

曲面迭代混沌特性研究

于万波[†] 赵斌

(大连大学信息工程学院, 大连 116622)

(2013年12月11日收到; 2014年1月8日收到修改稿)

研究了空间单位区域内两个曲面映射构成的动力系统的混沌特性. 研究发现两个曲面中有一个曲面振荡剧烈, 另一个曲面随机生成时系统更容易出现混沌, 能生成众多有特点的混沌吸引子. 如果调整随机曲面使其成为满射, 那么所构成的动力系统是混沌的概率可以达到1/2或者更高. 通过计算Lyapunov指数以及绘制分岔图等方法对系统的混沌特性进行分析, 同时给出了由两个曲面构造的系统出现混沌的必要条件. 和二维情形一样, 一个三维正弦函数与两个三维多项式函数构造的动力系统是混沌的概率也很高, 通过计算可以得到众多的具有观赏和实用价值的三维吸引子.

关键词: 混沌吸引子, 曲面, 迭代

PACS: 05.45.-a

DOI: 10.7498/aps.63.120502

1 引言

混沌的数学定义有Li-Yorke混沌定义^[1]、Devaney混沌定义、马蹄映射混沌定义及分布混沌定义等^[2]. 一般认为, 混沌应具有初值敏感性和轨道遍历性, 还应具有分岔现象和正的Lyapunov指数, 同时还要有混沌吸引子^[3]. 混沌吸引子是映射的不变集, 也是系统的终极状态^[4]. 现在已有一些混沌判定方法, 例如Li-Yorke三周期方法、Devaney定义法、Marotto回归排斥子方法^[5], 还有实验研究中经常使用的Lyapunov函数及指数方法等. 对一些具体函数族的混沌特性的研究工作已有很多, 例如Li和Chen^[6]对洛伦兹系统的研究, Reza^[7]对有理贝塞尔曲面的研究等.

因为使用插值拟合曲面的控制点能够调整曲面的形状^[8], 所以本文选择插值拟合曲面. 当边缘控制点在0,1边界上, 而中间控制点使得曲面的最大值为1时, 我们称这种曲面为单位区域内的标准曲面^[8-11]. 文献^[8]研究发现, 如果

$$\begin{cases} z_1 = f(x, y), \\ z_2 = g(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

中的曲面 $f(x, y)$ 是标准双二次有理贝塞尔曲面, 而另外一个曲面 $g(x, y)$ 随机生成, 那么(1)式所示的动力系统出现混沌的概率可以大于1/10. 事实上, 在动力系统(1)式中, 如果其中一个函数在各个点处的斜率均较大, 并且系统不陷入到周期点中, 那么此系统混沌的概率将会增大.

本文研究了三角函数曲面与随机多项式曲面构成的系统的混沌特性, 并分析了曲面的混沌产生条件. 并将研究拓展到三元函数迭代, 获得了三维空间中的混沌吸引子. 如果没有特殊说明, 下面提到的吸引子都是指数值模拟得到的近似吸引子.

2 振荡曲面与随机曲面构成的迭代

2.1 正弦曲面与随机有理贝塞尔曲面迭代

利用三角函数曲面与有理贝塞尔函数曲面构成动力系统,

[†] 通讯作者. E-mail: yu_wb@126.com

$$\begin{cases} z_1 = f(x, y) \\ = \sin(k(x^2 + y^2)), \\ z_2 = g(x, y) \\ = \frac{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij} b_{ij} B_{i,2}(x) B_{j,2}(y)}{\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 w_{ij} B_{i,2}(x) B_{j,2}(y)}, \end{cases} \quad (2)$$

其中,

$$\begin{aligned} B_{1,2}(x) &= x^2 - 2x + 1; \\ B_{2,2}(x) &= -2x^2 + 2x + 1; \\ B_{3,2}(x) &= x^2; \\ B_{1,2}(y) &= y^2 - 2y + 1; \\ B_{2,2}(y) &= -2y^2 + 2y; \\ B_{3,2}(y) &= y^2 + y; (x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]; \end{aligned}$$

w_{ij} 是权值, 其可用来决定曲面的细节形状(例如可以确定该曲面的截面是抛物线、椭圆或双曲线等); b_{ij} 是控制点, 用来决定曲面主体结构形状.

2.1.1 混沌吸引子

(2) 式中三角函数的频率与 k 有关. 当 $k = 1$ 时, 因为三角函数周期大, 振荡比较小, 所以系统出现混沌吸引子的概率比较小; 当 $k = 2$ 时, 迭代 4, 5 次就会出现一个吸引子; 当 k 取值在 3 附近时, 其吸引子最具有观赏性, 出现混沌吸引子的概率几乎达

到 90%; 当 $k = 4$ 时混沌性增强, 混沌程度增加, 可观赏的吸引子图形减少; 当 $k \geq 5$ 时系统几乎完全进入混沌状态. 图 1(a) 给出了当 $k = 3$ 时, 正弦函数曲面图形.

下面取两个特例进行研究. 在第一个动力系统中, $k = 3$, $g(x, y)$ 的权值矩阵和顶点矩阵如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} 2.0725 & 1.8465 & 2.6849 \\ 0.0376 & 0.9027 & 2.8952 \\ 0.3063 & 1.7881 & 1.4069 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0.1813 & 0.1538 & 0.9337 \\ 0.1363 & 0.9985 & 0.6906 \\ 0.9610 & 0.7755 & 0.0007 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

随机多项式曲面形状 F_{r1} 如图 1(b) 所示, 系统的混沌吸引子如图 1(d) 所示.

在第二个动力系统中, $k = 3$, $g(x, y)$ 的权值矩阵和顶点矩阵如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \begin{bmatrix} 2.7274 & 1.9856 & 0.1489 \\ 1.3567 & 0.4923 & 1.4120 \\ 2.4704 & 2.5500 & 2.8927 \end{bmatrix}, \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} 0.1353 & 0.6141 & 0.2174 \\ 0.0222 & 0.3391 & 0.2314 \\ 0.8698 & 0.6857 & 0.4422 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

