CDG方程和耦合KdV-MKdV方程的微分不变量*

丁琦 郝爱晶†

(大连理工大学数学科学学院, 大连 116024)

(2013 年 11 月 21 日收到; 2014 年 2 月 25 日收到修改稿)

本文利用了Olver提出的等价活动标架方法, 通过构造合适的活动标架, 得到了CDG方程和耦合KdV-MKdV方程的微分不变量, 并推得了微分不变量代数.

关键词: 微分不变量, 活动标架, CDG方程, 耦合KdV-MKdV方程

PACS: 05.45.Yv, 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.63.110503

1 引 言

在几何、微分方程[1−3]、数学物理[4,5]和实际应用领域的问题中, 微分不变量都有非常广泛的应用. 很多数学家为计算不变量理论做出了杰出的工作, 不变量理论得到了迅速地发展.

Olver等[6]提出了用等价活动标架方法来计算微分不变量, 通过李伪群来构造等价活动标架, 在此基础上求得了微分不变量和不变量代数关系, 并在后续的工作[7−10]中做了进一步的论述和理论完备. Hubertd等[11,12]利用Gröbner基计算不变量的基本关系, 简化了计算微分不变量的工作. Li等用等价活动标架法计算了两个重要偏微分方程的微分不变量[13]. 郭美玉等计算了变系数广义Gardner方程的微分不变量[14].

本文将用等价活动标架的方法来计算CDG方程和耦合KdV-MKdV方程的微分不变量和不变量代数. CDG方程[15−19]

$$u_t + au^2u_x + bu_xu_{xx} + cuu_{xxx} + du_{xxxxx} = 0, \tag{1}$$

a, b, c, d 都是常数.

在流体力学、理论物理和纯粹的数学领域都有非常重要的应用. 夏铁成[20]得到了一类GJ族的约化耦合KdV-MKdV方程

$$\begin{aligned} &u_t - u_{xxx} + 4u\,(a+v)\,u_x + 2u^2v_x = 0,\\ &v_t - v_{xxx} + 4u\,(a+v)\,v_x + 2\,(a+v)^2\,u_x = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

其中a是常数, 并研究了该方程的代数几何解.

2 等价活动标架方法

本文采用的是参考文献[21]的基本知识框架和符号.

设微分方程为

$$\Delta_\nu(x, u^{(n)}) = 0, \quad \nu = 1, 2, \cdots, q, \tag{3}$$

其中$x = (x^1, \cdots, x^p)$表示p个独立的自变量, $u = (u^1, \cdots, u^q)$ 表示q个因变量, $D_i = D_{x^i}, i = 1, \cdots, p$, 表示全导数. 全空间$M$是一个$m = p + q$维的流形, $z = (x, u)$是M上的局部坐标, $J^n(M, p)$是M上的n阶p维子流形的Jet丛, 则方程(3)定义了$J^n(M, p)$的一个子簇.

* 中央高校基本科研业务费 (批准号: DUT13LK09)、辽宁省教育厅科学研究基金 (批准号: L2012009) 和国家自然科学基金 (批准号: 91230103) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: 913509242@qq.com

用

$$v=\sum_{i=1}^{p}\xi^{i}(x,u)\partial x^{i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\varphi^{\alpha}\partial u^{\alpha}$$

表示 (3) 式的无穷小生成元,

$$v^{(n)}=\sum_{i=1}^{p}\xi^{i}(x,u)\partial x^{i}+\sum_{\alpha=1}^{q}\sum_{\#J=0}^{n}\hat{\varphi}_{J}^{\alpha}\partial u_{J}^{\alpha}$$

表示 (3) 的向量场的延拓, 其中 $\hat{\varphi}_J^\alpha = D_J(\varphi^\alpha - \sum\limits_{i=1}^{p} u_i^\alpha \xi^i) + \sum\limits_{i=1}^{p} u_{J,i}^\alpha \xi^i$, $D_J = D_1^{j_1}\cdots D_p^{j_p}$.

$$\mathcal{L}(\cdots,x^{i},\cdots,\xi_{A}^{i},\cdots,\varphi_{A}^{\alpha},\cdots)=0 \tag{4}$$

表示系统 (3) 的无穷小确定方程, 其中 $A = (a_1,\cdots,a_p)$, $\#A = \sum\limits_{i=1}^{p} a_i$, $\xi_A^i = \partial^{\#A}\xi^i/\partial x^A$, $\varphi_A^\alpha = \partial^{\#A}\varphi^\alpha/\partial x^A$.

无穷小确定方程 (4) 的解空间 $\mathfrak{g}$ 是方程 (3) 的无穷小对称的李代数. $\mathfrak{g}$ 中的每一个无穷小向量场都产生一个单参的局部变换群, 所有的单参局部变换群共同组成了 (3) 的李伪群 $\mathcal{G}$. $\mathcal{G}^{(n)}$ 表示李伪群 $\mathcal{G}$ 的 n 阶 Jet 丛, 它的局部坐标 $(x,u,X^{(n)},U^{(n)})$ 由基函数 x^i, u^α 和目标函数 X^i, U^α, 及对应目标函数的导数 X_A^i, U_A^α 组成, 其中 $\#A\geqslant 1$.

