

随机共振动力学机理及其微弱信号检测方法的研究*

范剑¹⁾³⁾ 赵文礼^{2)†} 张明路¹⁾ 檀润华¹⁾ 王万强²⁾

1)(河北工业大学机械工程学院, 天津 300401)

2)(杭州电子科技大学机械工程学院, 杭州 310018)

3)(台州学院机电工程系, 台州 318000)

(2014年1月11日收到; 2014年3月14日收到修改稿)

目前已有的随机共振理论对于随机共振系统的非线性动力学行为及其发生机理阐释得不够具体和明晰, 本文从分析一阶非线性 Duffing 方程的动力学特性入手, 推导得到非自治 Duffing 方程的吸引子曲线, 基于该曲线和输入信号之间的映射关系分析了系统输出的动力学行为, 并由此进一步定性分析了随机共振现象发生的动力学机理; 研究表明: 作用于系统的内禀信号能推动系统动点沿吸引子曲线移动, 它对系统的输出起内在的和本质的作用, 而噪声在一定条件下能够诱发系统产生跃迁行为; 文章最后利用该动力学机理对已有的调参数和调阻尼等基于随机共振的微弱信号检测方法作了统一和延拓.

关键词: 随机共振, 微弱信号检测, 吸引子曲线

PACS: 05.10.Gg, 05.10.-a

DOI: 10.7498/aps.63.110506

1 引言

1981年 Benzi 等^[1]人首次发现并研究了随机共振(SR)现象, 他们建立了随机共振数学模型并采用过阻尼粒子在双势阱中的运动来说明随机共振发生的机理. 该现象一经提出便引起了学者们广泛的研究兴趣, 在随后的研究中也形成了很多随机共振理论, 其中较为经典的有绝热近似理论^[2,3]、线性响应理论^[4-7]、驻留时间分布理论^[8-10]以及本征值理论^[11-13]. 值得注意的是, 上述理论都是直接切入随机共振系统从不同角度和侧重点而进行的研究, 随机共振现象在上述各自理论体系的假设条件下都得到了较好的解释, 不过这些理论对于随机共振系统的非线性动力学行为过程阐释得不够具体和明晰; 而且由于该系统的非线性及其非自治性, 目前还无法获得其解的精确表达式, 这也导致我们难以从数学的角度分析该系统的动力学行为.

与此同时, 近年来在基于随机共振的微弱信号检测方面也已发展了诸如非周期随机共振^[14-17]、参数调节随机共振^[18-22]、变尺度随机共振^[23]以及级联随机共振^[24]等方法, 因此我们也有必要进一步研究随机共振的动力学机理, 以便将这些理论进行有效的统一和延拓. 众所周知, 随机共振系统是基于非自治 Duffing 方程加入噪声而来的, 本文将另辟蹊径, 先分析该 Duffing 方程本身的一些非线性动力学特性, 并由此提出非自治 Duffing 方程的吸引子曲线, 基于该曲线和输入信号之间的映射关系分析系统输出的动力学行为, 然后在此基础上进一步分析随机共振发生的动力学机理, 并基于吸引子曲线分析动点速度对随机共振跃迁过程的影响, 最后在该机理分析的基础上讨论调参数和调阻尼的随机共振微弱信号检测方法. 研究随机共振的非线性动力学机理, 有助于进一步厘清系统参数与输出响应之间的关系, 对于利用随机共振方法检测微

* 国家自然科学基金(批准号: 50875070)和浙江省教育厅科研项目(批准号: Y201326915)资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: zhaowlcn@163.com

弱信号的工程应用具有重要的实际意义.

2 一阶非线性 Duffing 方程的吸引子曲线

考虑到随机共振系统的数学模型是在一阶非线性 Duffing 方程的基础上添加噪声而得的, 所以我们先从分析一阶非线性 Duffing 方程入手.

2.1 一阶自治非线性 Duffing 方程的吸引子

取一阶自治非线性 Duffing 方程

$$k\dot{x} = ax - bx^3 + c, \quad (1)$$

式中, a, b 为非线性项系数; c 为某一选定的常数; k 为阻尼系数, 虽然该系数可以被其他参数作约化处理, 但它也可以作为一个独立的参数用于对方程进行调整, 为了便于后续讨论, 此处仍保留该参数.

先求出 (1) 式的平衡点. 令 $\dot{x} = 0$, 即

$$ax - bx^3 + c = 0.$$

下面以图解法来求解. 将上式变形为方程组

$$y_1 = ax - bx^3, \quad y_2 = -c.$$

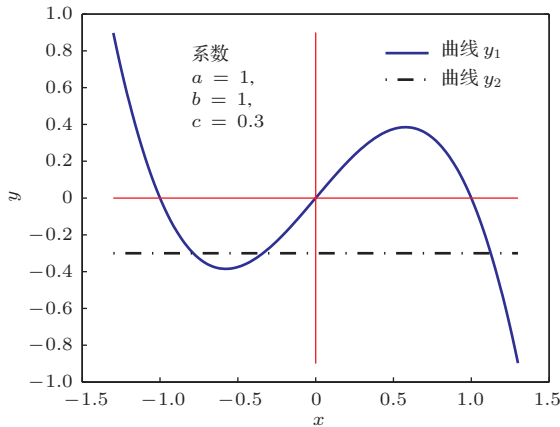


图 1 (网刊彩色) 求系统平衡点示意图

曲线 y_1 和 y_2 的交点便是 (1) 式的平衡点. 在讨论随机共振模型的参数时, 通常取 (1) 式中的参数 a, b 都大于 0, 比如取 $a = 1, b = 1$, 可获得曲线 y_1 如图 1 中蓝色曲线所示; 选取常数 c 的值可作水平线 y_2 , 于是两曲线交点的横坐标值即为 (1) 式平衡点的解. 由图可以获知: 当 c 取不同值时, 图中两曲线的交点位置和个数也不同. 根据非线性动力学理论还可分析得到这些平衡点的稳定性: 如果 (1)

式有三个平衡点, 则图中居于两端的两个点为稳定点 (以下称之为吸引子), 内侧的一个点为不稳定点, 而且该不稳定点直接划分了其余两个吸引子的吸引域; 如果系统仅有一个平衡点, 则该点必然为吸引子, 且其吸引域是全局的.