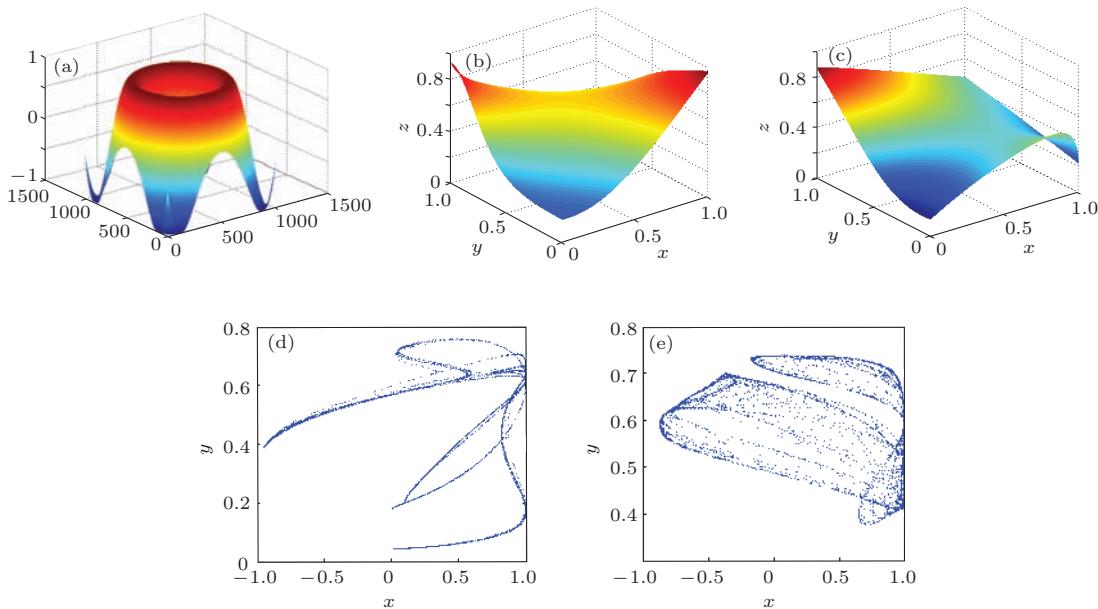


图 1 (网刊彩色) 迭代函数曲面及构成系统的吸引子图形 (a) 正弦函数 $\sin(3(x^2 + y^2))$ 的曲面 F_{\sin} ; (b) 随机多项式曲面 F_{r1} ; (c) 随机多项式曲面 F_{r2} ; (d) 吸引子图形 A_{r1} ; (e) 吸引子图形 A_{r2}

随机多项式曲面形状 F_{r2} 如图 1(c) 所示, 得到的系统的混沌吸引子如图 1(e) 所示.

2.1.2 分岔图

为了确认以及更好地分析图 1(a) 所示函数的混沌特性, 图 2 给出了曲面 F_{r1} 和曲面 F_{r2} 分别与曲面 F_{\sin} 构成的动力系统的混沌分岔图.

事实上, 当参数发生改变时, 曲面形状也随之改变, 如图 3 所示. 当曲面 F_{r1} 的参数 w_{22} 在 -1 — 1 之间变化时, $g(x, y)$ 可能出现分母为零的情形, 从而出现异常现象. 不过这基本上不影响吸引子和分岔图的形状.

2.1.3 吸引子的变化

当参数变化时, 其吸引子形状也随之改变, 如图 4 所示. 观察图 4 可以发现, 吸引子形状随参数的变化是渐进的.

2.2 正弦曲面与随机多项式曲面迭代

正弦函数曲面具有很好的特性, 振荡并占有一定的空间, 其很适合于作为一个辅助曲面与另外一个随机曲面进行迭代, 以构造混沌系统. 下面研究正弦曲面与随机多项式曲面迭代构成的系统的混沌特性,

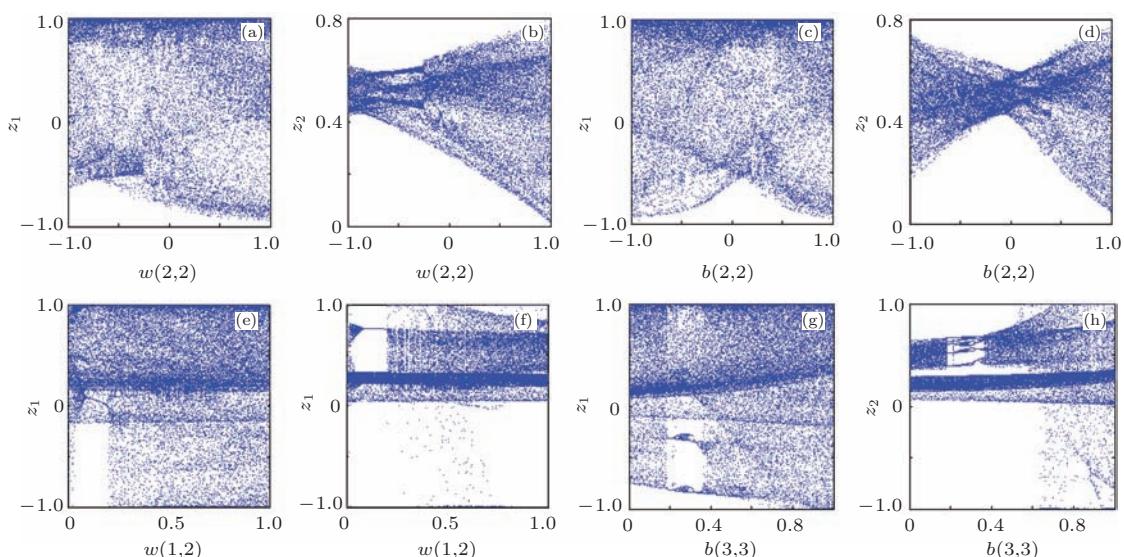


图 2 曲面 F_{r1} 和曲面 F_{r2} 分别与曲面 F_{\sin} 构成的系统的分岔图 (a) 当 w_{22} 变化时 F_{r1} 与 F_{\sin} 构成的系统的分岔图; (b) 当 w_{22} 变化时 F_{r2} 与 F_{\sin} 构成的系统的分岔图; (c) 当 b_{22} 变化时 F_{r1} 与 F_{\sin} 构成的系统的分岔图; (d) 当 b_{22} 变化时 F_{r2} 与 F_{\sin} 构成的系统的分岔图; (e) 当 w_{12} 变化时 F_{r1} 与 F_{\sin} 构成的系统的分岔图; (f) 当 w_{12} 变化时 F_{r2} 与 F_{\sin} 构成的系统的分岔图; (g) 当 b_{33} 变化时 F_{r1} 与 F_{\sin} 构成的系统的分岔图; (h) 当 b_{33} 变化时 F_{r2} 与 F_{\sin} 构成的系统的分岔图

$$\begin{cases} z_1 = f(x, y) = \sin(k(x^2 + y^2)), \\ z_2 = g(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^3 \\ \quad + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7y^3 + a_8xy \\ \quad + a_9x^2y + a_{10}xy^3. \end{cases} \quad (3)$$

随机生成 $g(x, y)$ 表达式的系数, 其为 -1 到 1 之间的数. 为了确保迭代能够正常进行, 我们把多项式 $g(x, y)$ 函数值调整到 0 — 1 之间. 首先计算多项式函数在 $[0, 1] \times [0, 1]$ 区域上的最大值 $g(x, y)_{\max}$ 和最小值 $g(x, y)_{\min}$, 然后使用

$$g(x, y) = \frac{g(x, y) - g(x, y)_{\min}}{g(x, y)_{\max} - g(x, y)_{\min}}$$

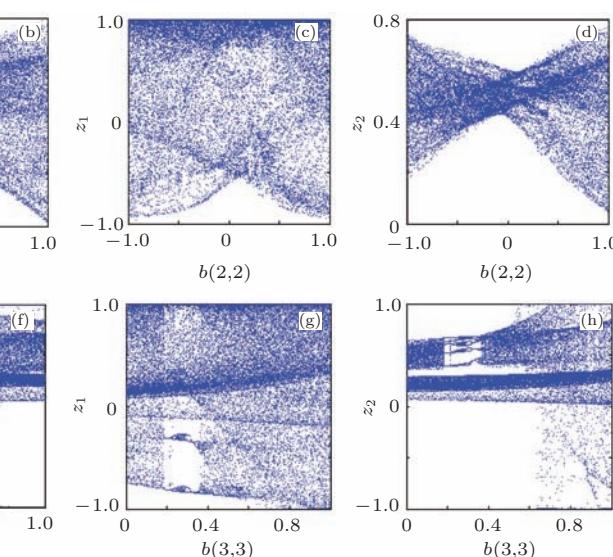
将函数值调整到 0 — 1 之间.