下式表示方程的余坐标架:

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{H}}X^{i}&=\sum_{j=1}^{p}(D_{j}X^{i})dx^{j}\\&=\sum_{j=1}^{p}(X_{x^{j}}^{i}+\sum_{\alpha=1}^{q}X_{u^{\alpha}}^{i}u_{j}^{\alpha})dx^{j},\end{aligned} \tag{5}$$

其中 d_{H} 是水平微分. $D_{X^1},\cdots,D_{X^p}$ 表示 $D_1,\cdots,D_p$ 的对偶全微分算子, 满足下面的公式:

$$d_{\mathrm{H}}F=\sum_{i=1}^{p}(D_{X^{i}}F)d_{\mathrm{H}}X^{i},$$

其中 $F:\mathcal{G}^{(n)}\to\mathbb{R}$ 是任意函数, $\mathbb{R}$ 是实数域.

定义 1 对于李伪群 $\mathcal{G}$, 作用在 p 维子流形 $N\subset M$ 的 n 阶活动标架是一个 $\mathcal{G}$-等价的截断映射 $\rho^{(n)}: J^n(M,p)\to\mathcal{H}^{(n)}$, 其中 $\mathcal{H}^{(n)}$ 是 $\mathcal{G}^{(n)}$ 的子集.

ι 表示不变量化的过程, 每一个活动标架都确定一个对应的不变量化过程. ι 具体为, 取合适的活动标架, 并将求得的伪群参数代入 $\mathcal{G}^{(n)}$ 上的函数及其导数、对偶算子和微分形式中; 特别指出, 不变量化 n 阶局部坐标 $(x,u^{(n)})$ 就得到正规化微分不变量, 即

$$H^{i}=\iota(x^{i}),\quad I_{J}^{\alpha}=\iota(u_{J}^{\alpha}). \tag{6}$$

用 $\mathcal{D}_i=\iota(D_i)$, $i=1,\cdots,p$, 表示不变微分算子; 通过不变微分算子的作用, 可以得到更高阶的微分不变量.

定理 1 对于定义在 $J^n(M,p)(n\gg 0)$ 开子集上的活动标架, 设伪群 $\mathcal{G}$ 使得这些活动标架相容. 那么任意阶的非平凡正规化不变量 (6) 是相互独立的, 并且这些正规化不变量生成了微分不变量代数 $I_{\mathcal{G}}$.

伪群 $\mathcal{G}$ 的 Maurer-Cartan 形式是无穷维 Jet 丛 $\mathcal{G}^{(\infty)}$ 上的右不变接触形式, 用 χ_A^i, μ_A^α, $i=1,\cdots,p$, $\alpha=1,\cdots,q$, $\#A\geqslant 0$ 表示.

定理 2 将替换法则

$$x^{i}\to X^{i},\ u^{\alpha}\to U^{\alpha},\ \xi_{A}^{i}\to\chi_{A}^{i},\ \varphi_{A}^{\alpha}\to\mu_{A}^{\alpha},$$

代入无穷小确定方程 (4), 得 Maurer-Cartan 形式满足的确定方程

$$\mathcal{L}=(\cdots,X^{i},\cdots,U^{\alpha},\cdots,\chi_{A}^{i},\cdots,\mu_{A}^{\alpha},\cdots)=0.$$

定理 3 不变量化的 Maurer-Cartan 形式满足不变量化的确定方程

$$\begin{aligned}\mathcal{L}=&(\cdots,H^{i},\cdots,I^{\alpha},\cdots,\beta_{A}^{i},\cdots,\varPhi_{J}^{\alpha},\cdots)\\=&0,\end{aligned} \tag{7}$$

其中 $\beta_A^i=\iota(\xi_A^i),\varPhi_J^\alpha=\iota(\varphi_J^\alpha)$.

定理 4 正规化微分不变量 (6) 的递推公式为

$$\begin{aligned}d_{\mathrm{H}}H^{j}&=\sum_{i=1}^{p}(\mathcal{D}_{i}H^{j})\omega^{i}=\omega^{j}+\beta^{j},\\d_{\mathrm{H}}I_{J}^{\alpha}&=\sum_{i=1}^{p}(\mathcal{D}_{i}I_{J}^{\alpha})\omega^{i}=\sum_{i=1}^{p}(I_{J,i}^{\alpha})\omega^{i}+\hat{\varPhi}_{J}^{\alpha},\end{aligned} \tag{8}$$

其中 $\hat{\varPhi}_J^\alpha=\iota(\hat{\varphi}_J^\alpha)$, $\omega^i=\iota(dx^i)$.

