压缩感知理论在矩量法中的应用*

王哲† 王秉中

(电子科技大学应用物理研究所, 成都 610054)

(2013 年 12 月 13 日收到; 2014 年 3 月 1 日收到修改稿)

矩阵填充与线性方程组求解是矩量法中最耗计算资源的环节. 为提高计算效率, 提出了一种基于压缩感知理论的矩量法的改进方法. 通过引入稀疏变换矩阵实现对待求响应的稀疏表示, 从而可在压缩感知理论框架下构造欠定方程, 并优化求解. 数值仿真实验结果表明: 该方法不仅可以减小矩阵填充计算量, 还可以有效提高解的求解效率.

关键词: 压缩感知, 矩量法, 限制等距性质, 积分方程

PACS: 02.60.Cb, 02.70.–c, 02.90.+p **DOI:** 10.7498/aps.63.120202

1 引 言

通常, 许多电磁场问题都可以被描述为一个连续的积分方程:

$$\int_{\Omega} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')f(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = g(\boldsymbol{r}), \tag{1}$$

其中, G 和 g 分别表示已知的积分核函数和激励, f 是待求响应. 运用矩量法[1] (method of moments, MoM), 通过选择适当的基函数 $\boldsymbol{\Phi} = \{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N\}$ 和权函数 $\boldsymbol{\Psi} = \{\psi_1,\psi_2,\cdots,\psi_M\}$, (1) 式可以被转化为一个线性方程组, 其矩阵形式为

$$\boldsymbol{ZI} = \boldsymbol{V}, \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{I}$ 是 f 在 $\boldsymbol{\Phi}$ 中的表示系数向量, 阻抗矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 和激励向量 $\boldsymbol{V}$ 中的分量分别为

$$Z_{i,j} = \int_{\Omega_i} \psi_i(\boldsymbol{r})\cdot\left[\int_{\Omega_j} G(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\phi_j(\boldsymbol{r}')\mathrm{d}\boldsymbol{r}'\right] \times \mathrm{d}\boldsymbol{r}, \tag{3}$$

$$V_i = \int_{\Omega_i} \psi_i(\boldsymbol{r})\cdot g(\boldsymbol{r})\mathrm{d}r. \tag{4}$$

如果 $\boldsymbol{Z}$ 非奇异, 则有

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{Z}^{-1}\boldsymbol{V}. \tag{5}$$

在实际应用中, 为了达到一定精度, 未知数个数 N 通常会非常大. 一方面, 这导致 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的填充计算量急剧增加; 另一方面, 即使采用迭代法求解 (5) 式, 其复杂度也会高达 $O(N^2)$; 此外, N 过大还可能导致 $\boldsymbol{Z}$ 病态. 为了应对这些问题, 诸如快速多层多极子方法[2,3]、小波矩量法[4]、高阶矩量法[5]等矩量法的改进方法被提出. 其中, 快速多层多极子方法通过聚合、转移和解聚等步骤, 将 (5) 式的迭代法求解复杂度下降为 $O(N^{1.5})$, 甚至 $O(N\log N)$. 小波矩量法利用了多尺度小波基函数特有的消失矩、紧支撑、正则性等性质[6], 使大尺寸、稠密的 $\boldsymbol{Z}$ 稀疏化, 减小了矩阵与向量相乘的复杂度, 提高了计算效率. 高阶矩量法则将相应的目标面或体用高阶面或体元素模拟, 从而减少了未知数个数 N.

虽然各种新方法层出不穷, 但都要求基函数与权函数的数量相等 (即 $M = N$). 这是基于基本的线性代数理论: 求解 N 个未知数需要构造 N 个方程. 然而, 方程 (2) 的解待求并不意味着对解毫无所知, 毕竟所描述的物理问题已知. 深刻理解问题背后的物理意义, 总可以获得一些关于解的先验

* 国家自然科学基金 (批准号: 61071031, 61331007) 和高等学校博士学科点专项科研基金 (批准号: 20100185110021, 20120185130001) 资助的课题.

† 通讯作者. E-mail: wangzherra@gmail.com

信息. 即使这些信息可能是模糊而不精确的, 却有助于更具针对性地选择 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$, 从而更为高效地建立方程 (2). 事实上, 求解 N 个未知数需要 N 个方程是充分而非必要条件. 利用了先验信息, 就有可能用少于 N 个方程求解出 N 个未知数. 就矩量法而言, 这实际上意味着权函数个数小于基函数个数 (即 $M < N$), 从而可以直接减小 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的填充计算量. 但是, 由此得到的阻抗矩阵将是奇异的, 从而不能利用 (5) 式而必须采用最优化方法进行求解. 于是, 就给定的 $\boldsymbol{\Phi}$ 和 $\boldsymbol{\Psi}$ 而言, 略去 $\boldsymbol{\Psi}$ 中的哪些元素以构造可解的欠定方程, 提出何种约束条件以保证最优解即是物理真实解, 采用何种最优化求解方法以保证解可以被高效解出等问题即成为关键.