2.2 一阶非线性非自治 Duffing 方程的吸引子曲线

接下来, 我们在 (1) 式的基础上将常数 c 用含时间 t 的变量表示, 比如取某激励信号 $A \cos(\omega t)$, 即得到非线性非自治的 Duffing 方程

$$k\dot{x} = ax - bx^3 + A \cos(\omega t), \quad (2)$$

上式中, 假定激励信号 $A \cos(\omega t)$ 的周期足够长, 我们把该激励的变化过程做无限的离散化, 于是可得到无限个离散的、形如 (1) 式的、不同 c 值的定常系统. 又因为这些系统都是收敛的, 且都收敛到各自的吸引子位置. 将每个定常系统的吸引子按激励变化过程的顺序连起来, 可得到一条曲线, 我们称之为吸引子曲线. 经分析可得该吸引子曲线方程为

$$y = -ax + bx^3, \quad (3)$$

它是一个奇函数. 对式中参数 a, b 取值后可绘制该吸引子曲线如图 2 所示. 该曲线上各点的纵坐标表示作用于定常系统的激励值 c_i , 横坐标表示对应于该激励作用下的系统平衡点位置. 图中两侧的实线曲线为各吸引子的连线, 中间的点画线曲线为各不稳定点的连线, 两侧实线曲线是被不稳定曲线隔断开的.

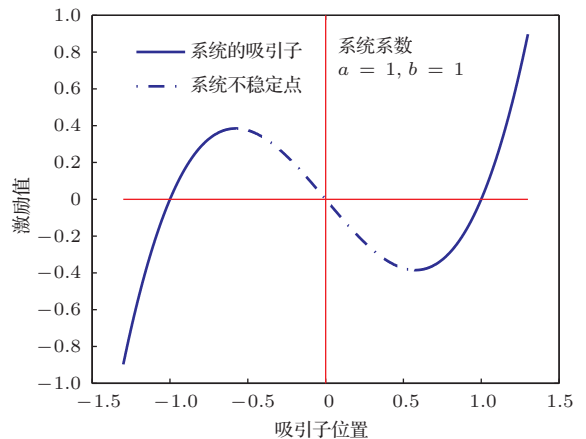


图 2 系统吸引子曲线

取以 $a = 1, b = 1$ 的参数构建 (1) 式的系统, 并设作用于该系统的当前激励值为 0.2, 由图 3 可知

它有两个吸引子, 假设当前动点处于图中C点吸引子处的位置. 这时我们将作用于系统的激励缓慢增加至0.7, 由图3可知系统对应于该激励的吸引子在D点; 开始时动点随激励值增加先沿CB段曲线移动, 当到达B点后, 由于激励值还需继续增大, 动点势必要脱离B点, 而此后的系统只有一个吸引子, 且居于右侧的吸引子曲线上, 故动点要迅速地水平跃迁到右侧吸引子曲线的B'点处, 然后继续随激励值增加沿B'D曲线移至D点. 同理, 动点也可在一定的激励变化条件下从吸引子曲线的右侧跃迁至左侧. 这是非线性系统非常有意义的一种现象, 而且我们认为随机共振的跃迁现象与它有本质的联系.

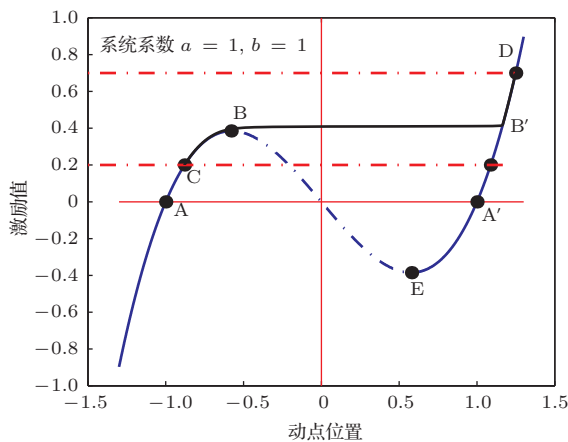


图3 系统动点沿吸引子曲线移动的过程

为了便于后续描述, 我们称图3中B, E点的纵坐标值为跃迁阈值, 用 δ_{yq} 表示; 定义激励为零时两吸引子(A, A'点)之间距离为跃迁宽度, 用 l_{yq} 表示; 点A处的斜率用 K_A 表示. 可算得图中特征点的相关信息如下:

$$\delta_{yq} = \pm \sqrt{\frac{4a^3}{27b}}, \quad l_{yq} = 2\sqrt{\frac{a}{b}}, \quad K_A = 2a. \quad (4)$$

上述关系表明: 一旦系统参数 a, b 选定, 那么系统的吸引子曲线也就确定了. 对于由(2)式构建的系统, 如果它存在两个吸引子, 我们称其为双稳态系统, 比如当 $A \cos(\omega t)$ 为时0的情况; 如果只有一个吸引子则为单稳态系统, 如当 $A \cos(\omega t)$ 的值处在两跃迁阈值区间之外时便属于这类系统. 进一步地, 如果加载于系统的激励随时间缓慢地在跃迁阈值区间内外连续变化, 这将导致系统在双稳态和单稳态之间发生突变, 从而使得系统在一定的条件下发生相变或跃迁等物理现象成为可能. 另一方

面, 如果 K_A 很小, 那么在A点处即使出现很小幅值激励的变化, 都能够获得在 x 轴上较大的输出增量, 我们称之为输出释放现象; 反之若斜率 K_A 值很大, 将发生输出饱和现象, 这些现象的性质在文献[25]中已有详细描述, 在此不做赘述.

3 从吸引子曲线图解周期激励作用下的输出响应

正是由于方程(2)的非线性及其非自治性, 目前还无法获得其解的精确表达式, 这也导致我们难以从数学的角度分析该系统的动力学行为. 在本节, 我们将基于吸引子曲线定性分析(2)式在周期激励作用下输出响应的动力学过程. 经过上节的分析, 我们在激励信号的周期足够长的前提下得到了吸引子曲线, 在本节的讨论中, 凡是谈到周期激励, 其周期都假定是足够长的. 下面将基于吸引子曲线图解周期激励作用下的系统输出响应.

取图2的参数构建系统, 先将一个激励幅值为 $A = 0.1$ (小于跃迁阈值)的正弦信号加载于该系统, 从中取一个周期的信号, 如图4所示, 然后在图3中取右平衡点A'位置附近的局部吸引子曲线, 如图4中的吸引子曲线(局部)所示.

当激励值为零时, 假定当前系统居于右平衡点 $x = 1$ 的位置, 即为吸引子曲线上的A'点; 然后激励从0开始增加, 沿激励信号曲线从A点向B点进发, 由吸引子曲线的对应关系, 动点从A'点开始, 随着激励增加, 沿着吸引子曲线斜向上去往B'点, 由此便可得到输出响应随时间的关系, 如输出信号曲线的A''至B''段; 随着激励逐渐下降, 即激励值从B点下降至C点, 根据图4中吸引子曲线的映射关系, 可以得到输出曲线中的B''至C''段; 其余时间的输出信号可用同样的方法获得. 完整的输入和输出过程如图5所示, 该输出信号是在右平衡点 $x = 1$ 附近作周期振荡, 且其振荡周期与激励周期一致, 但由于该段的吸引子曲线并非是一条严格的直线, 所以系统输出波形相对于原输入信号有一定程度的畸变.