3 CDG 方程的微分不变量

CDG 方程的全空间是 $M=\mathbb{R}^3$, 它的空间坐标是 (t,x,u). 无穷小生成元

$$\boldsymbol{v}=\tau(t,x,u)\partial t+\xi(t,x,u)\partial x+\varphi(t,x,u)\partial u, \tag{9}$$

满足下面的无穷小确定方程:

$$\begin{aligned}&\tau_{u}=\tau_{x}=\tau_{tt}=\xi_{t}=\xi_{u}=0,\\&\xi_{x}=\frac{1}{5}\tau_{t},\\&\varphi=-\frac{2}{5}u\tau_{t},\end{aligned} \tag{10}$$

解 (10) 得方程 (1) 一组无穷小对称的基

$$\boldsymbol{v}_{1}=\partial t,$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{v}_2 = \partial x, \\ &\boldsymbol{v}_3 = t\partial t + \frac{1}{5}x\partial x - \frac{2}{5}u\partial u, \end{aligned} \tag{11}$$

则对应的李伪群为

$$\begin{aligned} &(T, X, U) \\ =&\exp(\lambda_3\boldsymbol{v}_3)\circ\exp(\lambda_2\boldsymbol{v}_2)\circ\exp(\lambda_1\boldsymbol{v}_1) \\ =&(\mathrm{e}^{\lambda_3}(\lambda_1+t), \mathrm{e}^{1/5\lambda_3}(\lambda_2+x), \mathrm{e}^{-2/5\lambda_3}u), \end{aligned} \tag{12}$$

其中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 是伪群参数. 根据 (5) 式, 得方程 (1) 的水平余标架

$$\begin{aligned} d_{\mathrm{H}}T =&(T_t + T_u u_t)dt + (T_x + T_u u_x)dx \\ =&\mathrm{e}^{\lambda_3}dt, \\ d_{\mathrm{H}}X =&(X_t + X_u u_t)dt + (X_x + X_u u_x)dx \\ =&\mathrm{e}^{\frac{1}{5}\lambda_3}dx \end{aligned} \tag{13}$$

和对偶全微分算子

$$D_T = \mathrm{e}^{-\lambda_3}D_t, \ D_X = \mathrm{e}^{-1/5\lambda_3}D_x. \tag{14}$$

将 (14) 式连续的作用于 $U = e^{-2/5\lambda_3}u$, 得到延拓的伪群坐标

$$\begin{aligned} &T = \mathrm{e}^{\lambda_3}(\lambda_1+t), \ X = \mathrm{e}^{1/5\lambda_3}(\lambda_2+x), \\ &U = \mathrm{e}^{-2/5\lambda_3}u, \ U_T = \mathrm{e}^{-7/5\lambda_3}u_t, \\ &U_X = \mathrm{e}^{-3/5\lambda_3}u_x, \ U_{TT} = \mathrm{e}^{-12/5\lambda_3}u_{tt}, \\ &U_{XX} = \mathrm{e}^{-4/5\lambda_3}u_{xx}, \ U_{TX} = e^{-8/5\lambda_3}u_{tx}, \\ &\cdots \end{aligned} \tag{15}$$

构造方程 (1) 的活动标架: 令

$$T = 0, \ X = 0, \ U = 1,$$

解上述方程, 可得到对应的伪群参数

$$\lambda_1 = -t, \ \lambda_2 = -x, \ \lambda_3 = \frac{5}{2}\ln u. \tag{16}$$

将 (16) 式代入 (15) 式中可得正规化微分不变量

$$\begin{aligned} &H^1 = \iota(t) = 0, \ H^2 = \iota(x) = 0, \\ &I_{00} = \iota(u) = 1, \ I_{10} = \iota(u_t) = \frac{u_t}{u^{7/2}}, \\ &I_{01} = \iota(u_x) = \frac{u_x}{u^{3/2}}, \ I_{20} = \iota(u_{tt}) = \frac{u_{tt}}{u^6}, \\ &I_{02} = \iota(u_{xx}) = \frac{u_{xx}}{u^4}, \ I_{11} = \iota(u_{tx}) = \frac{u_{tx}}{u^2}, \\ &\cdots \end{aligned} \tag{17}$$

再将 (16) 式代入 (14) 式中可得不变微分算子,

$$\mathcal{D}_1 = u^{-5/2}D_t, \ \mathcal{D}_2 = u^{-1/2}D_x, \tag{18}$$

由 (18) 可得不变微分算子的交换关系为

$$[\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2] = \frac{5}{2}I_{01}\mathcal{D}_1 - \frac{1}{2}I_{10}\mathcal{D}_2. \tag{19}$$

用 $\alpha_{ij} = \iota(\tau_{ij})$, $\beta_{ij} = \iota(\xi_{ij})$, $\varPhi_{ij} = \iota(\varphi_{ij})$ 来表示不变量化的Maurer-Cautan形式, 由定理2和定理3得不变量化Maurer-Cautan形式所满足的确定方程

$$\begin{aligned} &\alpha_U = \alpha_X = \alpha_{TT} = \beta_T = \beta_U = 0, \\ &\beta_X = \frac{1}{5}\alpha_T, \\ &\varPhi = -\frac{2}{5}\alpha_T, \ \cdots \end{aligned} \tag{20}$$