本文基于压缩感知 (compressed sensing, CS) 理论 [7], 提出了一种对传统矩量法的改进方法, 使得权函数数量可以减少 ($M < N$). 此方法与基于离散小波变换的小波矩量法有类似之处, 可以看作是一种后处理方法, 从而能够与现有的一些方法相结合. 但不同于小波矩量法着眼于 $\boldsymbol{Z}$ 的稀疏变换, 本方法着眼于对 $\boldsymbol{I}$ 进行稀疏变换, 从而不仅可以利用 CS 的相关技术节约 $\boldsymbol{Z}$ 和 $\boldsymbol{V}$ 的填充计算量, 还可大幅提高方程的求解效率和稳定性. 最后结合具体算例, 给出了与传统矩量法的比较结果, 证明了此方法的可行性和高效率.

2 基于压缩感知理论的矩量法改进方法原理

CS 理论的核心思想是通过求解一个最优化问题, 实现用少量非自适应的线性测量值严格重构稀疏的原始信号 [8,9]. 假定 N 维实值信号 $x \in \mathbb{R}^N$ 是 S 稀疏的 (即 $\|x\|_0 = S \ll N$). CS 理论指出: 在一定条件下, 可以用任意 $M = O(S\log(N/S))$ 个测量值以极大概率精确重构 $\boldsymbol{x}$, 其数学表示为

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{x}, \tag{6}$$

其中, 观测矩阵 $\boldsymbol{\Theta} \in \mathbb{R}^{M,N}$, 观测值向量 $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^M$. 一般地, 欠定方程 (6) 无确定解, 但如果 $\boldsymbol{\Theta}$ 满足所谓限制等距性质 [10,11] (restricted isometry property, RIP), 则有惟一最稀疏解. 这等效为求解一个最小 l_0 范数优化问题:

$$\min_x \|x\|_0 \quad \text{s.t.} \quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{x}. \tag{7}$$

求解 (7) 式是 NP-hard 非凸组合优化问题, 故而多种近似算法被提出. 本文采用了应用较为广泛的正交匹配追踪算法 [12,13] (orthogonal matching pursuit, OMP).

我们注意到 (2) 和 (6) 式在数学上的相似. 事实上, 如果将 $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{V}$ 和 $\boldsymbol{I}$ 分别视为观测矩阵、测量值和信号, 则 CS 技术在形式上可以被引入. 因此, 若满足相关约束条件, 则在理论上 $\boldsymbol{I}$ 应该也可通过求解一个欠定方程而得到, 即

$$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{CS}}\boldsymbol{I} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{CS}}, \tag{8}$$

其中, $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{CS}} \in \mathbb{R}^{M,N}$ 和 $\boldsymbol{V}^{\mathrm{CS}} \in \mathbb{R}^M$ 分别是通过抽取 $\boldsymbol{Z}$ 中的 M 行以及 $\boldsymbol{V}$ 中相应的 M 个分量而得到 (即权函数数量减少). 根据 CS 理论, 仅当 $\boldsymbol{I}$ 本身即稀疏, (8) 式才可直接应用. 这通常要求采用较为复杂的基函数 $\boldsymbol{\Phi}$, 从而导致 (3) 式中复杂的积分运算. 本文采用离散变换方法, 即引入稀疏变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 对 $\boldsymbol{I}$ 进行稀疏变换. 从而有

$$\tilde{\boldsymbol{Z}}\tilde{\boldsymbol{I}} = \tilde{\boldsymbol{V}}, \tag{9}$$

其中, $\tilde{\boldsymbol{Z}} = \boldsymbol{Z}^{\mathrm{CS}}\boldsymbol{T}^{-1}$, $\tilde{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{I}$ 以及 $\tilde{\boldsymbol{V}} = \boldsymbol{V}^{\mathrm{CS}}$. 对 $\boldsymbol{I}$ 进行稀疏变换意味着不再将 $\boldsymbol{I}$ 看成简单的数字, 而应深刻理解其背后的物理意义. 若 $\boldsymbol{I}$ 缓变, 则 $\boldsymbol{T}$ 可选为离散余弦变换矩阵; 若 $\boldsymbol{I}$ 中含有丰富的频率成分, 则 $\boldsymbol{T}$ 可选为离散傅里叶变换矩阵; 若 $\boldsymbol{I}$ 中数据有跳变等, 则 $\boldsymbol{T}$ 可选为适当的离散小波变换矩阵, 等等. 利用 OMP 等优化算法求解出方程 (9) 的稀疏解 $\tilde{\boldsymbol{I}}$, 再通过稀疏逆变换即可得到原始解 $\boldsymbol{I}$, 即

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{T}^{-1}\tilde{\boldsymbol{I}}, \tag{10}$$

显然, 在整个计算过程中, 无须使用到 $\boldsymbol{T}$ 而仅须用到其逆矩阵 $\boldsymbol{T}^{-1}$.