当信号幅值取为 $A = 0.6$ (大于跃迁阈值)时, 用上述同样的映射方法, 把图6(b)的输入信号投射到吸引子曲线图6(a)上, 可以得到系统的输出信号如图6(c)所示.

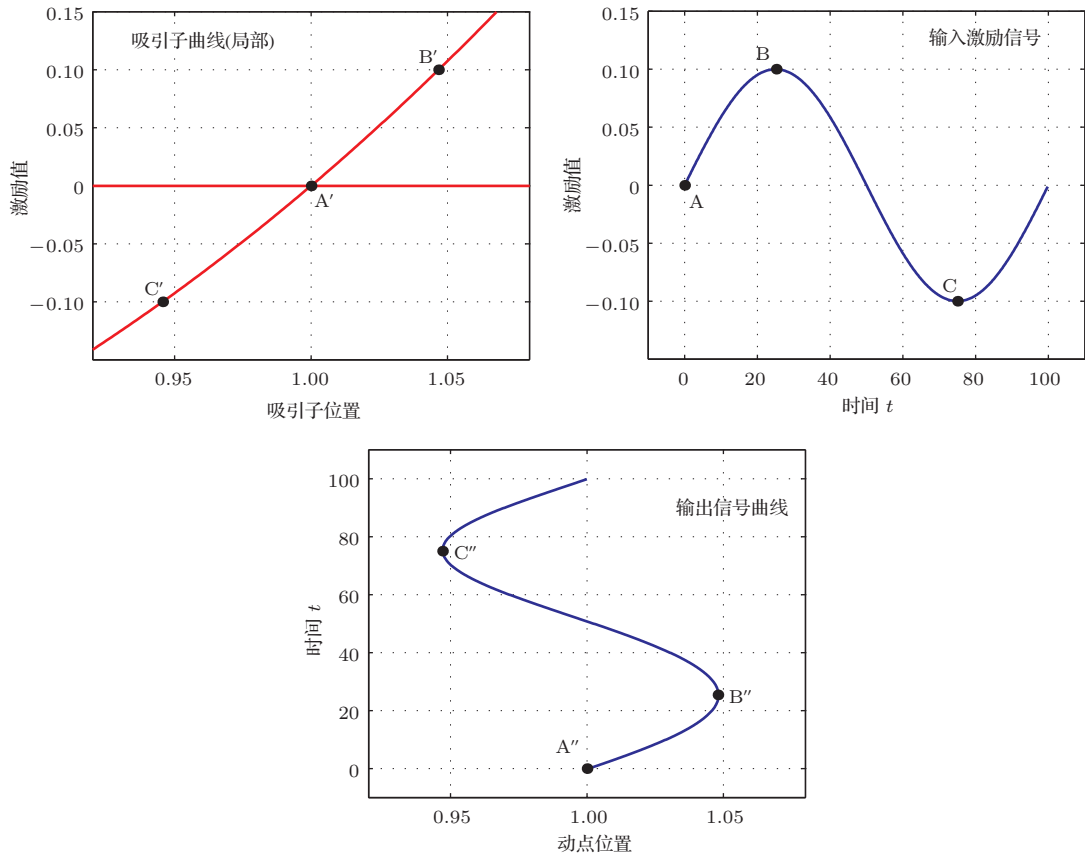


图4 系统输入、吸引子曲线、系统输出的映射关系图

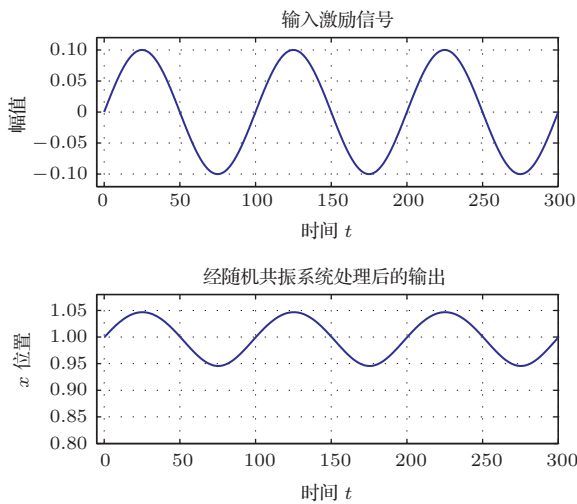


图5 系统输入、输出信号

我们也可以直接在图6(d)中分析上述映射过程. 该图中横坐标为系统的输出动点位置值, 纵坐标为激励值. 设动点的起始点在图中的(-1, 0)位置, 当激励信号从0开始增加, 它将沿吸引子曲线向斜向上移动, 直到激励等于吸引子曲线的跃迁阈

值点0.385, 这时随着激励继续增大, 系统由双稳态突变为单稳态形式, 其吸引子在原点的右侧, 故动点只能去往右侧以到达其吸引子位置, 在图中表现为 x 轴上方的一段近似水平的黑色实线; 然后动点在激励作用下沿右侧吸引子曲线继续移动(随激励信号增大至幅值, 然后逐渐减小); 同样地, 当信号激励值小于吸引子曲线的跃迁阈值-0.385时, 系统又从双稳态突变成单稳态形式, 且这时系统的吸引子在原点左侧, 故动点又水平地移向左侧, 然后沿左侧吸引子曲线移动. 系统动点随激励的变化如此循环往复地在左、右吸引子曲线之间做映射和跳跃, 轨线过程如图6(d)中的黑色实线所示. 我们把图6(d)所示的动点轨线称为输入输出关系曲线. 其完整的输入和输出波形如图7所示. 需要特别指出的是, 它尚无明确的数学表达形式, 虽然广大学者在进行随机共振的仿真和实验研究时早已发现了该输出曲线, 但他们对该曲线发生的动力学过程尚未有十分明晰的解释. 我们将输入信号基于吸引子曲线做映射分析, 得到了该输出信号, 其动力学机理也随之获得了定性的阐释.