根据 (11) 式, 设方程 (1) 的一般无穷小生成元为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v} =&(c_1 + c_3 t)\partial t + (c_2 + \frac{1}{5}c_3 x)\partial x \\ &- \frac{2}{5}c_3 u\partial u, \end{aligned} \tag{21}$$

c_1, c_2, c_3 是常参数, 其延拓系数为

$$\hat{\varphi}_{ij} = (-\frac{2}{5} - i - \frac{j}{5})c_3 u_{ij}, \ i+j \geqslant 1. \tag{22}$$

将 $\varphi = -\frac{2}{5}c_3 u$ 代入 (20) 式计算得

$$c_3 = \tau_t.$$

再由 (22) 式可得递推公式

$$\begin{aligned} &\hat{\varPhi} = \iota(\hat{\varphi}) = -\frac{2}{5}\alpha_T, \\ &\hat{\varPhi}_{10} = \iota(\hat{\varphi}_{10}) = -\frac{7}{5}\alpha_T I_{10}, \\ &\hat{\varPhi}_{01} = \iota(\hat{\varphi}_{01}) = -\frac{3}{5}\alpha_T I_{01}, \\ &\hat{\varPhi}_{ij} = \iota(\hat{\varphi}_{ij}) = -\frac{2+5i+j}{5}\alpha_T I_{ij}, \\ &i+j \geqslant 1. \end{aligned} \tag{23}$$

再根据定理4, 得到如下的递推公式:

$$\begin{aligned} &0 = d_{\mathrm{H}}\ H^1 = \omega^1 + \alpha, \\ &0 = d_{\mathrm{H}}\ H^2 = \omega^2 + \beta, \\ &0 = d_{\mathrm{H}}I_{00} = I_{10}\omega^1 + I_{01}\omega^2 - \frac{2}{5}\alpha_T, \\ &d_{\mathrm{H}}I_{10} = I_{20}\omega^1 + I_{11}\omega^2 - \frac{7}{5}\alpha_T I_{10}, \\ &d_{\mathrm{H}}I_{01} = I_{11}\omega^1 + I_{02}\omega^2 - \frac{3}{5}\alpha_T I_{01}, \\ &d_{\mathrm{H}}I_{ij} = I_{i+1,j}\omega^1 + I_{i,j+1}\omega^2 - \frac{2+5i+j}{5}\alpha_T I_{ij}, \\ &i+j \geqslant 1. \end{aligned} \tag{24}$$

由 (24) 式解得

$$\alpha = -\omega^1,$$

$$\beta = -\omega^2,$$
$$\alpha_T = \frac{5}{2}(I_{10}\omega^1 + I_{01}\omega^2). \tag{25}$$

将(25)式代入(24)式, 再利用定理4, 使定理4的每一个等式两边关于ω^1 和ω^2的系数相等, 就得到了微分不变量的递推关系式

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 I_{10} &= I_{20} - \frac{7}{2}(I_{10})^2,\\
\mathcal{D}_2 I_{10} &= I_{11} - \frac{7}{2}I_{10}I_{01},\\
\mathcal{D}_1 I_{01} &= I_{11} - \frac{3}{2}I_{10}I_{01},\\
\mathcal{D}_2 I_{01} &= I_{02} - \frac{3}{2}(I_{01})^2,\\
\mathcal{D}_1 I_{ij} &= I_{i+1,j} - \frac{2+5i+j}{2}I_{ij}I_{10},\\
\mathcal{D}_2 I_{ij} &= I_{i,j+1} - \frac{2+5i+j}{2}I_{ij}I_{01},\\
& i+j \geqslant 1,
\end{aligned} \tag{26}$$

这样, 由上式知I_{10}和I_{01}为(1)的一组微分不变量基.

利用文献[22]中的Gröbner基算法, 就可由(18)式和(26)式推导出(1)式的不变量代数的基本关系

$$\mathcal{D}_1 I_{01} - \mathcal{D}_2 I_{10} - 2I_{10}I_{01} = 0. \tag{27}$$

4 耦合KdV-MKdV方程的微分不变量

方程(2)的全空间$M = \mathbb{R}^4$的坐标为(t, x, u, v), 对应的无穷小确定方程为

$$\begin{aligned}
\varphi_t &= \varphi_x = \varphi_v = \tau_x = \tau_u = \tau_v = \tau_{tt}\\
&= \xi_t = \xi_u = \xi_v = 0,\\
\varphi_u &= \frac{\varphi}{u}, \xi_x = \frac{1}{3}\tau_t,\\
\psi &= -\frac{2}{3}\frac{(a+v)\left(\frac{3}{2}\varphi + u\tau_t\right)}{u},
\end{aligned} \tag{28}$$

由(28)式求得一组无穷小生成元的基

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_1 &= \partial t,\\
\boldsymbol{v}_2 &= \partial x,\\
\boldsymbol{v}_3 &= u\partial u - (v+a)\partial v,\\
\boldsymbol{v}_4 &= t\partial t + \frac{1}{3}x\partial x - \frac{2}{3}(a+v)\partial v,
\end{aligned} \tag{29}$$