随机产生 $g(x, y)$ 的系数:

$$\mathbf{a} = [0.4705 \ -0.0131 \ 0.3175 \ 0.1416 \ -0.1937 \\ 0.1609 \ -0.1420 \ 0.4382 \ -0.0123 \ -0.4090].$$

令 $k = 3.14159$, a_9 从 -0.35 变化到 0.25 , 步长为 0.15 , 得到 5 个吸引子图形, 结果如图 5(a) 所示. 固定 \mathbf{a} , k 从 2.1 变化到 3.1 , 步长为 0.25 , 得到 5 个吸引子图形, 结果 5(b) 所示.

因为 Lyapunov 指数图能在一定程度上反映迭代的混沌程度, 所以下面计算图 5 所示的迭代的 Lyapunov 指数, 结果如图 6 所示. 该迭代具有显式



表达式, 容易计算其偏导数. 从图6可以看出: 当 a_9 和 k 均比较小时, Lyapunov 指数不稳定, Lyapunov 指数有时小于零, 有时大于零, 这与绘制吸引子时观察到的情况一致 (例如, 当 a_9 在 -0.3 附近变化, k 在 2.1 附近变化时, 时而出现吸引子, 时而没有吸引子); 当 a_9 或 k 增大后, 最大 Lyapunov 指数开始稳定并大于零, 所以每次都可以绘制出吸引子.

正弦函数曲面与随机曲面组合迭代出现混沌, 这与曲面的振荡和满射有直接关系, 例如, 把(2)式中的正弦函数改为余弦函数或者小波函数, $g(x, y)$ 仍然随机生成, 也会出现类似的效果.

3 曲面迭代出现混沌的条件

3.1 导数大小及其分布对迭代式产生混沌的影响

正弦函数曲面 $f(x, y) = \sin(3(x^2 + y^2))$ 的偏导数为 $f'_x(x, y) = 6x \cos(3(x^2 + y^2))$ 和 $f'_y(x, y) = 6y \cos(3(x^2 + y^2))$, 求导后, 函数绝对值变大并且振荡程度增强, 所以该函数很适合于构造混沌映射.

图7(a)所示的随机多项式曲面经过调整后变为图7(b)所示曲面, 调整后最大值为1, 最小值为零. 该函数的导数绝对值在一些区域上大于1, 并具有一定的振荡程度, 所以绘制出的吸引子图形变

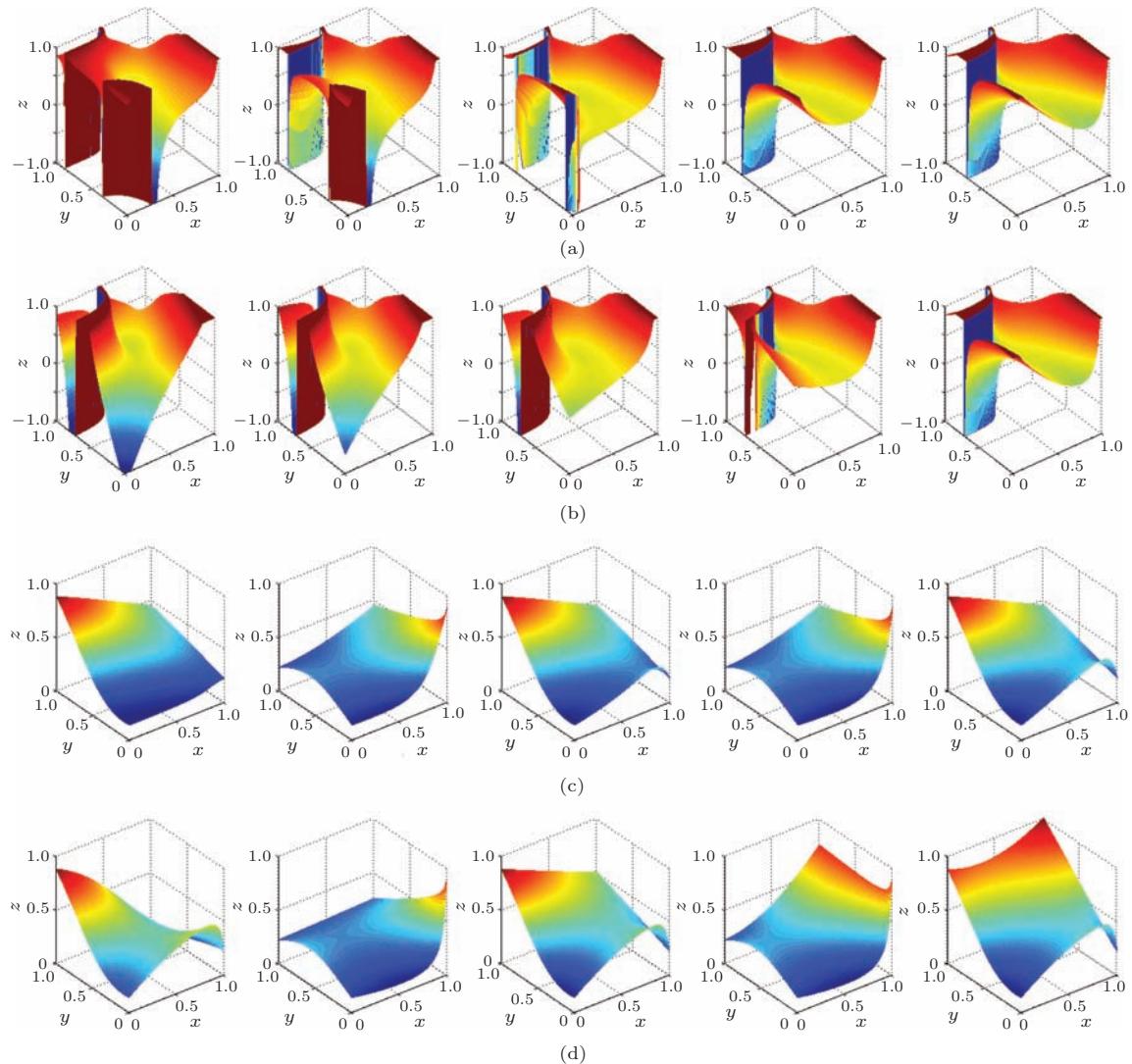


图3 (网刊彩色) 参数变化时曲面图形的变化 (a) 当 w_{22} 从 -1 变化到 1 , 步长为 0.5 时曲面 F_{r1} 的变化; (b) 当 b_{22} 从 -1 变化到 1 , 步长为 0.5 时曲面 F_{r1} 的变化; (c) 当 w_{12} 从 0 变化到 1 , 步长为 0.25 时曲面 F_{r2} 的变化; (d) 当 b_{33} 从 0 变化到 1 , 步长为 0.25 时曲面 F_{r2} 的变化