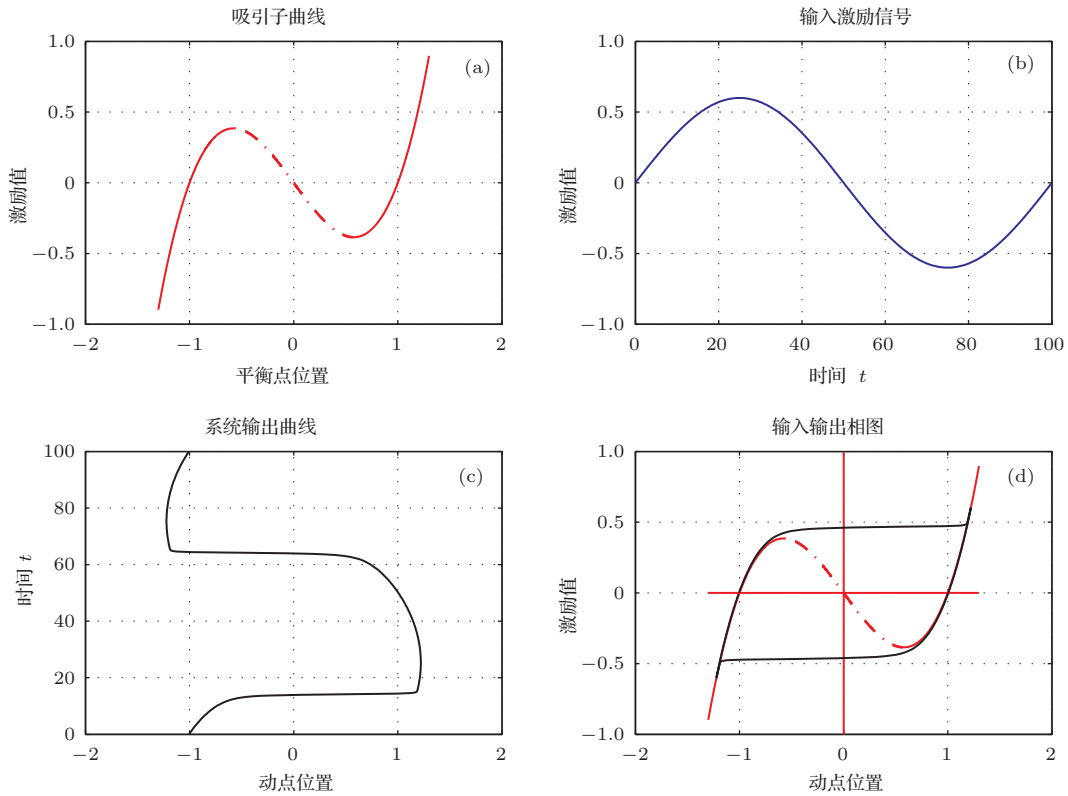


图6 系统输入、吸引子曲线、系统输出映射关系及输入输出关系曲线

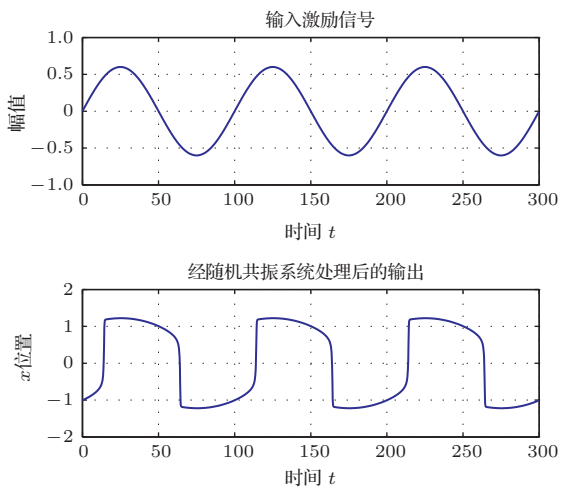


图7 系统输入、输出信号

4 基于吸引子曲线的随机共振动力学机理分析

在(2)式所示Duffing方程的右侧项中引入加性噪声, 本文以白噪声 $\Gamma(t)$ 为例, 得到随机共振系统的方程

$$k\dot{x} = ax - bx^3 + A \cos(\omega t) + \Gamma(t), \quad (5)$$

式中系数 k 的阻尼作用能减小噪声对于系统输出的干扰; 为了便于下文的阐述, 我们将(5)式中的激励信号 $A \cos(\omega t)$ 称为内禀信号。

仍以图2的参数构建系统, 首先将某一幅值小于跃迁阈值的正弦信号作为内禀信号输入该系统中, 由前述分析可知系统动点在该信号的推送作用下最远也不能超越吸引子曲线上的B点, 也就不能使系统发生跃迁, 其输入输出关系曲线和输出波形如图8(a), (b)中黑色曲线所示. 然后我们把一定强度的噪声加入其中, 使得作用于系统的激励偏离内禀信号并在其附近上下波动, 也就是说噪声的作用会使系统某些时刻的瞬时激励突然很大或者很小, 但由于其作用时间非常短, 加之系统阻尼的作用, 当内禀信号幅值较小时, 系统动点只能在该内禀信号作用的吸引子曲线段附近波动; 假设当前动点在图8(c)的左侧吸引子附近, 随着内禀信号逐渐增大, 它将振荡地、并总体地沿着吸引子曲线方向被逐渐推送至跃迁阈值点B附近, 这时噪声的作用将导致越来越多的系统瞬时激励值大于跃迁阈值, 在一定条件下便能驱动动点越过B点向右发生跃迁, 从而使得系统动点迅速地移至右侧的吸引子曲线; 接着内禀信号在右侧吸引子曲线上继续发挥作用, 虽然这时同样也有噪声的作用, 但由于当前的