则对应的李伪群为

$$\begin{aligned}
&(T, X, U, V)\\
&= \exp(\lambda_4\boldsymbol{v}_4)\circ\exp(\lambda_3\boldsymbol{v}_3)\circ\exp(\lambda_2\boldsymbol{v}_2)\circ\exp(\lambda_1\boldsymbol{v}_1)\\
&= \big(\mathrm{e}^{\lambda_4}(\lambda_1+t), \mathrm{e}^{1/3\lambda_4}(\lambda_2+x), u\,\mathrm{e}^{\lambda_3}, v\,\mathrm{e}^{-\lambda_3-2/3\lambda_4}\\
&\quad + a\,\mathrm{e}^{-\lambda_3-2/3\lambda_4} - a\big).
\end{aligned} \tag{30}$$

根据(5)式可得(2)式的水平余坐标架

$$\begin{aligned}
d_{\mathrm{H}}T &= (T_t + T_u u_t + T_v v_t)dt\\
&\quad + (T_x + T_u u_x + T_v v_x)dx\\
&= \mathrm{e}^{\lambda_4}dt,\\
d_{\mathrm{H}}X &= (X_t + X_u u_t + X_v v_t)dt\\
&\quad + (X_x + X_u u_x + X_v v_x)dx\\
&= \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\lambda_4}dx
\end{aligned} \tag{31}$$

和对偶全微分算子

$$D_T = \mathrm{e}^{-\lambda_4}D_t,\ \ D_X = \mathrm{e}^{-\frac{1}{3}\lambda_4}D_x. \tag{32}$$

将(32)式连续的作用在

$$\begin{aligned}
U &= u\,\mathrm{e}^{\lambda_3},\\
V &= v\,\mathrm{e}^{-\lambda_3-\frac{2}{3}\lambda_4} + a\,\mathrm{e}^{-\lambda_3-\frac{2}{3}\lambda_4} - a
\end{aligned}$$

上, 得到延拓的伪群坐标

$$\begin{aligned}
T &= \mathrm{e}^{\lambda_4}(\lambda_1+t),\\
X &= \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\lambda_4}(\lambda_2+x),\\
U &= \mathrm{e}^{\lambda_3}u,\\
V &= v\,\mathrm{e}^{-\lambda_3-\frac{2}{3}\lambda_4} + a\,\mathrm{e}^{-\lambda_3-\frac{2}{3}\lambda_4} - a,\\
U_T &= \mathrm{e}^{\lambda_3-\lambda_4}u_t,\\
U_X &= \mathrm{e}^{\lambda_3-\frac{1}{3}\lambda_4}u_x,\\
U_{TT} &= \mathrm{e}^{\lambda_3-2\lambda_4}u_{tt},\\
U_{XX} &= \mathrm{e}^{\lambda_3-\frac{2}{3}\lambda_4}u_{xx},\\
U_{TX} &= \mathrm{e}^{\lambda_3-\frac{4}{3}\lambda_4}u_{tx},\\
V_T &= \mathrm{e}^{-\lambda_3-\frac{5}{3}\lambda_4}v_t,\\
V_X &= \mathrm{e}^{-\lambda_3-\lambda_4}v_x,\\
V_{TT} &= \mathrm{e}^{-\lambda_3-\frac{8}{3}\lambda_4}v_{tt},\\
V_{XX} &= \mathrm{e}^{-\lambda_3-\frac{4}{3}\lambda_4}v_{xx},\\
V_{TX} &= \mathrm{e}^{-\lambda_3-2\lambda_4}v_{tx},\\
&\cdots
\end{aligned} \tag{33}$$

构造耦合KdV-MKdV方程的活动标架: 令

$$T = 0,\ X = 0,\ U = 1,\ V = 0, \tag{34}$$

解得

$$\begin{aligned}\lambda_1&=-t,\\ \lambda_2&=-x,\\ \lambda_3&=-\ln u,\\ \lambda_4&=-\frac{3}{2}\ln\frac{a}{u(v+a)},\end{aligned}\tag{35}$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 为伪群参数. 将 (35) 式代入 (33) 式中可得正规化的微分不变量

$$\begin{aligned}H^1&=\iota(t)=0,\\ H^2&=\iota(x)=0,\\ I^1_{00}&=\iota(u)=1,\\ I^2_{00}&=\iota(v)=0,\\ I^1_{10}&=\iota(u_t)=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{u^{\frac{5}{2}}(v+a)^{\frac{3}{2}}}u_t,\\ I^1_{01}&=\iota(u_x)=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}(v+a)^{\frac{1}{2}}}u_x,\\ I^1_{20}&=\iota(u_{tt})=\frac{a^3}{u^4(v+a)^3}u_{tt},\\ I^1_{02}&=\iota(u_{xx})=\frac{a}{u^2(v+a)}u_{xx},\\ I^1_{11}&=\iota(u_{tx})=\frac{a^2}{u^3(v+a)^2}u_{tx},\\ I^2_{10}&=\iota(v_t)=\frac{a^{\frac{5}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}(v+a)^{\frac{5}{2}}}v_t,\\ I^2_{01}&=\iota(v_x)=\frac{a^{\frac{3}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}(v+a)^{\frac{3}{2}}}v_x,\\ I^2_{20}&=\iota(v_{tt})=\frac{a^4}{u^3(v+a)^4}v_{tt},\\ I^2_{02}&=\iota(v_{xx})=\frac{a^2}{u(v+a)^2}v_{xx},\\ I^2_{11}&=\iota(v_{tx})=\frac{a^3}{u^2(v+a)^3}v_{tx}.\end{aligned}\tag{36}$$

