

强磁场中弱相互作用费米气体的稳定性

门福殿[†] 田青松 陈新龙

(中国石油大学(华东)理学院, 青岛 266555)

(2013年12月6日收到; 2014年3月7日收到修改稿)

运用量子统计理论, 研究强磁场中弱相互作用费米系统的稳定性, 给出系统稳定性条件的解析式, 分析相互作用、磁场对稳定性的影响机制. 研究显示: 排斥相互作用会增大系统稳定时的化学势, 也会增大系统稳定时的空间区域; 而加强磁场会减小系统稳定时的空间区域, 也会降低系统的粒子数密度分布的稳定性.

关键词: 强磁场, 费米气体, 弱相互作用, 稳定性

PACS: 05.30.-d, 71.10.Ca, 51.35.+a, 51.60.+a

DOI: 10.7498/aps.63.120504

1 引言

近年来, 超冷费米气体的研究已经取得了重要成果^[1-7], 而关于费米系统稳定性的研究也逐渐成为热点领域. 文献[8]的结果表明, 简并费米气体在一定条件下也会出现崩塌; 文献[9]也对受约束的弱相互作用费米气体的不稳定性进行了研究, 给出了系统不稳定性密度条件; 文献[10]从热力学角度研究了弱相互作用费米气体的稳定性, 给出了系统不稳定的粒子数密度判据; 文献[11]研究了弱磁场中弱相互作用费米气体的力学稳定性, 给出了系统不稳定的条件; 文献[7]研究了强磁场中费米气体的低温统计性质, 包括系统的热力学性质和稳定性, 分析了磁场的影响机制; 文献[12]研究了双组分费米气体的稳定性. 本文研究强磁场中弱相互作用费米气体低温下的稳定性, 深入探讨相互作用及磁场对稳定性的影响机制.

2 系统稳定性条件的解析

考虑 N 粒子的费米系统, 处在强磁场中, 即满足 $T \leq \sigma B \ll \mu$, 且粒子之间有弱相互作用, 即 $a/\lambda \ll 1$, $|a|n^{1/3} \ll 1$. 其中 μ 是化学势, a 是 s 波

散射长度, λ 是热波长, B 为磁感应强度, n 为粒子数密度, T 为温度, σ 是玻尔磁子. 据文献[13], 系统的基态能量和粒子数分别表达为

$$U^0 = C\pi V \left[\mu_0^{5/2} - \frac{D}{\pi} a \mu_0^4 \left(1 + \frac{2BV}{\mu_0} \right) \right], \quad (1)$$

$$N = \frac{2\pi}{3B} C \left\{ (\mu_0 + BV)^{5/2} - \mu_0^{5/2} - \frac{2}{7\pi} Da [(\mu_0 + BV)^3 - \mu_0^3] \right\}, \quad (2)$$

其中

$$C = \frac{8(2m)^{3/2}}{5h^3}, \quad D = \frac{35\pi}{3h} \sqrt{2m},$$

μ_0 是 $T = 0$ 时系统的化学势, ε_F 是无磁场无相互作用系统的费米能. 在 $BV \ll \mu_0$ 条件下, 由文献[13]得

$$\mu_0 \approx \varepsilon_F \left[1 + \frac{8D}{35\pi} a \varepsilon_F^{1/2} \left(1 - \frac{3BV}{2\varepsilon_F} \right) - \frac{1}{2} \frac{BV}{\varepsilon_F} \right]. \quad (3)$$

用化学势 μ 表示粒子数 N 固定的约束, 则基态能量有极值的条件是^[12]

$$\delta U^0 - \mu \delta N = 0, \quad (4)$$

由(1), (2)及(3)式, (4)式可表示为

$$\frac{5}{2} CV \pi \left\{ \varepsilon_F^{3/2} \left[1 - \frac{3BV}{4\varepsilon_F} - \frac{8Da\varepsilon_F^{3/2}}{5\pi} \right] \right.$$

[†] 通讯作者. E-mail: menfudian@163.com

$$\left. \begin{aligned} & + \frac{24}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \right] - \mu\varepsilon_F^{1/2} \left[1 + \frac{16}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \right. \\ & \left. - \frac{BV}{4\varepsilon_F} \right] \Big\} \delta\varepsilon_F = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