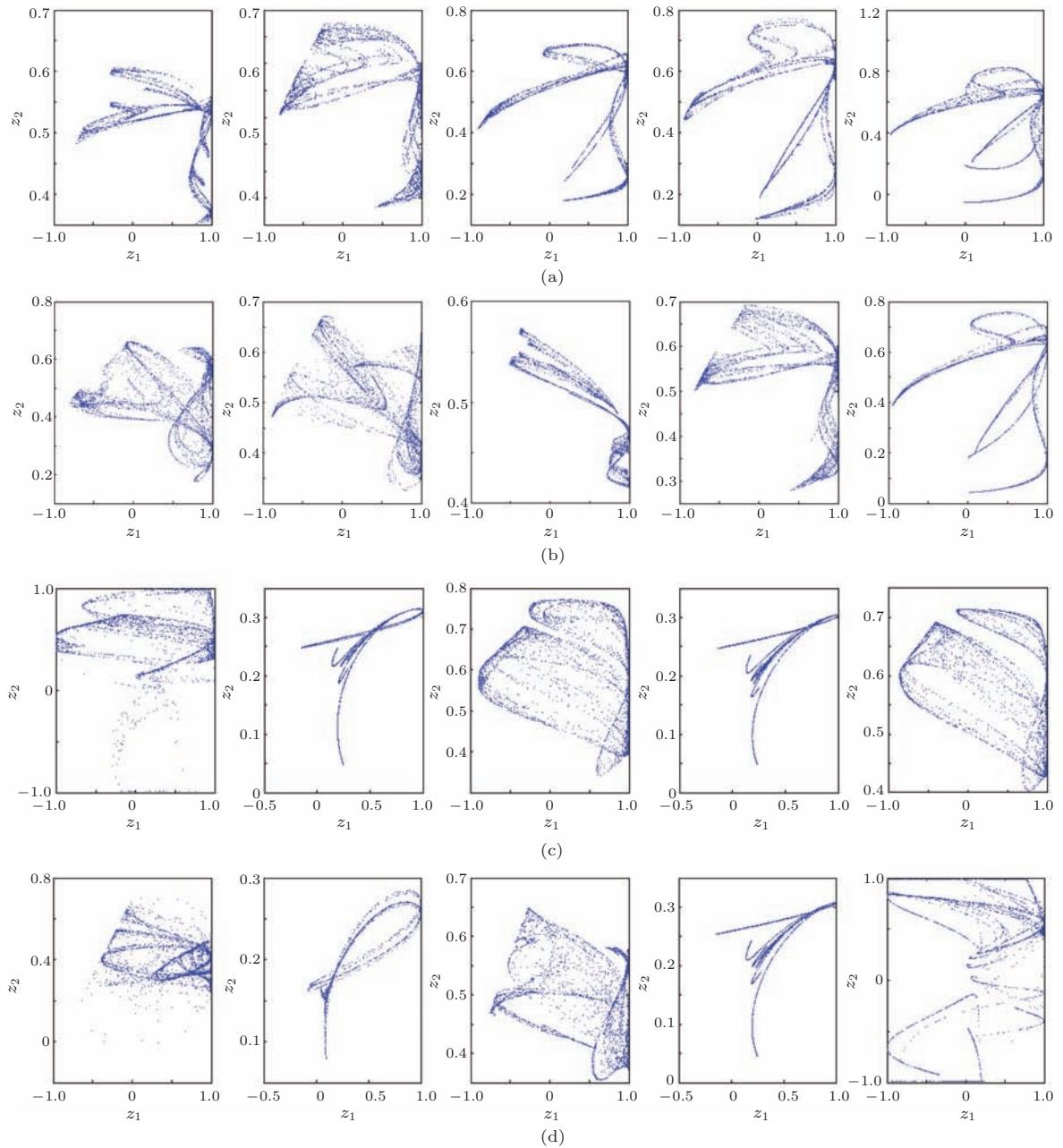


图4 参数变化时吸引子形状的变化 (a) 曲面 F_{r1} 的 w_{22} 从 -0.4 变化到 1.2 , 步长为 0.4 ; (b) 曲面 F_{r1} 的 b_{22} 从 -1 变化到 1 , 步长为 0.5 ; (c) 曲面 F_{r2} 的 w_{12} 从 0.5 变化到 2.5 , 步长为 0.5 ; (d) 曲面 F_{r2} 的 b_{33} 从 -1 变化到 1 , 步长为 0.5

化比较大, 具有一定的观赏性. 随机产生的多项式函数一般在零点附近偏导数都比较小, 求导之后, 多项式次数降低, 所以导数曲面变得平缓, 如图 7(c) 和 (d) 所示.

周期点在混沌研究中有着重要的作用. 如果一个系统没有不动点(一周期点)和二周期点, 其就不是 Li-Yorke 混沌的, 也不是 Devaney 混沌的. 另外文献 [10] 研究发现, 一维 Devaney 混沌产生的必要条件是周期点处的导数的乘积的绝对值应大于 1. 下面推导表明二维混沌也具有类似的性质.

设可微函数 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 构成了一个混沌的动力系统, (x_0, y_0) 为其不动点(一周期点), 即有 $f(x_0, y_0) = x_0$, $g(x_0, y_0) = y_0$, 假设在一个以 (x_0, y_0) 为中心, 半径为 r 的开区间邻域 Δu 内, 对于邻域内所有的点 $(x_0 + h, y_0 + k)$, $h < r$, $k < r$ 都满足

$$|f'_x(x_0 + h, y_0 + k)| + |f'_y(x_0 + h, y_0 + k)| < 1$$

和

$$|g'_x(x_0 + h, y_0 + k)| + |g'_y(x_0 + h, y_0 + k)| < 1,$$

那么如果迭代过程中没有任何点进入到以 (x_0, y_0) 为中心, 半径为 r 的开区间邻域内, 根据 Devaney 混沌的遍历性可知该函数不是混沌的; 如果有一个 $(x_0 + h, y_0 + k)$ 进入到此开区间邻域内, 根据微分学的泰勒展开公式可以得到

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) \\ = f(x_0, y_0) + h f'_x(x_0 + h, y_0 + k) \\ + k f'_y(x_0 + h, y_0 + k) \end{aligned}$$

$$< x_0 + \max(h, k) < x_0 + r, \quad (4)$$

其中 $\max(h, k)$ 表示 h, k 中较大的数. (4) 式中, 因为 (x_0, y_0) 是不动点, 所以 $f(x_0, y_0) = x_0$; 同理, 有

$$\begin{aligned} g(x_0 + h, y_0 + k) \\ = g(x_0, y_0) + h g'_x(x_0 + h, y_0 + k) \\ + k g'_y(x_0 + h, y_0 + k) < y_0 + r. \quad (5) \end{aligned}$$

根据 (4) 和 (5) 式可知, 迭代后, (x_0, y_0) 还停留在半径为 r 的邻域内.