再将 (35) 式代入到 (32) 式, 得到耦合 KdV-MKdV 方程的微分不变算子

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_1&=\frac{a^{3/2}}{u^{3/2}(v+a)^{\frac{3}{2}}}D_t,\\ \mathcal{D}_2&=\frac{a^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{1}{2}}(v+a)^{\frac{1}{2}}}D_x,\end{aligned}\tag{37}$$

由 (37) 可得不变微分算子的交换关系为

$$\begin{aligned}&[\mathcal{D}_1,\mathcal{D}_2]\\ =&\frac{3}{2}\left(I^1_{01}+\frac{1}{a}I^2_{01}\right)\mathcal{D}_1-\frac{1}{2}\left(I^1_{10}+\frac{1}{a}I^2_{10}\right)\mathcal{D}_2.\end{aligned}\tag{38}$$

$\alpha_{ij}=\iota(\tau_{ij}), \beta_{ij}=\iota(\xi_{ij}), \varPhi_{ij}=\iota(\varphi_{ij}), \varPsi_{ij}=\iota(\psi_{ij})$ 表示不变量化的 Maurer-Cautan 形式. 由定理 2 和定理 3 得不变量化的 Maurer-Cautan 形式所满足的确定方程

$$\begin{aligned}\varPhi_T=&\varPhi_X=\varPhi_V=\alpha_X=\alpha_U=\alpha_V=\alpha_{TT}\\ =&\beta_T=\beta_U=\beta_V=0,\\ \varPhi_U=&\varPhi,\ \beta_X=\frac{1}{3}\alpha_T,\\ \varPsi=&-\frac{2}{3}a\left(\frac{3}{2}\varPhi+\alpha_T\right),\ \cdots.\end{aligned}\tag{39}$$

根据 (29), 设方程 (2) 的无穷小生成元的一般形式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}=&(c_1+c_4t)\partial t+\left(c_2+\frac{c_4}{3}x\right)\partial x+c_3u\partial u\\ &-\left(c_3+\frac{2}{3}c_4\right)(v+a)\partial v,\end{aligned}\tag{40}$$

c_1, c_2, c_3, c_4 是常参数, 其延拓系数为

$$\begin{aligned}\hat{\phi}_{ij}&=\left(c_3-ic_4-\frac{j}{3}c_4\right)u_{ij},\\ \hat{\psi}_{ij}&=-\left(c_3+\frac{2}{3}c_4+ic_4+\frac{j}{3}c_4\right)v_{ij},\\ &i+j\geqslant 1,\end{aligned}\tag{41}$$

将 $\varphi=c_3u,\ \psi=-\left(c_3+\frac{2}{3}c_4\right)(v+a)$ 代入 (39) 得

$$c_3=\varphi,\quad c_4=\tau_t.$$

再由 (41) 式可得下面的递推公式

$$\begin{aligned}\hat{\varPhi}_{ij}=&\iota(\hat{\varphi}_{ij})=\left(\varPhi-\left(i+\frac{j}{3}\right)\alpha_T\right)I^1_{ij},\\ \hat{\varPsi}_{ij}=&\iota(\hat{\psi}_{ij})=-\left(\varPhi+\left(\frac{2}{3}+i+\frac{j}{3}\right)\alpha_T\right)I^2_{ij},\\ &i+j\geqslant 1,\end{aligned}\tag{42}$$

再根据定理 4 得

$$\begin{aligned}&0=d_{\rm H}H^1=\omega^1+\alpha,\\ &0=d_{\rm H}H^2=\omega^2+\beta,\\ &0=d_{\rm H}I^1_{00}=I^1_{10}\omega^1+I^1_{01}\omega^2+\varPhi,\\ &0=d_{\rm H}I^2_{00}=I^2_{10}\omega^1+I^2_{01}\omega^2-\frac{2}{3}a(\frac{3}{2}\varPhi+\alpha_T),\\ &d_{\rm H}I^1_{ij}=I^1_{i+1,j}\omega^1+I^1_{i,j+1}\omega^2+(\varPhi-(i+\frac{j}{3})\alpha_T)I^1_{ij},\\ &d_{\rm H}I^2_{ij}=I^2_{i+1,j}\omega^1+I^2_{i,j+1}\omega^2\\ &\qquad-(\varPhi+(\frac{2}{3}+i+\frac{j}{3})\alpha_T)I^2_{ij},\end{aligned}\tag{43}$$