必须注意的是, CS 理论仅表明: $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 满足 RIP 时才可精确重构 $\tilde{\boldsymbol{I}}$, 但并未给出如何构造 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 的具体方案. 易知, 给定 M 和 N, 可构造多达 $\boldsymbol{C}_N^M$ 个不同的欠定方程. 由于这些欠定方程不可能都满足 RIP, 故而其重构解未必都精确. 换句话说, 得到精确重构解是一个与压缩比 M/N 相关的概率问题. 事实上, 为保证以极大概率成功重构, CS 中的 $\boldsymbol{\Theta}$ 一般是满足不同分布的随机矩阵 [14]. 更为复杂的是, 重构算法本身对精确重构的概率也有影响. 作为局部优化算法, OMP 等贪婪算法的精确重构概率要小于基追踪 [15] (basis pursuit, BP) 等全局优化算法, 但由于贪婪算法的计算复杂度更小, 故而在工程实践中应用更为广泛.

为了给出权函数数量可以减少的物理解释, 以简单的点匹配法为例. 假定待求响应 f 可被 N 个脉冲基函数表示为一个 N 维 S 稀疏向量 $\boldsymbol{I}$, 则 f 必

然在 S 个脉冲基函数的定义域上为 0 (如图 1 所示). 众所周知, 点匹配法是通过要求在所有 N 个匹配点上的残差为 0 而得出解. 若匹配点如图 1 所示而选择, 则 $\|\boldsymbol{I}\|_0 = S < N$ 表明在 S 个匹配点上的残差已自动为 0, 故而无须在所有 N 个匹配点上进行匹配. CS 理论进一步指出, 无须确切地知道 S 个匹配点的具体位置, 在一定约束条件下可任意选取 M 个匹配点 $(S < M < N)$. 这里要求 $M > N$ 是为了弥补关于 S 个自动匹配点的具体位置未知这一信息上的缺失. 事实上, 只要权函数的定义域不大于基函数的定义域, 上述解释都是适用的. 此时, 稀疏即意味着在某些权函数的定义域内残差已自动为零, 从而权函数数量可以减少.

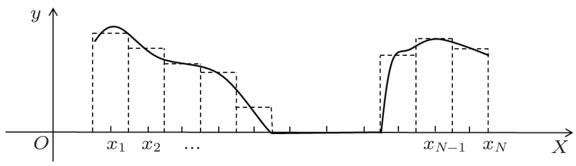

图 1 可被脉冲基函数稀疏表示的待求响应 ($x_1, x_2, \cdots, x_N$ 为匹配点)

3 数值仿真结果

为测试所提出方法可行性及其性能, 考虑一个一维静电场算例: 假定长 1 m, 半径为 0.001 m 的导体杆上给定电位 $\varphi = 1$ V, 则其电荷分布函数 ρ 满足方程:

$$\int_L \frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}' = \varphi, \qquad (11)$$

其中 ε_0 为真空中的介电常数. 将杆均匀分割为 50 份, 选用脉冲基函数及点匹配法, 即可得到常规的矩量法方程 (2). 此时, 方程 (2) 的解 $\boldsymbol{I}$ 实际是 ρ 的一个自然采样序列. 由电磁场理论可知, $\boldsymbol{I}$ 处处不为 0 (不稀疏), 但应是缓变的, 即 $\boldsymbol{I}$ 含较少的空间频率成分. 故而选择离散余弦变换 (discrete cosine transform, DCT) 对 $\boldsymbol{I}$ 进行稀疏变换. 1 维 DCT 变换矩阵 $\boldsymbol{D}$ 定义为

$$\boldsymbol{D}_{m,n} = \frac{2c_m}{\sqrt{N}}\cos\frac{(2n-1)(m-1)\pi}{2N}, \qquad (12)$$

其中, 当 $m = 1$ 时, $c_m = \sqrt{1/2}$, 否则 $c_m = 1$. 由 1 维 DCT 变换性质可知, $\boldsymbol{D}^{-1} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$, 上标 T 代表矩阵转置. 将 $\boldsymbol{T}^{-1} = \boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}$ 代入 (9) 式并给定压缩比 M/N, 即可构造出相应的存在稀疏解的欠定方程组. 如前所述, 存在多种方案构造欠定方程, 重构解不惟一. 令 $M/N = 40\%$, 在图 2 中绘出了两个重构解 (记为 ρ^{CS}) 并与矩量解 (记为 ρ^{MoM}) 比较, 用于表现不同重构解之间的差异可能有多大.