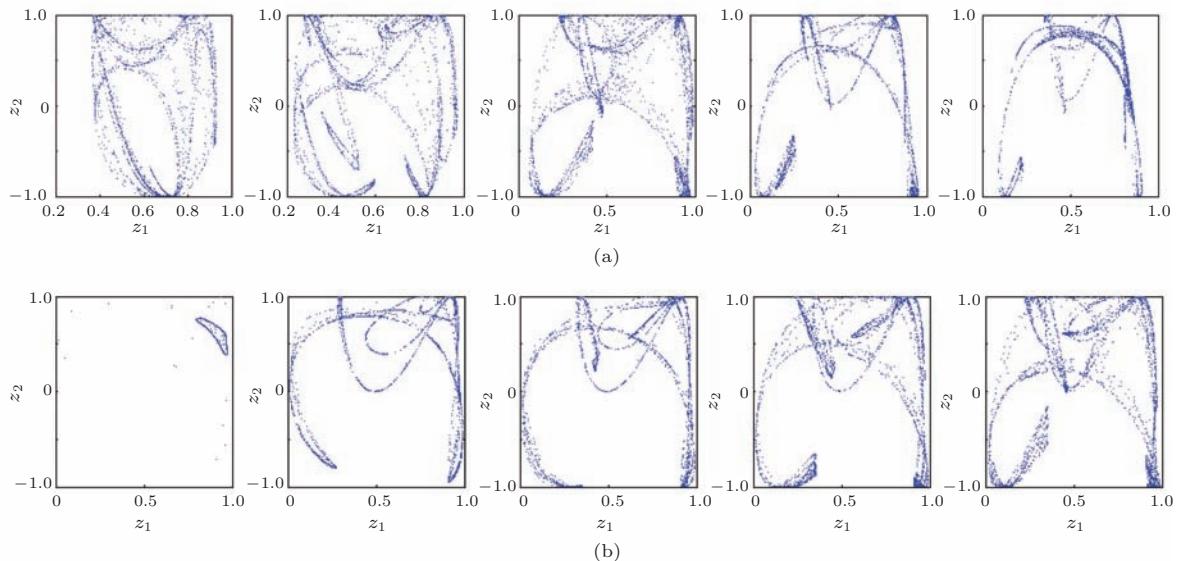


图5 正弦曲面与随机多项式曲面迭代构成的系统的吸引子随参数的变化 (a) $k = 3.14159$, a_9 从 -0.35 变化到 0.25 , 步长为 0.15 ; (b) 固定 a_9 , k 从 2.1 变化到 3.1 , 步长为 0.25

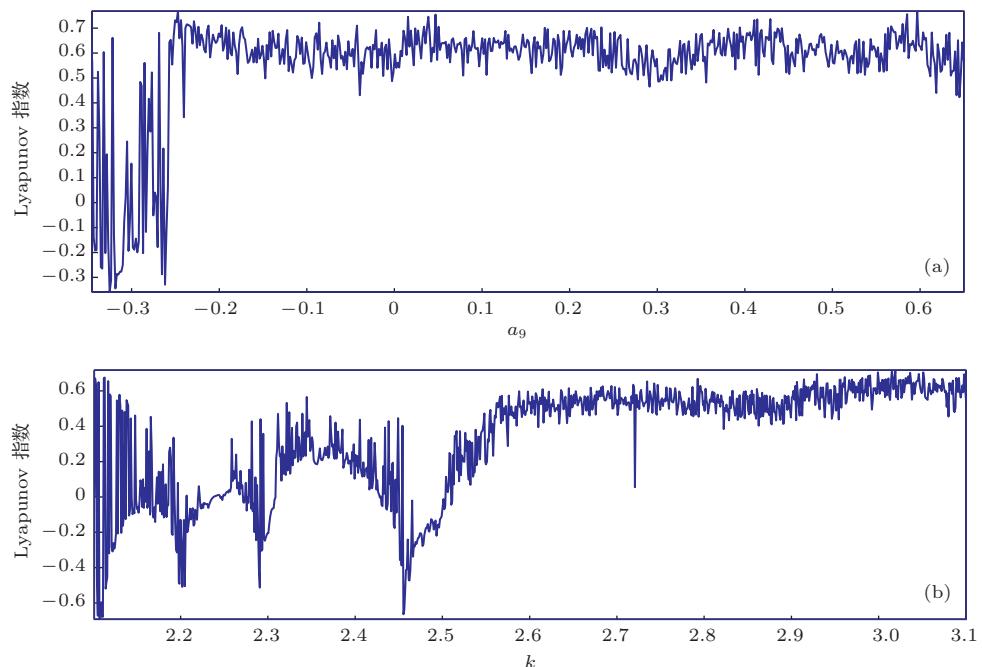


图6 最大 Lyapunov 指数图 (a) a_9 从 -0.1 变化到 0.9 , 步长为 0.001 ; (b) k 从 2 变化到 3 , 步长为 0.001