其中 $i+j\geqslant 1$. 由上式解得

$$\alpha=-\omega^1,$$

$$
\begin{aligned}
\beta &= -\omega^2,\\
\Phi &= -I^1_{10}\omega^1 - I^1_{01}\omega^2,\\
\alpha_T &= \frac{3}{2}\bigg(\left(\frac{1}{a}I^2_{10}+I^1_{10}\right)\omega^1\\
&\quad+\left(\frac{1}{a}I^2_{01}+I^1_{01}\right)\omega^2\bigg).
\end{aligned}
\tag{44}
$$

将(44)式代入到(43)式中, 再根据定理4, 使等式两边关于ω^1 和ω^2的系数相等, 得到微分不变量的递推公式

$$
\begin{aligned}
\mathcal{D}_1 I^1_{10} &= I^1_{20} - \frac{5}{2}(I^1_{10})^2 - \frac{3}{2a}I^2_{10}I^1_{10},\\
\mathcal{D}_2 I^1_{10} &= I^1_{11} - \frac{5}{2}I^1_{01}I^1_{10} - \frac{3}{2a}I^2_{01}I^1_{10},\\
\mathcal{D}_1 I^1_{01} &= I^1_{11} - \frac{3}{2}I^1_{10}I^1_{01} - \frac{1}{2a}I^2_{10}I^1_{01},\\
\mathcal{D}_2 I^1_{01} &= I^1_{02} - \frac{3}{2}(I^1_{01})^2 - \frac{1}{2a}I^2_{01}I^1_{01},\\
\mathcal{D}_1 I^1_{11} &= I^1_{21} - 3I^1_{10}I^1_{11} - \frac{2}{a}I^2_{10}I^1_{11},\\
\mathcal{D}_2 I^1_{11} &= I^1_{12} - 3I^1_{01}I^1_{11} - \frac{2}{a}I^2_{01}I^1_{11},\\
\mathcal{D}_1 I^1_{20} &= I^1_{30} - 4I^1_{10}I^1_{20} - \frac{3}{a}I^2_{10}I^1_{20},\\
\mathcal{D}_2 I^1_{20} &= I^1_{21} - 4I^1_{01}I^1_{20} - \frac{3}{a}I^2_{01}I^1_{20},\\
\mathcal{D}_1 I^1_{02} &= I^1_{12} - 2I^1_{10}I^1_{02} - \frac{1}{a}I^2_{10}I^1_{02},\\
\mathcal{D}_2 I^1_{02} &= I^1_{03} - 2I^1_{01}I^1_{02} - \frac{1}{a}I^2_{01}I^1_{02},\\
\mathcal{D}_1 I^2_{10} &= I^2_{20} - \frac{5}{2a}(I^2_{10})^2 - \frac{3}{2}I^1_{10}I^2_{10},\\
\mathcal{D}_2 I^2_{10} &= I^2_{11} - \frac{5}{2a}I^2_{01}I^2_{10} - \frac{3}{2}I^1_{01}I^2_{10},\\
\mathcal{D}_1 I^2_{01} &= I^2_{11} - \frac{3}{2a}I^2_{10}I^2_{01} - \frac{1}{2}I^1_{10}I^2_{01},\\
\mathcal{D}_2 I^2_{01} &= I^2_{02} - \frac{3}{2a}(I^2_{01})^2 - \frac{1}{2}I^1_{01}I^2_{01},\\
\mathcal{D}_1 I^2_{11} &= I^2_{21} - \frac{3}{a}I^2_{10}I^2_{11} - 2I^2_{11},\\
\mathcal{D}_2 I^2_{11} &= I^2_{12} - \frac{3}{a}I^2_{01}I^2_{11} - 2I^2_{11},\\
\mathcal{D}_1 I^2_{20} &= I^2_{30} - \frac{4}{a}I^2_{10}I^2_{20} - 3I^1_{10}I^2_{20},\\
\mathcal{D}_2 I^2_{20} &= I^2_{21} - \frac{4}{a}I^2_{01}I^2_{20} - 3I^1_{01}I^2_{20},\\
\mathcal{D}_1 I^2_{02} &= I^2_{12} - \frac{2}{a}I^2_{10}I^2_{02} - I^1_{10}I^2_{02},\\
\mathcal{D}_2 I^2_{02} &= I^2_{03} - \frac{2}{a}I^2_{01}I^2_{02} - I^2_{02},\\
\mathcal{D}_1 I^1_{ij} &= I^1_{i+1,j} - \frac{3i+j+2}{2}I^1_{10}I^1_{ij} - \frac{3i+j}{2a}I^2_{10}I^1_{ij},\\
\mathcal{D}_2 I^1_{ij} &= I^1_{i,j+1} - \frac{3i+j+2}{2}I^1_{01}I^1_{ij} - \frac{3i+j}{2a}I^2_{01}I^1_{ij},\\
\mathcal{D}_1 I^2_{ij} &= I^2_{i+1,j} - \frac{3i+j+2}{2a}I^2_{10}I^2_{ij} - \frac{3i+j}{2}I^1_{10}I^2_{ij},\\
\mathcal{D}_2 I^2_{ij} &= I^2_{i,j+1} - \frac{3i+j+2}{2a}I^2_{01}I^2_{ij}\\
&\quad - \frac{3i+j}{2}I^1_{01}I^2_{ij},
\end{aligned}
\tag{45}
$$

其中$i+j \geqslant 1$. 由上式知耦合KdV-MKdV方程的微分不变量基为I^1_{10}, I^1_{01}, I^2_{10}, I^2_{01}.