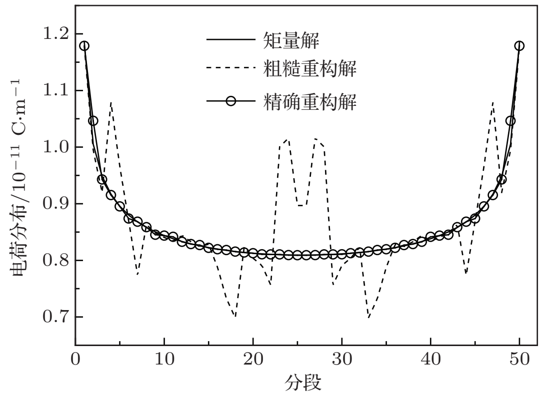

图 2 导体棒的电荷分布解对比

由 CS 理论可知, 能否精确重构取决于 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 是否满足 RIP, 而定量分析矩阵的 RIP 本身是一个 NP 问题, 故本文采用实验分析的方法. 显然不可能穷举分析 $\boldsymbol{C}_N^M$ 个欠定方程组, 故考虑针对不同 M/N 值分别进行 10000 次随机实验 (实验发现, 10000 次的样本容量可以较好地反映整体的统计特性), 并用相对均方根误差函数 (relative root mean square error, RRMSE) 对重构误差进行定量分析, 定义为

$$\mathrm{RRMSE} = \|\rho^{\mathrm{CS}} - \rho^{\mathrm{MoM}}\|_2/\|\rho^{\mathrm{MoM}}\|_2, \qquad (13)$$

其中, ρ^{MoM} 和 ρ^{CS} 分别为经典矩量解和 CS 重构解. 在每次实验中, 随机抽取 $\boldsymbol{Z}$ 中 M 行以及 $\boldsymbol{V}$ 中相应的 M 个分量以构造 (9) 式中的 $\tilde{\boldsymbol{Z}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{V}}$. 为便于分析, 实验结果被按升序排列并绘于图 3. 由图可知, 精确重构的概率随着 M/N 的增大而迅速增加, 但计算复杂度也随之迅速增加, 在实际应用中须适当地选择压缩比 M/N 以兼顾计算复杂度与重构精度.

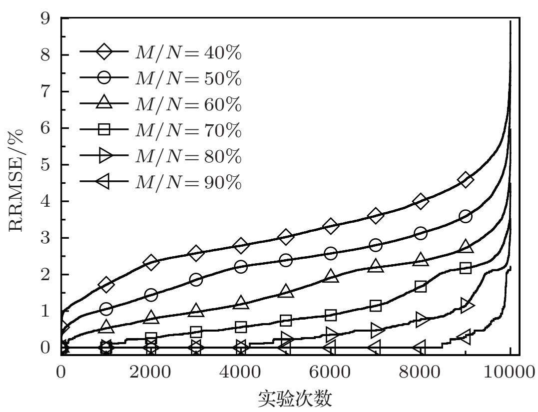

图 3 不同 M/N 值时的误差分布

可以看出, 新方法的性能与解的稀疏性直接相关, 从而与稀疏变换矩阵 $\boldsymbol{T}$ 密切相关. 为进一步说明如何由物理先验构造合适的 $\boldsymbol{T}$, 考虑一个二维静电场算例: 假定尺寸为 2 m × 2 m 的导体板上给定电位 1 V, 则其面电荷密度 σ 满足方程

$$\int_{\Omega}\frac{\sigma(\boldsymbol{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}\boldsymbol{r}'=\varphi. \tag{14}$$