从而有

$$\varepsilon_F \left[1 - \frac{3BV}{4\varepsilon_F} - \frac{8Da\varepsilon_F^{3/2}}{5\pi} + \frac{24}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \right] - \mu \left[1 + \frac{16}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} - \frac{BV}{4\varepsilon_F} \right] = 0. \quad (6)$$

系统稳定的条件, 即为基态能量对粒子数密度 (也就是 ε_F) 求极值的条件, 所以 (6) 式为系统稳定的条件. (6) 式表明, 粒子数密度、磁场、相互作用、系统的粒子分布的空间区域必须满足 (6) 式, 系统才是稳定的. 此时, 系统的化学势满足

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{\varepsilon_F \left[1 - \frac{3BV}{4\varepsilon_F} - \frac{8Da\varepsilon_F^{3/2}}{5\pi} + \frac{24}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \right]}{1 - \frac{BV}{4\varepsilon_F} + \frac{16}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2}} \\ &\approx \varepsilon_F \left(1 - \frac{BV}{2\varepsilon_F} + \frac{8}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \right), \end{aligned} \quad (7)$$

或系统的体积满足

$$\begin{aligned} V &= \frac{4}{3B} \frac{\varepsilon_F \left(1 + \frac{24}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \right) - \mu \left(1 + \frac{16}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \right)}{1 - \frac{\mu}{3\varepsilon_F}} \\ &\approx \frac{2}{B} \varepsilon_F \left[1 - \frac{\mu}{\varepsilon_F} + \frac{24}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \left(1 - \frac{2\mu}{3\varepsilon_F} \right) \right], \end{aligned} \quad (8)$$

(8) 式为系统稳定时粒子概率云分布的空间区域. 取

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \varepsilon_F} &= \frac{2}{B} \left[1 - \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon_F} + \frac{36}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \right. \\ &\quad \left. \times \left(1 - \frac{4}{9} \frac{\partial \mu}{\partial \varepsilon_F} - \frac{2\mu}{9\varepsilon_F} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

满足 (9) 式的化学势为

$$\mu = \mu^0 = \varepsilon_F \left(1 + \frac{8}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} - \frac{BV}{2\varepsilon_F} \right), \quad (10)$$

此时, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial \varepsilon_F^2} \Big|_{\mu=\mu^0} &= \frac{4Da}{35\pi B} \left(1 - \frac{BV}{\varepsilon_F} - \frac{128}{35\pi} Da \right) \\ &< 0, \end{aligned} \quad (11)$$

无论是吸引还是排斥作用, 在 $BV \ll \varepsilon_F$ 的条件下, (11) 式总成立, 说明在满足 (10) 式时, 系统稳定时

的空间区域有极大值:

$$\begin{aligned} V_{\max} &= \frac{16}{35\pi B} Da\varepsilon_F^{3/2} \left[\frac{BV}{\varepsilon_F} - \frac{16}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \right] \\ &+ V. \end{aligned} \quad (12)$$

与此相应, 粒子数密度取极小值. 另外, 为使系统对粒子数密度的分布保持稳定, 要求 [12]

$$\delta^2 U^0 - \mu \delta^2 N > 0, \quad (13)$$

即有

$$\begin{aligned} 3\varepsilon_F \left(1 - \frac{BV}{4\varepsilon_F} \right) - \mu \left(1 + \frac{1}{4} \frac{BV}{\varepsilon_F} \right) \\ + \frac{96}{35\pi} Da\varepsilon_F^{3/2} \left(1 - \frac{1}{3} \frac{\mu}{\varepsilon_F} \right) > 0. \end{aligned} \quad (14)$$

3 分析与讨论

(7) 式表明, 当体积 V 一定时, $a > 0$, 即排斥作用, 会增大系统稳定时所需的化学势; 反之, $a < 0$, 即吸引作用, 会降低系统稳定时所需的化学势. 磁场总会降低系统稳定时所需的化学势. 相互作用对系统稳定性的这种影响特征表明, 在系统体积一定的条件下, 与无相互作用系统相比, 排斥 (吸引) 作用使系统稳定时单粒子的能量增大 (减小), 因此系统的粒子数变化时所需的能量增加 (减少), 即稳定时系统所需的化学势增大 (减小).