利用参考文献[22]中的Gröbner算法, 由(37)式和(45)式可得到耦合KdV-MKdV方程的不变量代数的基本关系

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{D}_2 I^1_{10} - \mathcal{D}_1 I^1_{01} + I^1_{10}I^1_{01} + \frac{3}{2a}I^1_{10}I^2_{01}\\
&- \frac{1}{2a}I^2_{10}I^1_{01} = 0,\\
&\mathcal{D}_2 I^2_{10} - \mathcal{D}_1 I^2_{01} + \frac{1}{a}I^2_{10}I^2_{01} - \frac{1}{2}I^1_{10}I^2_{01}\\
&+ \frac{3}{2}I^2_{10}I^1_{01} = 0.
\end{aligned}
\tag{46}
$$

5 结　论

这篇论文用Olver教授的等价活动标架方法, 通过方程的李伪群来构造原方程的活动标架, 计算了CDG和耦合KdV-MKdV方程的微分不变量和微分不变量代数关系. 文章的结论可以用在很多关于不变量的问题中. 下一步的工作是利用文章中的结果来进一步求解方程的不变解和计算一些具有无穷维无穷小生成元的偏微分方程的微分不变量.

参考文献

[1] Lou Z M 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 6764 (in Chinese)[楼智美 2010 物理学报 **59** 6764]

[2] Mei F X, Cai J L 2008 *Acta Phys. Sin.* **57** 4659 (in Chinese) [梅凤翔, 蔡建乐 2008 物理学报 **57** 4659]

[3] Li Hongguo, Huang Kefu 2013 *Chin. Phy. Lett.* **30** 027101

[4] Fang Jianhui, Ding Ning, Chen Xiangxia 2008 *Chin. Phys. B* **17** 1967

[5] Ding Ning, Fang Jianhui 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 7440 (in Chinese) [丁宁, 方建会 2009 物理学报 **58** 7440]

[6] Fels M, Olver P J 1999 *Acta Appl. Math.* **55** 127

[7] Cheh J, Olver P J, Pohjanpelto J 2005 *J. Math. Phys.* **46** 023504

[8] Olver P J, Pohjapelto J 2007 *Arkiv. Mat.* **50** 165

[9] Olver P J, Pohjapelto J 2008 *Canadian J. Math.* **60** 1336

[10] Olver P J 2011 *Comtemp. Math.* **549** 95

[11] Hubert E, Kogan I A 2007 *Found. Comput. Math.* **455**

[12] Hubert E 2009 *Journal of Symbolic Computation* **44** 382

[13] Li W, Li W T, Wang F, Zhang H Q 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Number. Sinulat* **18** 888

[14] Gou M Y, Gao J 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 6686 (in Chinese) [郭美玉, 高洁 2009 物理学报 **58** 6686]

[15] Sawada K, T Kotera 1974 *Prog. Theor. Phys.* **51** 1355

[16] Caudrey P J, Dodd R K, J D Gibbon 1976 *Proc. R. Soc. Lond. A* **1976** 351

[17] Dogan Kaya, El-Sayed S M 2003 *Phys. Lett.* **328** 274

[18] Yang L, Zhang F, Wang Y H 2002 *Chaos, Solitons and Fractals* **13** 337

[19] Biswas A, Ebadi G, Triki H, Yildirim A, Yousefzadeh N 2013 *Results in Math. C* **3** 687

[20] Xia T C, Yue C 2013 *5th CM 2013* Changchun, China, Augest 18

[21] Olver P J 1995 *Applications of Lie Groups to Differential Equations* (Cambridge: Cambridge University Press)

[22] Chen J, POlver J, Phojanpelto J 2008 *Found. Comput. Math.* **8** 501

Differential invariants for CDG equation and coupled KDV-MKDV equations*

Ding Qi Hao Ai-Jing†

(*School of Mathematical Sciences.Dalian University of Technology, Dalian 116024, China*)

(Received 21 November 2013; revised manuscript received 25 February 2014)

Abstract

In this paper, the differential invariants of Lie symmetry groups of the CDG equation and the coupled KdV-MKdV equations are obtained. Their syzygies and recurrence relations are classified, which are based on the algorithms of equivariant moving frames.

Keywords: differential invariants, equivariant moving frames, CDG equation, coupled KdV-MKdV equations

PACS: 05.45.Yv, 02.30.Ik, 02.30.Jr **DOI:** 10.7498/aps.63.110503

* Project supported by the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. DUT13LK09), the Scientific Research Fund of Liaoning Provincial Education Department, China (Grant No. L2012009), and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 91230103).

† Corresponding author. E-mail: 913509242@qq.com