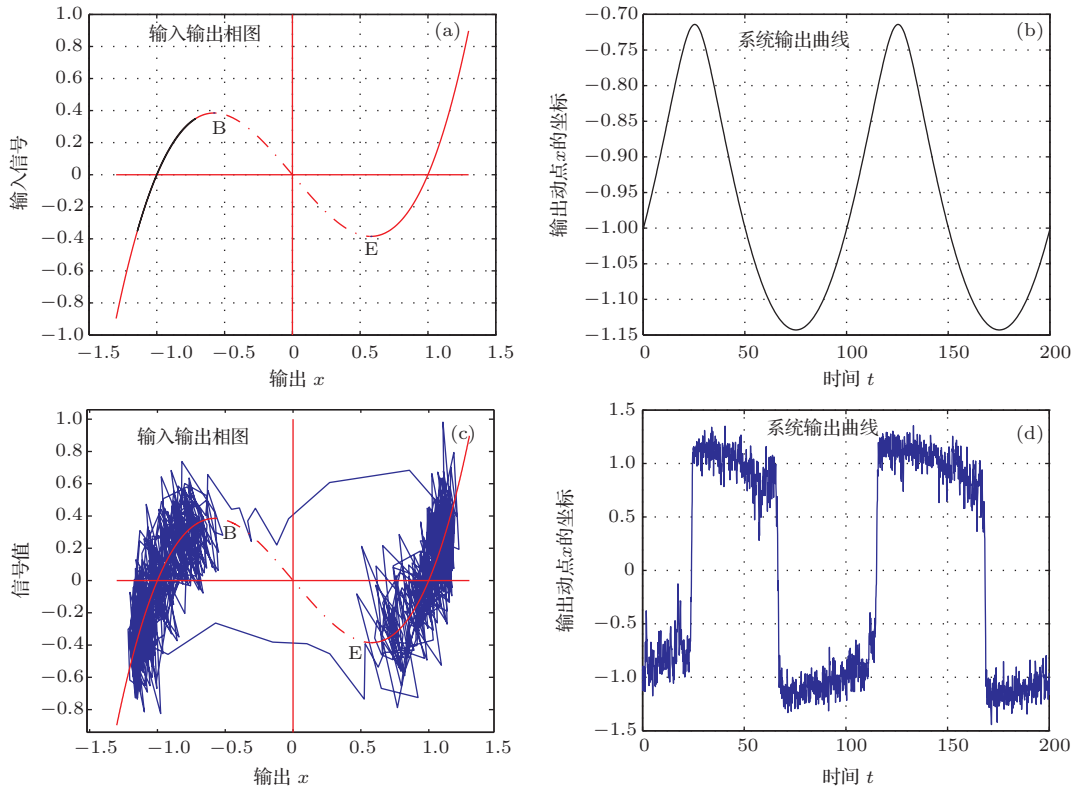


图8 (网刊彩色) 系统加入噪前后的输入输出关系曲线及其输出波形

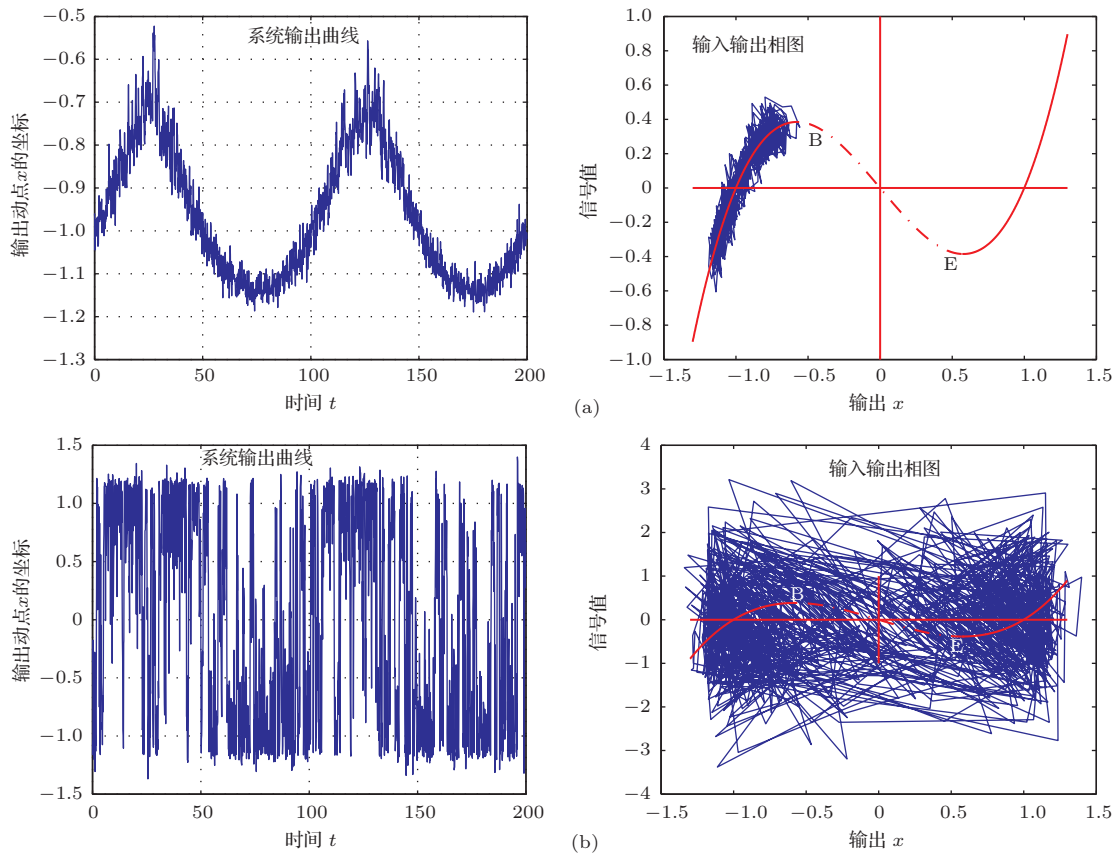


图9 (网刊彩色) 噪声过小及噪声过大时系统的输入输出关系曲线及其输出波形

系统动点离新的跃迁阈值点E仍比较远, 故在此处, 噪声尚不足以像刚才的瞬间那样能驱动系统发生跃迁, 所以只能在当前点附近做小幅波动; 只有当内禀信号逐渐减小到零, 然后又朝着负的方向变化, 其绝对值逐渐增大, 才能推动系统动点总体地沿吸引子曲线下行移动而到达E点附近, 这时噪声的作用便能使得越来越多的系统瞬时激励值向下超出跃迁阈值点E, 从而促使系统的输出能越过E点发生向左的跃迁. 图8(c)较好地展示了这一过程, 对应的输出波形如图8(d)所示. 从图中可以发现, 随机共振系统输出的周期与内禀信号的周期是完全一致的, 其原因就在于内禀信号对系统的输出起内在的和本质的推动作用, 而噪声的作用在一定条件下能够诱发系统的跃迁行为.

另一方面, 在上述情况中, 若噪声强度过小, 加之系统阻尼的作用, 在跃迁阈值B点附近将不易于形成跃迁条件, 从而不能获得系统的跃迁输出, 如图9(a)所示; 反之, 若噪声强度过大, 且仍能突破系统阻尼的作用, 则系统动点由于瞬时激励过大而无需内禀信号的推动即能超越阈值完成跃迁, 这时系统的跃迁便是以噪声为主要驱动的, 故必然呈现出跃迁周期与内禀信号的弱相关性甚至不相关, 如图9(b)所示. 结合上述三类情况的分析, 我们可以获得人们熟知的随机共振峰值特征曲线, 此处从略.