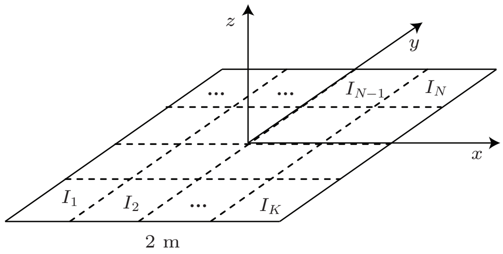

图 4　方导体板及其子域划分

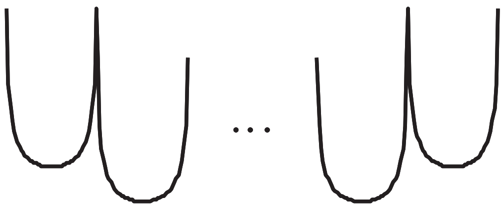

图 5　推测的方导体板电位分布

将导体板按图 4 所示均匀分割为 $N=K\times K$ 块, 并编号. 选择 2 维脉冲基函数与点匹配法, 以得到经典矩量法方程组 (2) . 易知若 N 足够大, 则导体板可看作是由多根导体杆在 y 方向 “ 粘” 在一起而构成. 由已知的导体杆的电荷分布, 可合理推断出导体板上的电荷分布 σ 应有如图 5 所示形状. σ 表现出准周期性, 故若仍采用 1 维 DCT 变换进行稀疏变换, 则必将引入更多的空间频率成分, 从而降低变换后的稀疏程度. 另一方面, 类似对导体杆的分析, 不难得知 σ 应同时在 x 与 y 方向上变化平缓, 故应采用 2 维 DCT 变换. 矩阵 $\boldsymbol{X}\in\mathbb{R}^{K,K}$ 的 2 维 DCT 变换 $\tilde{\boldsymbol{X}}\in\mathbb{R}^{K,K}$ 定义为

$$\tilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{D}\boldsymbol{X}\boldsymbol{D}^{\mathrm{T}}, \tag{15}$$

其中 $\boldsymbol{D}$ 由 (12) 式给出. 显然, (15) 式不能直接使用, 因为要进行稀疏变换的 $\boldsymbol{I}$ 是向量而非矩阵. 对于 (15) 式, 我们希望将其改写成:

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{x}, \tag{16}$$

其中,

$$\tilde{\boldsymbol{x}}=[\tilde{X}_1^{\mathrm{T}},\cdots,\tilde{X}_K^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{K^2},$$

$$\boldsymbol{x}=[X_1^{\mathrm{T}},\cdots,X_K^{\mathrm{T}}]^{\mathrm{T}}\in\mathbb{R}^{K^2},$$

$\boldsymbol{\Gamma}\in\mathbb{R}^{k^2,K^2}$. 这里的 $\tilde{X}_i^{\mathrm{T}}$ 和 X_i^{T} 分别表示矩阵 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 中的第 i 列, 这实际上是 2 维 DCT 变换的一种 1 维改写形式. 由 $\boldsymbol{x}$ 和 $\boldsymbol{X}$ 以及 $\tilde{\boldsymbol{x}}$ 和 $\tilde{\boldsymbol{X}}$ 分量间的一一对应关系, 有

$$\begin{aligned}x_m&=X_{i,j}\\&\qquad(j=\langle m/K\rangle,\quad i=m-(j-1)K),\\\tilde{x}_n&=\tilde{X}_{u,v}\\&\qquad(u=\langle n/K\rangle,\quad v=n-(u-1)K),\end{aligned} \tag{17}$$

这里, $\langle\ \rangle$ 表示后向取整. 如前文所分析的, 在计算中仅需使用相应的逆变换矩阵, 而 2 维 DCT 逆变换定义为

$$\begin{aligned}X_{m,n}=&\frac{2}{N}\sum_{i=1}^{K}\sum_{j=1}^{K}c_ic_j\tilde{X}_{i,j}\\&\times\cos\left(\frac{(2m-1)(i-1)\pi}{2K}\right)\\&\times\cos\left(\frac{(2n-1)(j-1)\pi}{2K}\right),\end{aligned} \tag{18}$$

其中, 当 $i,j=1$ 时, $c_i=c_j=\sqrt{1/2}$, 否则, $c_i=c_j=0$. 则可构造 $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ 中的元素为

$$\begin{aligned}\Gamma_{m,n}^{-1}=&\frac{2c_ic_j}{K}\cos\left(\frac{(2i-1)(u-1)\pi}{2K}\right)\\&\times\cos\left(\frac{(2j-1)(v-1)\pi}{2K}\right),\end{aligned} \tag{19}$$

式中的 m, n, i, j, u, v 之间的关系由 (17) 式给出. 令 $K=10$, 将 $\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ 代入并给定压缩比 M/N, 即可构造出欠定方程组. 同样地, 针对不同的 M/N 值分别做了 10000 次随机试验, 并与采用 $\boldsymbol{D}^{-1}$ 时结果进行对比以验证采用 $\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ 后的计算效果 (见图 6). 由图 6 可以看出, 采用 2 维 DCT 变换的 1 维形式后, 10000 次随机实验的平均 RRMSE 可下降约 1 个数量级. 图 7 中给出了当 $M/N=40\%$ 时, 两种情况的 RRMSE 具体分布. 可以看出, 当 $\boldsymbol{T}^{-1}=\boldsymbol{\Gamma}^{-1}$ 时, 获得精度损失不超过 2% 的重构解的概率超过 80%; 而若采用 $\boldsymbol{D}^{-1}$, 则误差急剧增加.