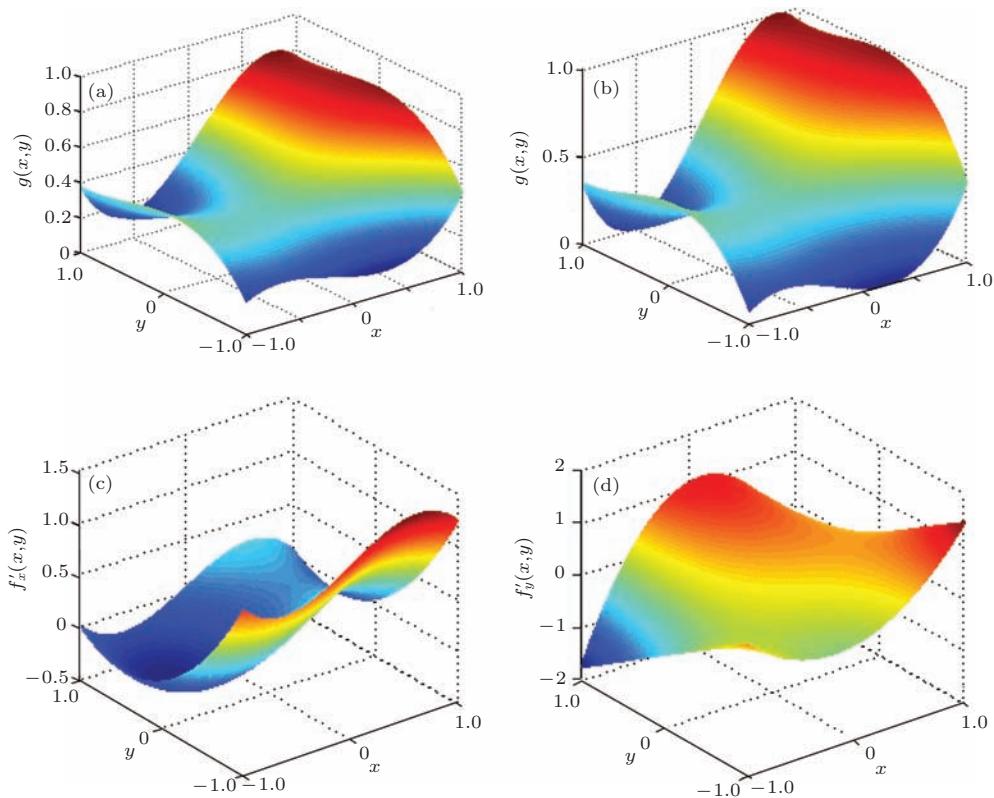


图7 (网刊彩色) 随机多项式曲面及其偏导数曲面 (a) 原曲面; (b) 函数值调整到0—1区域时的曲面; (c) 对 x 的偏导数曲面; (d) 对 y 的偏导数曲面

如果继续迭代, 即把

$$f(x_0, y_0) + hf'_x(x_0 + h, y_0 + k) + kf'_y(x_0 + h, y_0 + k)$$

和

$$g(x_0, y_0) + hg'_x(x_0 + h, y_0 + k) + kg'_y(x_0 + h, y_0 + k)$$

作为新的自变量代入到 $f(x, y)$ 和 $g(x, y)$ 中, 并泰勒展开, 把

$$hf'_x(x_0 + h, y_0 + k) + kf'_y(x_0 + h, y_0 + k)$$

用 $\max(h, k)$ 与

$$\max(|f'_x(x_0 + h, y_0 + k)|, |f'_y(x_0 + h, y_0 + k)|)$$

的乘积替换, 能推导出再迭代一次后, 与 $(x_0 + h, y_0 + k)$ 相比,

$$(f(x_0 + h, y_0 + k), g(x_0 + h, y_0 + k))$$

会更接近邻域中心, 这样随着迭代次数的增加, $(x_0 + h, y_0 + k)$ 会陷入到不动点中. 根据推导可以得到如下结论.

结论1 关于动力系统(1), 如果在不动点 (x_0, y_0) 为圆心的半径为 r 的开区间邻域 Δu 内, 对于邻域内所有的点 $(x_0 + h, y_0 + k)$, $h < r$, $k < r$ 都满足 $|f'_x(x_0 + h, y_0 + k)| < 1$, $|f'_y(x_0 + h, y_0 + k)| < 1$ 和 $|g'_x(x_0 + h, y_0 + k)| < 1$, $|g'_y(x_0 + h, y_0 + k)| < 1$, 那么动力系统(1)不是混沌的.

同样, 经过类似推导可以得到结论2.

结论2 关于动力系统(1), 如果在以某个周期点 (x_0, y_0) 为圆心的半径为 r 的开区间邻域内, 对于邻域内所有的点 $(x_0 + h, y_0 + k)$, $h < r$, $k < r$ 满足 $|f'_x(x_0 + h, y_0 + k)| < 1$, $|f'_y(x_0 + h, y_0 + k)| < 1$ 和 $|g'_x(x_0 + h, y_0 + k)| < 1$, $|g'_y(x_0 + h, y_0 + k)| < 1$, 那么动力系统(1)不是Devaney混沌的, 也不是分布混沌的.

由结论1和结论2可知, 在构造曲面迭代时, 应该考虑其周期点处的导数是否满足上述要求, 例如, 周期点处不能太平坦.

3.2 曲面形状对迭代式产生混沌的影响

曲面的形状在一定程度上决定着导数的变化, 所以每个曲面的形状对动力系统是否产生混沌

有影响. 以图1(a)和图7(b)所示曲面为例, 曲面 $f(x, y)$ 与平面 $z = x$ 的交线(满足 $f(x, y) = x$ 的点)如图8(b)所示. 曲面 $g(x, y)$ 与平面 $z = y$ 的交线(满足 $g(x, y) = y$ 的点)如图8(c)所示. 两个交线在 x - y 面上的投影如图8(d)所示. 从图8(d)可以看出, 该迭代只有一个不动点(两个面投影线的交点), 该不动点位于区域 $[0, 0.5] \times [0.5, 1]$ 上. 这可以证明该迭代在不动点处不满足结论1.

图9给出了 $f(x, y) = \sin(3(x^2 + y^2))$ 在 $x = a$ 上的截面曲线, 因为对称性, 其在 $y = b$ 上的截面曲线与图9所示曲线相同, 这种曲线具有较好的混沌特性[9].

虽然图1(a)所示的正弦函数曲面 F_{\sin} 与随机多项式曲面构成的动力系统出现混沌的概率高, 但是使用两个正弦函数曲面构成动力系统, 一般不会出现混沌(吸引子), 因为结构相同或相近, 其偏导数也相近, 所以其 Jacobi 矩阵的特征值会易于趋近于零. 从函数图像上看, 迭代轨迹一般会集中到对称面($x = y$)截得的一条曲线上.

大量的计算仿真结果显示, 形状相近的曲面构造迭代式产生混沌的概率非常小, 两个随机产生的

曲面也不易出现混沌. 迭代曲面的形状直接决定着吸引子的形状. 一般情况下, 迭代曲面变化不大, 吸引子变化也不大; 这些都有必要给出数学描述, 并进行论证.

4 三维迭代系统

随机生成三个多项式构造成三维动力系统, 经过大量的计算发现, 很难得到混沌吸引子, 也就是很难出现混沌. 但是, 如果先设计好一个三维函数, 然后再随机生成两个三元函数, 就很容易出现混沌.