5 基于吸引子曲线的随机共振跃迁过程速度分析

在上节我们已经提到: 一旦动点越过跃迁阈值点B便能轻易地发生跃迁, 这是什么原因呢? 为了能比较完整的分析随机共振现象发生的动力学机理, 我们还有必要对随机共振跃迁过程的速度做一定性分析. 虽然方程(2)已经直接表达了动点在某x位置的瞬时速度, 但该式对于描述随机共振系统的动点速度变化过程还不够直观. 为了也能基于吸引子曲线作速度分析, 我们在(2)式的右侧作一增减 c_i 项的处理, 并令 $y(t) = A \cos(\omega t)$, 变形后为

$$k\dot{x} = ax - bx^3 + c_i + y(t) - c_i, \quad (6)$$

式中, c_i 为动点当前位置x值对应吸引子曲线上的激励值.

由于在吸引子曲线上都有 $ax - bx^3 + c_i = 0$ 的性质, 经过这样的变形处理后, 在方程(6)的右侧就

只剩下 $y(t) - c_i$ 项了. 考虑到该结果必须基于吸引子曲线进行分析, 因此我们有必要在 \dot{x} 的右上角加注*号以示区别, 于是可得到

$$k\dot{x}^* = y(t) - c_i,$$

即

$$\dot{x}^* = \frac{y(t) - c_i}{k}. \quad (7)$$

把上式放到吸引子曲线图中去理解将会变得更加直观. 如图10所示, 设某系统当前动点在P点, 该点的横坐标值表示动点当前的x位置值, 纵坐标值表示作用于系统的当前瞬时激励值. 为了分析P点的瞬时速度, 在图中从点P做一条竖直线交图中红色吸引子曲线于点S, 由(7)式可知动点的瞬时速度为P点的纵坐标值 y_p 减去S点的纵坐标值 y_s , 再除以系统的阻尼k, 即

$$\dot{x}_p^* = \frac{y_p - y_s}{k}.$$

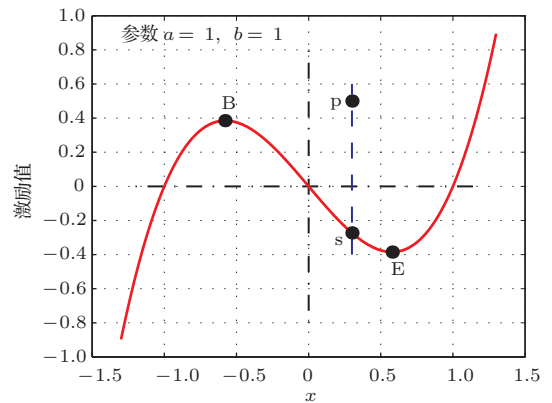


图10 作图法求解系统动点的瞬时速度

显然, 当 $y_p - y_s > 0$ 时动点向x轴正向移动; 反之, 当 $y_p - y_s < 0$ 时动点向x轴负向移动. 而且该差值的绝对值 $|y_p - y_s|$ 越大, 动点的运动速度也越大; 另一方面, 如果作用于系统的激励值保持恒定, 亦即图中动点在移动过程中的 y_p 值保持不变, 一旦系统发生跃迁, 从图10可以看出: 动点离开B点向右移动的过程中, PS的距离将逐渐增大, 当到达E点上方后才开始逐渐减小. 也就是说在发生跃迁的瞬间, 动点速度的变化是渐增的, 直至跃迁即将完成才缓慢降速. 这也就很好地定性解释了图7中跃迁轨迹的瞬间变化过程.

下面继续分析在内禀信号和噪声共同作用下发生跃迁时刻的速度变化情况. 首先, 由于内禀信号的周期是很长的, 而系统跃迁从发生到完成的过

程只占内禀信号很短的一段时间, 可以认为在该跃迁过程中内禀信号的幅值几乎保持不变; 而叠加于其上的噪声使得系统的瞬时激励表现为在该内禀信号上下波动的一个过程, 如图 11 阴影部分的瞬时激励波动区域所示. 我们将这个过程置于吸引子曲线上, 以从左向右跃迁为例说明, 图中在吸引子曲线上方阴影部分的面积是大于吸引子曲线下方阴影部分面积的, 换言之, 绝大部分的系统瞬时激励值能保证 $y_p - y_s > 0$, 也就能驱动系统动点顺利地沿 x 轴正向移动, 从而使系统能够有效地完成跃迁.

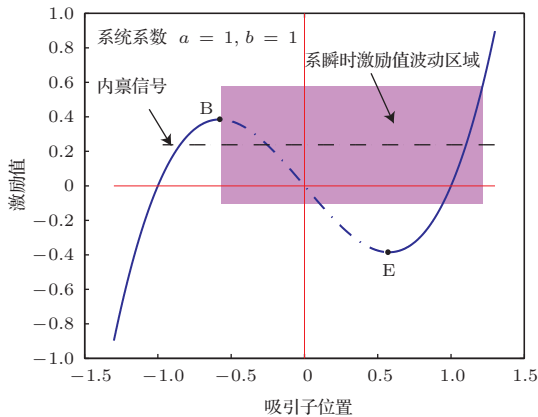


图 11 噪声叠加于内禀信号后相对于吸引子曲线的位置关系图

6 基于吸引子曲线的随机共振微弱信号检测方法分析

虽然吸引子曲线的获取是以激励信号周期足够长为前提的, 然而我们已经有许多技术手段^[26-29]能将工程实际中遇到的中频乃至高频被测信号调制到符合随机共振检测要求的频率范围, 就此而言, 我们讨论吸引子曲线是具有现实意义的. 值得一提的是: 该前提与现有的诸多随机共振分析理论不谋而合. 前面我们已经从吸引子曲线及系统动点的速度两个方面定性分析了随机共振动力学机理, 下面将基于该理论从调整吸引子曲线形态参数、系统阻尼以及变步长等三个方面讨论基于随机共振的微弱信号检测方法.

6.1 调整吸引子曲线形态参数的检测方法

在本文 2.2 节里我们已经明确: 系统吸引子曲线的形态是由 (2) 式中的参数 a, b 共同决定的, 该形态具体表现为跃迁阈值、跃迁宽度以及斜率 K_A ,

这三者将联合决定随机共振系统输出的性质. 以固定参数 b 而调整参数 a 的值为例分析: 由 (4) 式可知, 增大 a 值将使得跃迁宽度和跃迁阈值都增加, 而跃迁宽度增加的前提是系统能发生跃迁, 但是增加跃迁阈值会使得系统不易于发生跃迁, 这是一对矛盾; 同时增大 a 值也导致 K_A 的增加, 这将会直接增强输出饱和现象, 势必加剧输出波形的畸变; 相反地, 减小 a 值会降低跃迁阈值, 也会减小跃迁宽度, 但 K_A 的减小将使输出释放现象得到加强, 这也意味着即使跃迁宽度减小, 但小幅度的输入信号增量仍可得到较大幅度的输出变化. 上述分析也从另一个角度提示我们: 单纯地调整 a, b 中的某个参数值并不能得到特定规律的输出, 所以我们不建议采用单独改变其中一个参数的方法来设计随机共振检测系统.