前面讨论了静电场算例, 并验证了所提出方法的优异性能. 在实践中, 矩量法更常应用于辐射及散射问题. 与静电场问题不同的是, 在辐射、散射问题需要求解复数方程. 考虑中心馈电电压为 1 V 的偶极子天线所满足的海伦方程:

$$j2\eta\int_{-L/2}^{+L/2}i(z')G(z,z')\mathrm{d}z'$$

$$
\begin{aligned}
&+C_1\cos(kz)+C_2\sin(kz)\\
&=\sin(k|z|)\quad\left(-\frac{L}{2}<z<+\frac{L}{2}\right),
\end{aligned}
\tag{20}
$$

其中η为真空中的特征阻抗. 将天线均匀分割为$N=101$段, 选用1维脉冲基函数与点匹配法后得到常规的矩量法方程. 在进行稀疏变换时, 考虑到偶极子天线上电流分布的平滑缓变, 仍选择1维DCT变换. 需要注意的是, 海伦方程中含待定系数C_1和C_2, 而仅需对电流解进行稀疏变换. 故可根据1维DCT变换矩阵的性质构造稀疏逆变换矩阵$\boldsymbol{T}^{-1}$为

$$
\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}[\boldsymbol{D}^{(N-2),(N-2)}]^{\mathrm{T}} & 0^{(N-2),2}\\ 0^{2,(N-2)} & \boldsymbol{E}^{2,2}\end{bmatrix},
\tag{21}
$$

其中$\boldsymbol{E}$为单位矩阵. 在随机数值实验中发现, 由于待定系数与待求电流分布的物理意义不同, 从而内蕴不同的数据结构, 这导致重构成功的概率对欠定方程的构造极其敏感. 若$\tilde{\boldsymbol{Z}}$中不保留有原始$\boldsymbol{Z}$矩阵中的首尾两行, 则每次实验的RRMSE均超过100%. 反之, 则10000 次随机实验的RRMSE分布

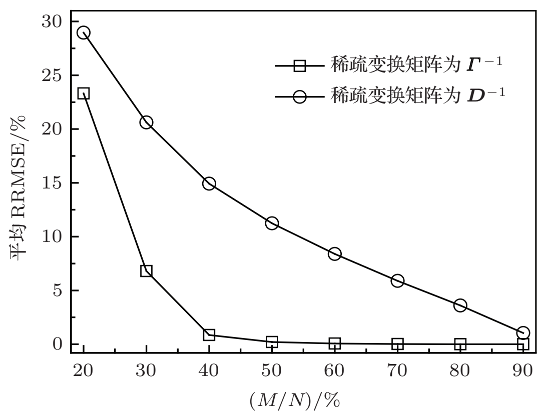

图6 10000次随机实验平均误差比较

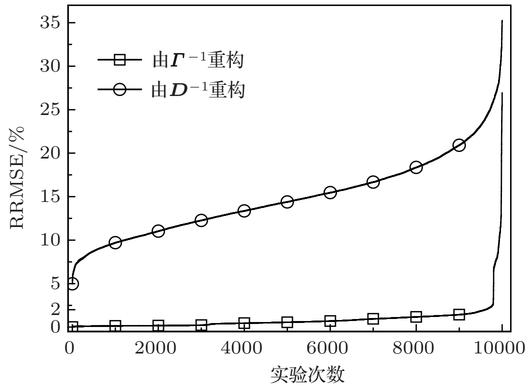

图7 $M/N=40\%$时的误差分布

如图8所示(纵坐标取对数坐标以便于分析). 由于待求解中含多种类型的数据结构, 与静电场算例相比, 新方法的性能有所下降, 但实验数据足以证明新方法对散射、辐射问题所形成的复数方程同样适用.