例如, 首先设计如下三维正弦函数:

$$f(x, y, z) = \sin(k(x^2 + y^2 + z^2)), \quad (6)$$

再随机生成两个三元多项式函数,

$$\begin{aligned} g(x, y, z) = & a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5x^2 + a_6y^2 \\ & + a_7z^2 + a_8xy + a_9yz + a_{10}xz, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} h(x, y, z) = & b_1 + b_2x + b_3y + b_4z + b_5x^2 + b_6y^2 \\ & + b_7z^2 + b_8xy + b_9yz + b_{10}xz, \end{aligned} \quad (8)$$

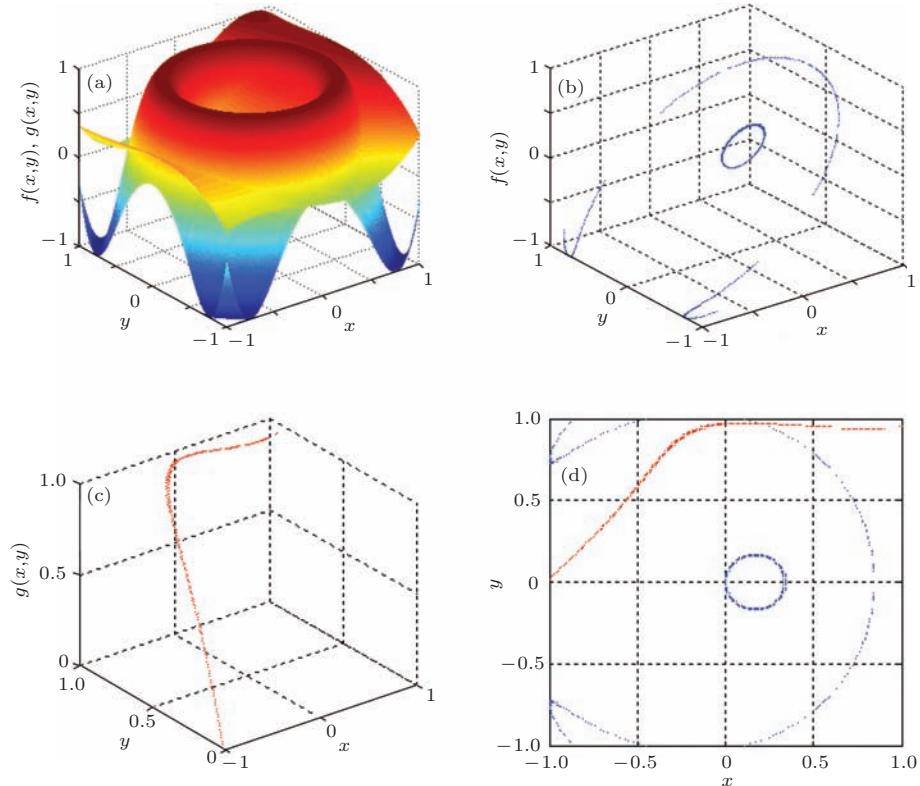


图8 (网刊彩色) 正弦函数曲面(图1(a))与随机多项式曲面(图8(b))迭代的不动点 (a) 两个曲面绘制在一个坐标系中; (b) 曲面 $f(x, y)$ 与平面 $z = x$ 的交线; (c) 曲面 $g(x, y)$ 与平面 $z = y$ 的交线; (d) 两个交线在 x - y 面上的投影

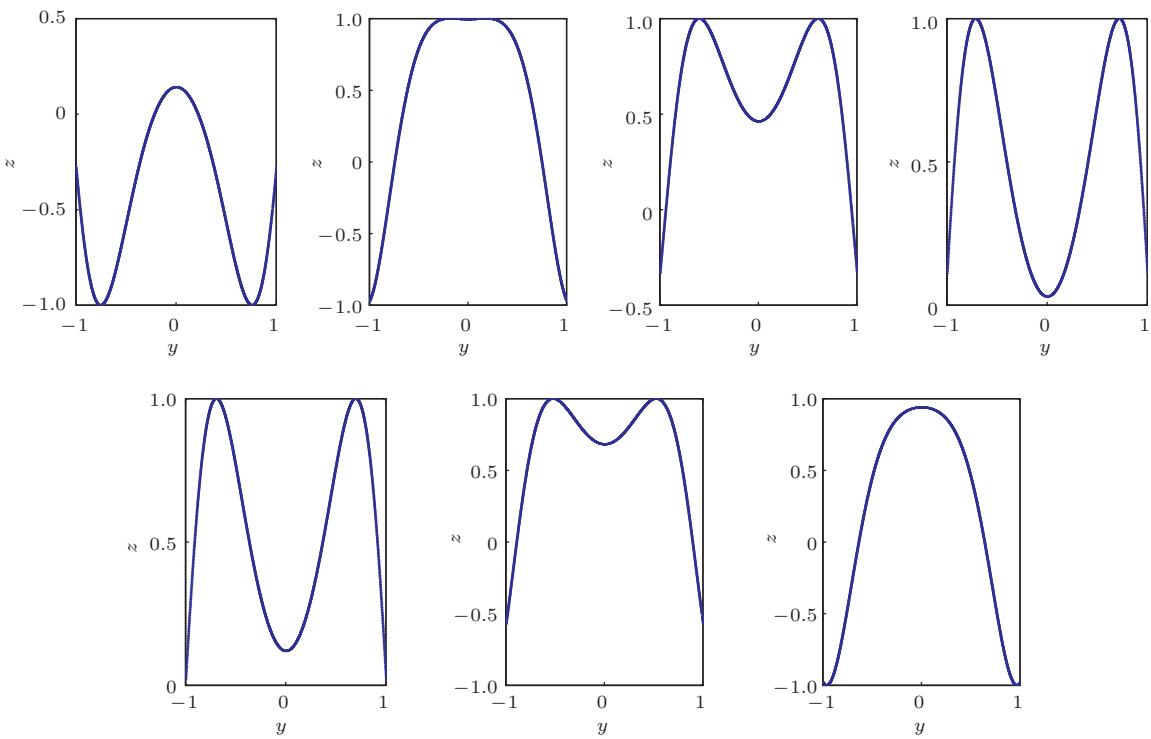
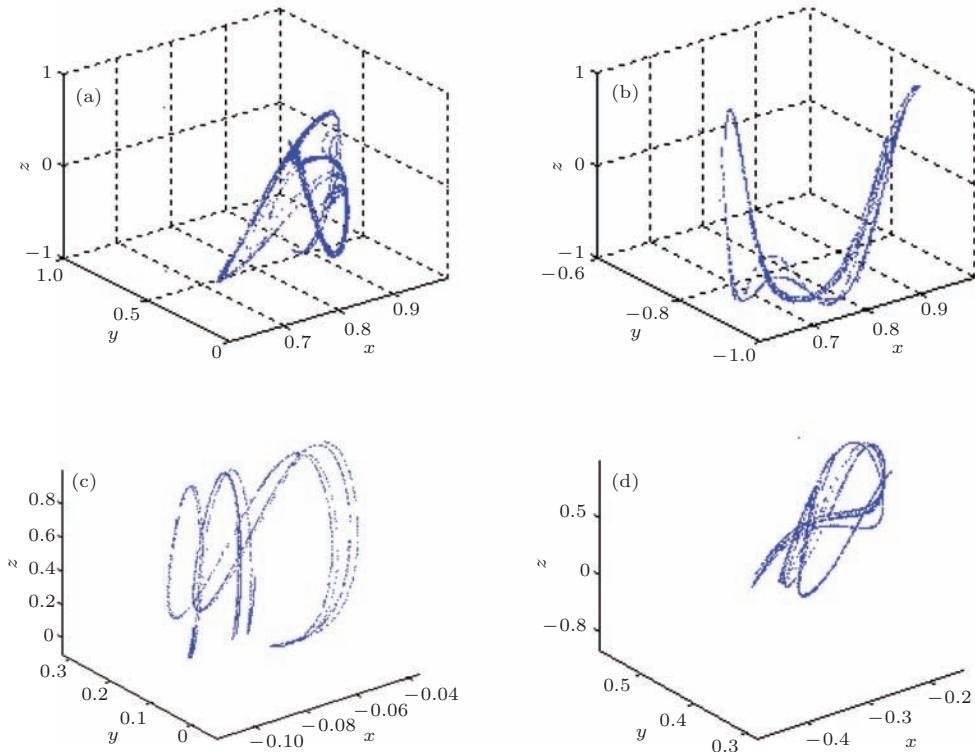
图9 $\sin(3(x^2 + y^2))$ 在 $x = a$ 上的截面曲线

