滞速度反馈等控制方法分别对混沌运动和安全盆侵蚀的控制效果及鲁棒性如何?这些成为我们下一步的研究目标.

参考文献

[1] Liu H R, Zhou Z L, Shi P M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6770 (in Chinese)[刘浩然, 朱占龙, 时培明 2010 物理学报 **59** 6770]

[2] Qiao J M, Wang K, Li X J, Zhang B 2009 *Journal of Yanshan University* **33** 02159 (in Chinese) [乔杰敏, 王坤, 李秀菊, 张波 2009 燕山大学学报 **33** 02159]

[3] Shi P M, Liu B, Hou D X 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 1321 (in Chinese) [时培明, 刘彬, 侯东晓 2008 物理学报 **57** 1321]

[4] Li H B, Wang B H, Zhang Z Q, Liu S, Li Y N 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 094501 (in Chinese)[李海滨, 王博华, 张志强, 刘爽, 李延树 2012 物理学报 **61** 094501]

[5] Meng Z, Fu L Y, Song M H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 054501 (in Chinese)[孟宗, 付立元, 宋明厚 2013 物理学报 **62** 054501]

[6] Wang K 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 5530 (in Chinese) [王坤 2005 物理学报 **54** 5530]

[7] Wang K, Guan X P, Qiao J M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 3648 (in Chinese) [王坤, 关新平, 乔杰敏 2010 物理学报 **59** 3648]

[8] Xu J X, Sun Z C 2001 *Chin. Phys.* **10** 599

[9] Shi P M, Han D Y, Liu B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 112

[10] Zhang W M, Li X, Liu S, Li Y Q, Wang B H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 094502 (in Chinese) [张文明, 李雪, 刘爽, 李雅倩, 王博华 2013 物理学报 **62** 094502]

[11] Pyragas K 1993 *Physics Letters A* **181** 203

[12] Wang Z H, Hu H Y 2005 *International Journal of Bifurcation and Chaos* **15** 1787

[13] Xu J, Chung K W, Chan C L 2007 *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems* **6** 29

[14] Balanov A G, Janson N B, Schöll E 2005 *Physical Review E* **71** 016222

[15] Shao S, Masri K M, Younis M I 2013 *Nonlinear Dynamics* **74** 247

[16] Thompson J M T, McRobie F A 1993 *Proceedings of 1st European Nonlinear Oscillation's Conference* Hamburg, German, August 16–20, 1993 p107

[17] Wei D Q, Zhang B, Qiu D Y, Luo X S 2010 *Nonlinear Dynamics* **61** 477

[18] Li S, Li Q, Li J R, Feng J Q 2011 *Nonlinear Analysis: Real World Applications* **12**1950

[19] Alsaleem F M, Younis M I 2010 *Smart Materials and Structures* **19** 035016

[20] Rong H W, Wang X D, Xu W, Fang T 2008 *Journal of Sound and Vibration* **313** 46

[21] Gan C B 2006 *Chaos, Solitons and Fractals* **30** 920

[22] Shang H L, Xu J 2009 *Chaos, Solitons and Fractals* **41** 1880

[23] Shang H L 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 070501 (in Chinese) [尚慧琳 2011 物理学报 **60** 070501]

[24] Shang H L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 180506 (in Chinese) [尚慧琳 2012 物理学报 **61** 180506]

[25] Zhao Y Y, Li C A 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 114305 (in Chinese) [赵艳影, 李昌爱 2011 物理学报 **60** 114305]

[26] Thomsen J J, Fidler A 2003 *International Journal of Non-Linear Mechanics* **38** 389

[27] Tang K T 2007 *Mathematical Methods for Engineers and Scientists* (New York: Springer-Verlag) pp141–147

[28] Hong L, Xu J X 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1228 (in Chinese)[洪灵, 徐健学 2000 物理学报 **49** 1228]

Suppression of chaos and basin erosion in a nonlinear relative rotation system by delayed position feedback*

Shang Hui-Lin[†] Han Yuan-Bo Li Wei-Yang

(School of Mechanical Engineering, Shanghai Institute of Technology, Shanghai 200235, China)

(Received 1 January 2014; revised manuscript received 22 January 2014)

Abstract

A typical relative rotation system is considered whose chaotic motion and basin erosion caused by external excitation is investigated in this paper. And a delayed position feedback control is applied in the system for suppressing the two types of complex dynamical behaviors. Firstly, the excitation amplitude threshold of chaotic motion and the basin erosion of an uncontrolled relative rotation system is obtained by the Melnikov method. Secondly, the condition of Hopf bifurcation of a delay controlled system is discussed so as to obtain the available ranges of control parameters in the Melnikov method. Then the necessary condition for the global bifurcation of a delay controlled system is obtained. Finally, the evolutions of the dynamical behavior of the delay controlled system together with its control parameters are presented numerically using the 4th Runge-Kutta method and the point-to-point mapping method, which confirm the validity of the theoretical prediction. It is found that the chaotic motion and basin erosion can be suppressed effectively by delayed position feedback control when the gain is positive and the time delay is short.

Keywords: relative rotation, delayed feedback control, safe basin, chaos

PACS: 05.45.-a, 05.45.Df, 05.45.Gg, 02.30.Ks

DOI: [10.7498/aps.63.110502](https://doi.org/10.7498/aps.63.110502)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 10902071), the “Twilight” Program of Shanghai Education Commission, China (Grant No. 11CG61), the Foundation of Science and Technology of Shanghai Institute of Technology, China (Grant No. KJ2011-06), and the Leading Academic Discipline Project of Shanghai Institute of Technology, China (Grant No. 1020Q121001).

[†] Corresponding author. E-mail: suliner60@hotmail.com