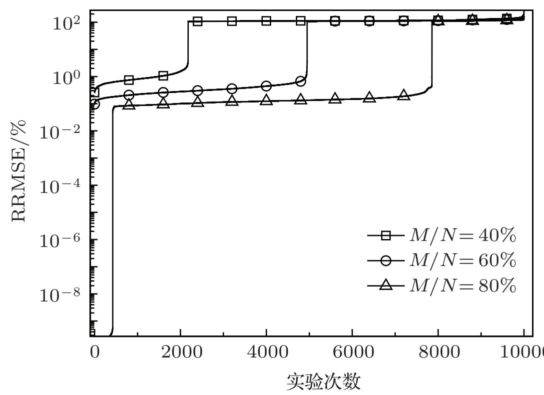

图8 不同M/N值时的误差分布

4 计算复杂度分析

在经典矩量法中, 若计算域的离散数为N, 则填充方程(5)的计算复杂度为$O(N^2)$; 引入CS技术以后, 计算复杂度可压缩为$O(MN)$. 利用迭代法求解(5)式, 若总的迭代次数为P, 则计算复杂度为$O(PN^2)$; 而采用OMP算法优化求解欠定方程(9)的计算复杂度仅为$O(SMN)$. 一般地, 有$S\ll P$成立[16], 故而在方程(5)的解本身即是高度稀疏的理想情况下, 利用本文所提出的方法可以将计算效率提高为经典矩量法的M/N.

如果方程(5)的解不稀疏, 则可采用稀疏变换的方法以构造有稀疏解的欠定方程, 从而将额外增加矩阵预处理$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{CS}}\boldsymbol{T}^{-1}$和数据后处理$\boldsymbol{T}^{-1}\tilde{\boldsymbol{I}}$的计算量. 其中$\boldsymbol{Z}^{\mathrm{CS}}\boldsymbol{T}^{-1}$的计算复杂度为$O(MN^2)$, $\boldsymbol{T}^{-1}\tilde{\boldsymbol{I}}$的计算复杂度为$O(N^2)$. 若$\boldsymbol{T}^{-1}$本身是高度结构化的, 还可进一步降低$\boldsymbol{T}^{-1}\tilde{\boldsymbol{I}}$的计算复杂度. 本文采用了DCT逆变换矩阵, 则$\boldsymbol{T}^{-1}\tilde{\boldsymbol{I}}$实际是对$\tilde{\boldsymbol{I}}$进行DCT 逆变换, 其计算复杂度可降低为$O(N\log N)$. 由于一般有$M\ll N$成立[16], 所以这部分增加的计算量通常远小于欠定方程求解所节约的计算量, 故而本文所提出的方法在整体上仍可大幅度地降低计算量.

为验证上述分析, 针对(11)式所示算例构造电大尺寸问题: 令杆长10 m, 取$N=200,400,\cdots,2000$, $M/N=4\%$, 统计其计算耗时. 为减小误差, 对不同N值分别进行10000次随机实

验, 取其均值并与经典矩量法进行比较(如图9所示). 可见, 应用本文所提出的方法后, 方程填充的计算耗时可下降为经典矩量法的 M/N; 随着问题规模的增加, 方程求解的计算耗时也逐渐趋于经典矩量法的 M/N; 而整体的运行时间也可比经典矩量法下降约一个数量级.

此外, 由于采用最优化方法对解进行局部寻优, 本文所提出的方法还可以大大增强计算稳定性. 当 $N = 10000$, $M/N = 4\%$ 时, 经典矩量法方程系数矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 的条件数高达 7.6×10^5, 其计算结果将出现严重的振荡失真. 而采用本文的改进方法, 仍可获得较好的重构解(见图10), 且计算资源消耗大为节约.