(8) 式显示, 当化学势 μ 一定时, $a > 0$, 即排斥作用, 会增大系统稳定时的空间区域; 反之, 吸引作用会减小系统稳定时的空间区域. 加强磁场也会减小系统稳定时的空间区域. 相互作用对系统稳定性的这种影响特征表明, 在化学势一定的条件下, 与无相互作用系统相比, 排斥 (吸引) 作用使系统粒子的空间运动趋于发散 (收缩), 由此导致系统稳定时所需的区域增大 (减小).

由 (11) 式不难看出, 不论 $a < 0$ 还是 $a > 0$, 即不论是吸引作用还是排斥作用, 系统稳定时的空间区域随粒子数密度 (也就是 ε_F) 的变化都存在极大值. 但是 (12) 式显示, 吸引与排斥作用对极大值的影响却不同. 与无相互作用系统相比, 吸引作用使极大值变小, 满足

$$\left(\frac{BV}{\varepsilon_F} - \frac{16}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2} \right) > 0$$

的排斥作用使极大值变大. 当体积 V 和化学势 μ 一定时, 由 (14) 式可知, 排斥 (吸引) 作用有 (不) 易于系统粒子数密度的空间分布的稳定性, 而磁场也会降低系统粒子数密度的空间分布的稳定性.

4 结 论

本文运用量子统计理论, 解析了强磁场中弱相互作用费米系统稳定性的条件, 分析了相互作用、磁场对稳定性的影响机制. 研究表明, 排斥(吸引)相互作用, 会增加(降低)系统稳定时的化学势及空间区域, 也会有(不)易于系统粒子数密度的空间分布的稳定性. 排斥与吸引相互作用, 都可使系统稳定时的空间区域有极大值. 吸引作用使极大值变小, 满足 $\left(\frac{BV}{\varepsilon_F} - \frac{16}{35\pi} Da\varepsilon_F^{1/2}\right) > 0$ 的排斥作用使极大值变大. 而加强磁场会减小系统稳定时的空间区域, 也会降低系统粒子数密度的空间分布的稳定性.

参考文献

- [1] Regal C A, Ticknor C, Bohn J L, Jin D S 2003 *Nature* **424** 47
- [2] Xiong H W, Liu S J, Zhang W P, Zhan M S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 120401
- [3] Dong H, Ma Y L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 715
- [4] Qin F, Chen J S 2009 *Phys. Rev. A* **79** 043625
- [5] Xiong H W, Liu S J, Zhan M S 2006 *Phys. Rev. A* **74** 033602
- [6] Chen J S, Cheng C M, Li J R, Wang Y P 2007 *Phys. Rev. A* **76** 033617
- [7] Men F D, Fan Z L 2010 *Chin. Phys. B* **19** 030205
- [8] Modugno G, Roati G, Riboli F 2002 *Science* **297** 2240
- [9] Amusia M Y, Msezane A Z, Shaginyan V R 2002 *Phys. Lett. A* **293** 205
- [10] Yan D Q 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 3912 (in Chinese) [袁都奇 2006 物理学报 **55** 3912]
- [11] Men F D, Liu H 2006 *Chin. Phys. B* **15** 2856
- [12] Xue J K, Ma Y T 2010 *J. Northwest Normal Univ. (Natural Science)* **46** 26 (in Chinese) [薛具奎, 马玉亭 2010 西北师范大学学报 **46** 26]
- [13] Men F D, Wang B F, He X G, Wei Q M 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 080501 (in Chinese) [门福殿, 王炳福, 何晓刚, 魏群梅 2011 物理学报 **60** 080501]

Stability of a weakly interacting Fermi gas in a strong magnetic field

Men Fu-Dian[†] Tian Qing-Song Chen Xin-Long

(College of Science, China University of Petroleum (East China), Qingdao 266555, China)

(Received 6 December 2013; revised manuscript received 7 March 2014)

Abstract

Using the quantum statistical theory, the stability of a weakly interacting Fermi gas trapped in a strong magnetic field is investigated, the expression of stability condition is given, and the mechanisms of influences of interparticle interaction and magnetic field on the stability are analyzed. The results show that repulsive interaction will increase both the chemical potential and the space domain needed for system stability. But, the increasing of magnetic field strength will reduce the space domain needed for the system stability, and lower the stability of the particle number density distribution.

Keywords: strong magnetic field, Fermi gas, weakly interacting, stability

PACS: 05.30.-d, 71.10.Ca, 51.35.+a, 51.60.+a

DOI: 10.7498/aps.63.120504

[†] Corresponding author. E-mail: menfudian@163.com