由微弱信号中的内禀信号及噪声强度与跃迁阈值的抗衡关系可以看出: 幅值较小的内禀信号需要有较大的噪声强度才有可能超越跃迁阈值而发生跃迁; 另一方面跃迁宽度又在一定程度上影响到系统输出信号的幅值. 所以, 我们可以设计调整跃迁阈值而保持跃迁宽度的随机共振系统来检测微弱信号. 该方案只需同比例地改变 a, b 参数即可实现. 图 12 为采用该方法检测某噪声强度为 3, 内禀信号幅值为 0.3, 频率为 1 Hz 信号的随机共振检测系统输出过程. 选择系统阻尼系数为 0.1, 并根据图中的离散跃迁阈值构建一系列随机共振检测系统, 然后把该被测信号输入到每一个检测系统, 对系统的输出信号做 Fourier 变换, 在频谱图上分别读出最大幅值 (在图 12 中用空心圆圈标记) 以及与内禀信号频率一致的信号幅值 (实心黑点标记), 从图 12 可以看出, 当跃迁阈值较大时, 系统因未能发生跃迁, 在其输出信号的频谱图中与内禀信号同频率的信号 (以下简称内禀同频信号) 幅值很小, 频谱图上的最大幅值信号表现为输出信号中的直流信号分量; 逐渐减小跃迁阈值, 能够使得系统逐步地过渡到稳定跃迁的状态, 这时频谱图上的最大幅值信号能稳定地以内禀同频信号呈现出来, 如图 12 中空心圆圈与实心点重合标记的位置; 随着跃迁阈值继续减小, 输入信号中的一小部分随机的大干扰信号会导致系统的随机跃迁, 从而影响到系统输出的周期性, 故内禀同频信号的幅值会有所减小, 但它的输出仍然是以反映内禀同频信号为主的; 随着跃迁阈值的进一步减小, 这将使得参数 a 的值很小, 势必导致输出释放现象增强, 这也就意味着一方面系

统极易发生跃迁; 另一方面, 很小的内禀信号增量也能获得较大的输出, 从而在这个阶段, 系统的输出会迅速增大.

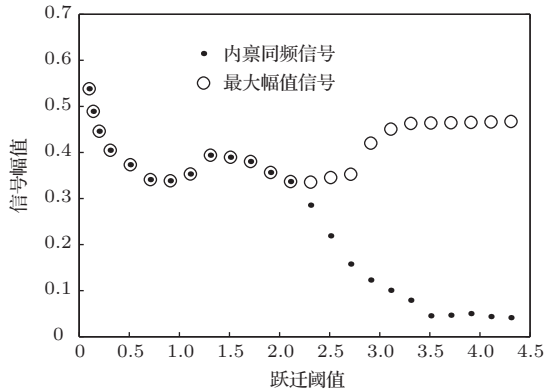


图 12 调整跃迁阈值的随机共振系统输出过程

6.2 调整阻尼参数的检测方法

根据 (7) 式可以获知: 动点的瞬时速度与系统阻尼呈反比关系. 也就是说, 系统阻尼小则动点瞬时速度就大, 从而在有限的作用时间内移动的距离就大, 尤其是对于被内禀信号推送至跃迁点附近的动点而言, 由于瞬间移动距离较大, 动点很容易越过跃迁点而使得系统发生跃迁. 图 13 为采用调整阻尼的方法检测某噪声强度为 3, 幅值为 0.3, 频率为 1 Hz 信号的随机共振检测系统输出过程, 选择系统系数 $a = 1, b = 1$, 将该信号输入到由图中离散分布的阻尼构建的检测系统, 从输出信号的频谱图中分别读出最大幅值 (空心方框标记) 以及内禀同频信号的幅值 (用实心黑点标记). 从图 13 可以看出, 当阻尼较小时, 系统易于跃迁, 但由于大幅值噪声造成随机跃迁干扰的影响, 输出信号频谱图上的内禀同频信号幅值较小; 随着系统阻尼的逐渐增大, 系统滤波效果逐渐增强, 这时内禀信号的推送作用逐渐显现, 在噪声的作用下也能顺利获得跃迁, 从而在系统输出信号的频谱图中, 最大幅值能以内禀同频信号展现出来, 且逐渐增大; 然而随着阻尼的继续增大, 噪声被大幅度地滤波处理, 导致动点越来越不易于越过跃迁点, 系统的输出逐渐变成直流的波动信号, 使得图 13 中所示的最大幅值 (直流信号分量) 和内禀同频信号的幅值逐渐分离. 需要说明的是, 如果系统的阻尼很小, 则噪声的干扰作用产生的随机跃迁将占主导地位, 频谱图上的所有信号幅值都将很小, 于是在频谱图上无法直接观察到能明显区别于其他信号的内禀同频信号. 可

见, 系统的输出信号随阻尼的逐渐增大, 经历了一个由随意跃迁、到稳定跃迁、再到不跃迁的过程, 而且在稳定跃迁的过程中逐渐凸显的是原信号中的内禀信号.

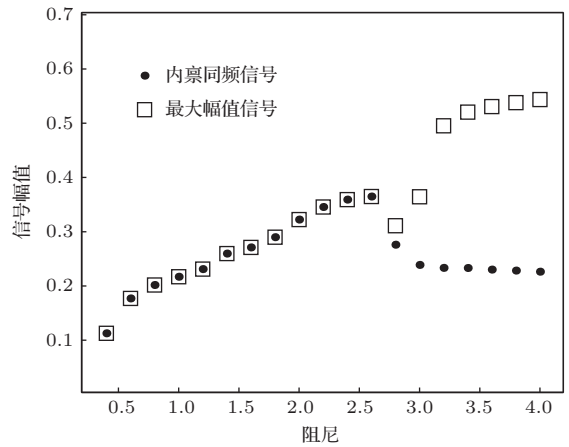


图 13 调整阻尼的随机共振系统输出过程

6.3 变步长的检测方法

变步长检测方法仅适用于采用数值分析手段的微弱信号检测. 其本质是通过改变作用于动点的瞬时激励时间长度来改变它的瞬间移动距离. 选用较长的步长则可获得较大的动点瞬间移动距离, 这一点对于被内禀信号推至吸引子曲线跃迁点附近的动点而言, 由于其瞬间移动距离增大, 动点更容易越过跃迁点而使得系统能较快地发生跃迁. 它是通过增加步长来逐步增强系统跃迁的效果, 并以此来凸显微弱信号的频率特征. 该方法一般用于基于微处理器的随机共振检测系统, 但由于在该类检测系统中存在大量的和复杂的迭代运算, 其检测的实时性较差, 故我们认为该方法一般不适合于微弱信号的在线检测. 尤其需要注意的是: 步长不宜设置过大, 否则会导致系统输出不能收敛于吸引子而造成检测错误.