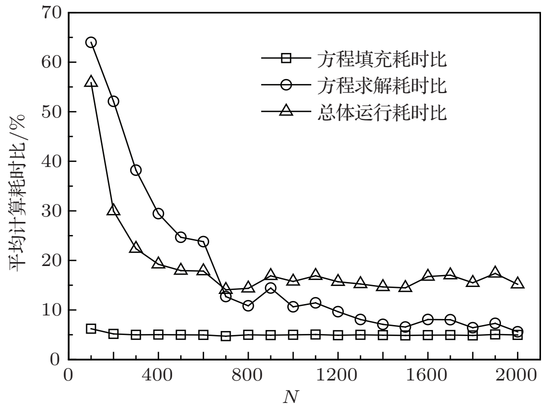

图9 $M/N = 4\%$ 时, 10000次随机实验的平均计算耗时与经典矩量法计算耗时比较

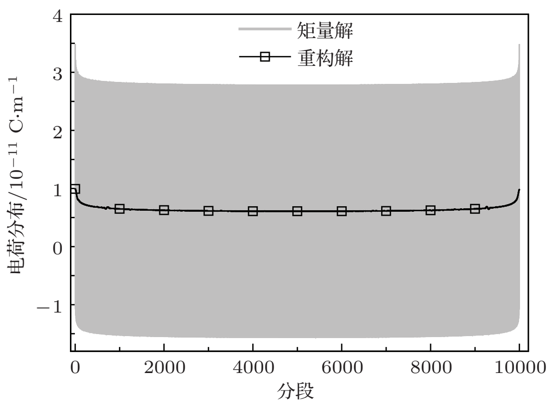

图10 杆长10 m, $N = 10000$, $M/N = 4\%$ 时的电荷分布解比较

需要注意的是, 随机构造欠定方程将不可避免地导致获得高精度解存在不确定性. 为了增强稳定性, 可采用迭代的方法: 给定矩阵 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{CS}}$ 的行数为初值 M_0, 逐渐增加 $\boldsymbol{Z}^{\mathrm{CS}}$ 的规模, 迭代计算直至结果收敛. 合理地选取步长, 可仅通过数次迭代即得到高精度计算结果. 考虑到在单次迭代计算中, 本文所提出方法的计算耗时比传统矩量法有数量级的降低, 故而总体仍可大幅度地节约计算量.

5 结 论

通过对物理问题的先验实现对待求响应的稀疏表示, 从而可在CS框架下构造欠定方程并优化求解. 相比传统矩量法, 不仅可在保证计算精度的前提下大为节省计算资源消耗, 同时还可降低系数矩阵条件数对计算稳定性的影响. 通过静电场与辐射场算例介绍了如何根据先验信息选择和构造稀疏变换矩阵, 并重点分析了欠定矩阵构造对精确重构概率的影响. 实验结果表明, 对于电大尺寸问题, 本文提出的方法很有优势, 是一种有发展潜力的计算电磁学新方法.

参考文献

[1] Hanington R F 1968 *Field Computation by Moment Methods* (New York: Maxillan) p6

[2] Nie Z P, Wang H G 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 3035 (in Chinese) [聂在平, 王浩刚 2003 物理学报 **52** 3035]

[3] Ma J, Guo L X, Wang A Q 2009 *Chin. Phys. B* **18** 3431

[4] Steinberg B Z, Leviatan Y 1993 *IEEE Trans. Antennas Propagat.* **41** 610

[5] Jrgensen E, Volakis J L, Meincke P, Breinbjerg O 2004 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **52** 2985

[6] Gao Q, Yi S H, Jiang Z F, Zhao Y X, Xie W K 2012 *Chin. Phys. B* **21** 064701

[7] Wang L Y, Li L, Yan B 2010 *Chin. Phys. B* **19** 088106

[8] Donoho D L 2006 *IEEE Trans. Inform. Theory* **52** 1289

[9] Baraniuk R G 2007 *IEEE Sig. Proc. Mag.* **24** 118

[10] Tao T 2005 *Math. Res. Lett.* **12** 121

[11] Candès E J 2008 *Comptes Rendus Mathematique* **346** 589

[12] Pati Y C, Rezaiifar R, Krishnaprasad P S 1993 *Proc. 27th Annu. Asilomar Conf. Signals, Systems, and Computers* Pacific Grove, U.S.A., Nov. 1–3, 1993 p40

[13] Bai X, Li Y Q, Zhao S M 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 044209 (in Chinese) [白旭, 李永强, 赵生妹 2013 物理学报 **62** 044209]

[14] Kutyniok G 2012 *CoRR* **abs/1203** 3815

[15] Chen S S, Donoho D L, Saunders M A 2001 *SIAM Rev.* **43** 129

[16] Chen M S, Liu F L, Du H M, Wu X L 2011 *IEEE Anten. Wireless Propag. Lett.* **10** 1243

物 理 学 报 Acta Phys. Sin. Vol. 63, No. 12 (2014) 120202

Application of compressed sensing theory in the method of moments*

Wang Zhe† Wang Bing-Zhong

(*Institute of Applied Physics, University of Electronic Science and Technology of China, Chengdu 610054, China*)

(Received 13 December 2013; revised manuscript received 1 March 2014)

Abstract

Matrix filling and equation solving are the most computationally-expensive steps in the method of moments (MoM). Based on the compressed sensing (CS) theory, an improved method of MoM is proposed in this paper. Through introducing sparse transform matrix, the unknown response can be expressed sparsely, so we can construct and optimally solving underdetermined equation under the framework of CS. Numerical examples show that the proposed method can reduce the matrix filling cost dramatically, and also can improve the efficiency of equation solving effectively.

Keywords: compressed sensing, method of moment, restrict isometry property, integral equation

PACS: 02.60.Cb, 02.70.–c, 02.90.+p **DOI:** 10.7498/aps.63.120202

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61071031, 61331007) and the Specialized Research Fund for the Doctoral Program of Higher Education of China (Grant Nos. 20100185110021, 20120185130001).

† Corresponding author. E-mail: wangzherra@gmail.com