图10 三维正弦函数与两个多项式函数迭代绘制出的三维吸引子 (a) 正弦函数与第一组多项式函数组合; (b) 正弦函数与第二组多项式函数组合; (c) 正弦函数与压缩后的第一组多项式函数组合; (d) 正弦函数与压缩后的第二组多项式函数组合

将(6)–(8)式构成一个动力系统, 该系统是混沌的
概率很大.

当 $k = 3.14159$ 时, 取如下两组多项式系数:

第一组多项式系数为

$$\mathbf{a} = [0.3121 \ 0.1101 \ 0.2015 \ -0.4078 \ -0.0751$$

$$-0.1244 \ -0.3338 \ 0.3332 \ 0.3386 \ -0.0484],$$

$$\mathbf{b} = [0.4566 \ -0.3528 \ 0.3699 \ 0.2694 \ -0.0558 \\ 0.1206 \ 0.4517 \ 0.1400 \ -0.2527 \ -0.1473];$$

第二组多项式系数为

$$\mathbf{a} = [0.1773 \ 0.0862 \ -0.4350 \ 0.3792 \ -0.0121 \\ 0.3915 \ 0.2623 \ 0.1553 \ 0.4715 \ -0.3289],$$

$$\mathbf{b} = [-0.3640 \ 0.2552 \ -0.2868 \ -0.0367 \\ -0.1606 \ -0.4904 \ -0.1662 \\ -0.2532 \ 0.4941 \ 0.4056],$$

所绘制出的吸引子如图 10 (a), (b) 所示。

计算 $g(x, y, z)$ 的绝对值的最大值 G_{\max} , $h(x, y, z)$ 的绝对值的最大值 H_{\max} , 然后把原来的 $g(x, y, z)$ 和 $h(x, y, z)$ 分别缩小 G_{\max} 和 H_{\max} , 这可保证这两个随机函数的函数值被压缩到 -1 — 1 之间, 此时迭代 2, 3 次就可以出现一个吸引子, 如图 10 (c), (d) 所示。

5 结 论

本文给出了一种实用的混沌吸引子生成方法, 利用正弦函数等混沌性质较好的函数与调整后的随机多项式函数组合一起构成迭代式进行迭代, 可产生大量的具有观赏和使用价值的吸引子。数值仿真结果表明, 混沌的产生与迭代曲面的导数分布及大小有关, 以正弦函数为例, 正弦函数具有导数绝对值大, 图像振荡, 且其横截面多是标准(或者亚标准)^[9]满射函数, 所以正弦函数具有很好的辅助产生混沌的功能。进一步要完成的工作有仿照正弦函数的特点构造出其他的插值拟合曲面, 研究其混沌

特性; 研究曲面迭代出现混沌的充分必要条件, 给出数学推导论证; 给出曲面形状相近的数学描述, 分析为什么形状相近不易产生混沌等。最后值得一提的是, 本文所述的内容与湍流研究有关, 也可能与百慕大三角、黑洞等研究有关^[11–14], 还与人脑思维机制以及其他一些自然现象有关^[15–17]。

参考文献

- [1] Li T Y, Yorke J A 1975 *Am. Math. Mon.* **82** 984
- [2] Oprocha P 2009 *Nonlinear Anal.* **71** 5835
- [3] He Y X, He Y L, Li H 1999 *Comput. Graph.* **23** 547
- [4] Viswanath D 2004 *Physica D* **190** 115
- [5] Kin D W, Chang P H 2013 *Results Phys.* **3** 14
- [6] Li C P, Chen G 2008 *Chaos Solitons Fract.* **18** 807
- [7] Reza M S 2012 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **17** 3857
- [8] Yu W B, Zhou Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 220501 (in Chinese) [于万波, 周洋 2013 物理学报 **62** 220501]
- [9] Yu W B, Yang L Z 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 020503 (in Chinese) [于万波, 杨灵芝 2013 物理学报 **62** 020503]
- [10] Yu W B, Yang X S, Wei X P 2011 *Application Research of Computers* **28** 3837 (in Chinese) [于万波, 杨雪松, 魏小鹏 2011 计算机应用研究 **28** 3837]
- [11] Jin Y Q, Liang Z C 2003 *Acta Phys. Sin.* **52** 1319 (in Chinese) [金亚秋, 梁子长 2003 物理学报 **52** 1319]
- [12] Mo J Q, Lin W T 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1648 (in Chinese) [莫嘉琪, 林万涛 2000 物理学报 **49** 1648]
- [13] Li C A 2005 *Acta Phys. Sin.* **54** 1081 (in Chinese) [李传安 2005 物理学报 **54** 1081]
- [14] Ge Y Z, Mi J C 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 024704 (in Chinese) [戈阳祯, 米建春 2013 物理学报 **62** 024704]
- [15] Yuan R S, Ma Y A, Yuan B, Ao P 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010505
- [16] Gao W, Zha F S, Song B Y, Li M T 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010701
- [17] Qin H, Xue P 2014 *Chin. Phys. B* **23** 010301

A new chaotic attractor graphics drawing method based on the curved iteration

Yu Wan-Bo[†] Zhao Bin

(College of Information Engineering, Dalian University, Dalian 116622, China)

(Received 11 December 2013; revised manuscript received 8 January 2014)

Abstract

In this paper, we continue to study the chaotic characteristics of two curved surface mapping which forms a function in a unit area, and find that when one of the two curved surfaces is a standard curved surface and subjected to strong oscillation, and the other is randomly generate, the occurrence of chaos is more prone. Many different chaotic attractors are drawn by this method, adjusting the random surface to become subjective, the probability of chaotic attractor appearing can reach a half or more, which means that when certain conditions are meet, chaos is extremely common. Through calculating Lyapunov exponent and drawing the bifurcation diagram to analyze characteristics of chaos of the function, according to the bifurcation diagram of parameters and the Lyapunov exponent curve to look for more chaotic mapping function, a lot of chaotic attractors can be obtained. Finally a three-dimensional trigonometric function and two randomly generated three-dimensional polynomial functions are iterated, and many fancy three-dimensional attractors are obtained.

Keywords: chaotic attractor, curved surface, iteration

PACS: 05.45.-a

DOI: [10.7498/aps.63.120502](https://doi.org/10.7498/aps.63.120502)

[†] Corresponding author. E-mail: yu_wb@126.com