7 结 论

一阶非线性非自治 Duffing 方程在激励周期时间足够长的前提下, 可获得系统的吸引子曲线; 根据输入信号与该吸引子曲线的映射关系可以分析系统输出的动力学行为; 作用于系统的内禀信号对系统的输出起内在的和本质的推动作用, 而噪声能在一定条件下诱发系统产生跃迁. 调整系统非线性项的参数能够设计吸引子曲线的形态, 通过调整其

形态或改变系统阻尼等方法, 可使随机共振系统在周期激励作用下发生周期性的跃迁. 随机共振系统有两个方面的特性: 一个是阻尼, 另一个是跃迁. 阻尼可以降低并规范系统的跃迁行为, 跃迁是在内禀信号推动作用下实施的. 有机地联合使用这两个特性可以实现对输入信号的非线性放大, 以此凸显噪声背景下的微弱信号.

参考文献

- [1] Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiana A 1981 *J. Phys. A: Math. Gen.* **14** 453
- [2] Hu G, Qing G R, Gong D C 1991 *Phys. Rev. A* **44** 6414
- [3] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
- [4] Dykman M I 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 2606
- [5] Gammaitoni L, Marchesoni F 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 349
- [6] Dykman M I, Haken H, Hu G 1993 *Phys. Lett. A* **180** 332
- [7] Dykman M I, Luchinsky D G, Mannella R 1994 *Phys. Lett. A* **193** 61
- [8] Zhou T, Moss F 1990 *Phys. Rev. A* **41** 4255
- [9] Choi M H, Fox R F, Jung P 1998 *Phys. Rev. E* **57** 6335
- [10] Giacomelli G, Marin F, Rabbiosi I 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 675
- [11] Jung P, P Hänggi 1989 *Euro. phys. Lett.* **8** 505
- [12] Hu G, Nicolis G, Nicolis C 1990 *Phys. Rev. A* **42** 2030
- [13] Lu Z H, Lin J H, Hu G 1993 *Acta Phys. Sin.* **42** 1556 (in Chinese)[卢志恒, 林建恒, 胡岗 1993 物理学报 **42** 1556]
- [14] Li X L, Leng Y G, Fan S B, Shi P 2011 *J. Vibration and Shock.* **30** 78 (in Chinese) [李晓龙, 冷永刚, 范胜波, 石鹏 2011 振动与冲击 **30** 78]
- [15] Peng H, Zhong S C, Ma H 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 080501 (in Chinese)[彭皓, 钟苏川, 马洪 2013 物理学报 **62** 080501]
- [16] Guo F, Luo X D, Li S F, Zhou Y R 2010 *Chin. Phys. B* **19** 080502
- [17] Lin M, Fang L M, Zheng Y J 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1725
- [18] Li J L, Zeng L Z 2011 *Chin. Phys. B* **20** 010503
- [19] Zhang L Y, Jin G X, Cao L, Wang Z Y 2012 *Chin. Phys. B* **21** 120502
- [20] Jiang S Q, Hou M J, Jia C H, He J R, Gu T X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2667
- [21] Leng Y G, Wang T Y, Guo Y 2007 *Acta Phys. Sin.* **56** 30 (in Chinese)[冷永刚, 王太勇, 郭焱 2007 物理学报 **56** 30]
- [22] Leng Y G 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 020503 (in Chinese)[冷永刚 2011 物理学报 **60** 020503]
- [23] Wang G F, Ouyang S, Zhang H R 2010 *J. Guilin Univ. Elec. Tec.* **30** 396 (in Chinese) [王国富, 欧阳缙, 张海如 2010 桂林电子科技大学学报 **30** 396]
- [24] Qu Y, Wang F Z, Sun J J 2011 *Sci. sin.* **41** 1190 (in Chinese) [曲媛, 王辅忠, 孙静静 2011 中国科学 **41** 1190]
- [25] Zhao W L, Wang J, Wang L Z 2013 *Chaos* **23** 033117
- [26] Fan Y Y, Li L P, Dang R R 2013 *Chin. J. Scie. Ins.* **34** 566 (in Chinese) [樊养余, 李利品, 党瑞荣 2013 仪器仪表学报 **34** 566]
- [27] Zhao W L, Liu J, Yin Y P 2011 *Chin. J. Scie. Ins.* **32** 721 (in Chinese) [赵文礼, 刘进, 殷园平 2011 仪器仪表学报 **32** 721]
- [28] Leng Y G, Wang T Y 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 2431 (in Chinese)[冷永刚, 王太勇 2003 物理学报 **52** 2431]
- [29] Wang L Z, Zhao W L, Chen X 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 160501 (in Chinese)[王林泽, 赵文礼, 陈旋 2012 物理学报 **61** 160501]

Nonlinear dynamics of stochastic resonance and its application in the method of weak signal detection*

Fan Jian¹⁾³⁾ Zhao Wen-Li^{2)†} Zhang Ming-Lu¹⁾ Tan Run-Hua¹⁾ Wang Wan-Qiang²⁾

1) (School of Mechanical Engineering, Hebei University of Technology, Tianjin 300401, China)

2) (School of Mechanical Engineering, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018, China)

3) (Department of Mechanical & Electrical Engineering, Taizhou University, Taizhou 318000, China)

(Received 11 January 2014; revised manuscript received 14 March 2014)

Abstract

According to the existed stochastic resonance theory, we cannot obtain the dynamic behavior of a stochastic resonance (SR) system intuitively. In order to reveal the dynamic mechanism of SR, a kind of first-order Duffing equation attractor is analyzed at first, and then the property of nonlinear Duffing equation is studied, based on which the nonautonomous Duffing equation attractor curve is deduced. The output of SR system can be obtained by mapping the input signal on the attractor curve, and the dynamic mechanism of SR is explained by using the mapping method. Analysis of the result indicates that the intrinsic signal can push the system to move along the attractor curve, and the noise can evoke a transition response of the system under the given conditions. Some existed SR weak signal detection methods, such as the parameter-adjustment and damping-adjustment are extended by the proposed dynamic mechanism.

Keywords: stochastic resonance, weak signal detection, attractor curve

PACS: 05.10.Gg, 05.10.-a

DOI: 10.7498/aps.63.110506

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 50875070), the Scientific Research Fund of Zhejiang Provincial Education Department and the Technology Research of China (Grant No. Y201326915).

† Corresponding author. E-mail: zhaowlcn@163.com